Równania różniczkowe, zadania, część 4

31. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań:

1° $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y; \end{cases}$

2° $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 5x + 2y; \end{cases}$

3° $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x; \end{cases}$

4° $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x; \end{cases}$

5° $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0; \end{cases}$

6° $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y; \end{cases}$

7° $\begin{cases} x' = 2y - 3x = 0, \\ y' = y - 2x; \end{cases}$

8° $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 0; \end{cases}$

9° $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = -2x - z, \\ z' = 2x + y + 2z; \end{cases}$

10° $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - 2y + 2z; \end{cases}$

11° $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z; \end{cases}$

12° $\begin{cases} x' = 2x + 2z - y, \\ y' = x + 2z, \\ z' = y - 2x - z; \end{cases}$

13° $\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 2y + 3z - x; \end{cases}$

14° $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y; \end{cases}$

15° $\begin{cases} x' = y - 2z - x, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z; \end{cases}$

16° $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + 4z, \\ z' = x - z; \end{cases}$

17° $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 2z - x + y; \end{cases}$

18° $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z; \end{cases}$

19° $\begin{cases} w' = 7w - 2x + 5y - 10z, \\ x' = 5w - 2x - 5z, \\ y' = 2w + 3y - 4z, \\ z' = 5w - x + 5y - 8z; \end{cases}$

20° $\begin{cases} w' = 7w - 4x + 5y - 10z, \\ x' = 3w - 2x - 3z, \\ y' = 2w + 3y - 4z, \\ z' = 5w - 2x + 5y - 8z. \end{cases}$

32. Wykazać, że dla każdej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $e^A = \lim\limits_{n\to\infty} \left(I + \frac{A}{n}\right)^n$.

33. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow M_{n\times n}$ będzie niezerową funkcją ciągłą taką, że $f(t+s) = f(t)f(s)$ dla dowolnych liczb t, s. Czy wynika z tego, że istnieje macierz $A \in M_{n\times n}$ taka, że $f(t) = e^{tA}$ dla każdej liczby t?

34. Niech $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$. Znaleźć wszystkie macierze B takie, że $AB = BA$.

35. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań:

1° $\begin{cases} x'' = 3x - 3y, \\ y'' = x - 2y; \end{cases}$

2° $\begin{cases} x'' = 3x + 4y, \\ y'' = -x - y; \end{cases}$

3° $\begin{cases} x'' = 2y, \\ y'' = -2x; \end{cases}$

4° $\begin{cases} x'' + x' + y' - 2y = 0, \\ x' - y' + x = 0; \end{cases}$

5° $\begin{cases} x'' + 5x' + 2y' + y = 0, \\ 3x'' + 5x + y' + 3y = 0; \end{cases}$

6° $\begin{cases} 2x'' + 2x' + x + 3y'' + y' + y = 0, \\ x'' + 4x' - x + 3y'' + 2y' - y = 0. \end{cases}$

Wesołych Świąt i miłego rozwiązywania tych kilku prostych zadanek