

## Równania różniczkowe, zadania, część 2

11. Znaleźć takie funkcje  $f$  takie, że dla dowolnego  $x$  pole trójkąta utworzonego przez styczną do wykresu w punkcie  $(x, f(x))$ , poziomą oś układu współrzędnych i pionową prostą przechodzącą przez punkt  $(x, f(x))$  jest niezależne od  $x$  i równe  $a^2$ ,  $a \neq 0$ .
12. Znaleźć takie funkcje  $f$  takie, że dla dowolnego  $x$  punkt przecięcia stycznej do wykresu poprowadzonej przez punkt  $(x, f(x))$  ma odciętą  $\frac{x}{2}$ .
13. W pojemniku o objętości 20 l znajduje się powietrze 80% azotu, 20% tlenu. Do pojemnika wpompowywany jest azot z prędkością 0,1 l/s, który błyskawicznie miesza się z mieszanką gazów w pojemniku. Jednocześnie z pojemnika wypuszczana jest mieszanka w takim samym tempie w jakim wpompowywany jest azot. Po jakim czasie w pojemniku będzie 99% azotu?
14. Spadochroniarz wyskoczył z samolotu lecącego na wysokości 1,5 km i otworzył spadochron na wysokości 0,5 km. Ile czasu spadał spadochroniarz „bez” spadochronu, jeśli wiadomo, że przyspieszenie ziemskie równe jest  $10 \text{ m/s}^2$ , a graniczna prędkość tego spadochroniarza w powietrzu to  $50 \text{ m/s}$ ? Zakładamy, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości.
15. Ile czasu będzie wyciekać woda z pionowego pojemnika w kształcie walca o średnicy 1,8 m, o wysokości 2,45 m przez otwór w dnie o średnicy 6 cm. Zakładamy, że woda wycieka z pojemnika z prędkością  $0,6\sqrt{2gh}$ , gdzie  $g = 10 \text{ m/s}^2$  a  $h$  oznacza głębokość wody w pojemniku.
16. Masa rakiety z paliwem równa jest  $M$ , bez paliwa —  $m$ , prędkość, z którą wylatują z rakiety produkty spalania jest równa  $v$ , prędkość początkowa rakiety równa jest 0. Znaleźć prędkość rakiety po spalaniu całego paliwa. Zakładamy, że rakietę porusza się w próżni z dala od ciał niebieskich (więc nie bierzemy pod uwagę żadnych sił poza „siłą odrzutu”).
17. Rozwiązać równania:
  - a.  $tx' - 2x = 2t^4$ ;
  - b.  $x' + 2x = t^2 e^t$ ;
  - c.  $x' + 2x = t^2 e^{2t}$ ;
  - d.  $t^2 x' + tx + 1 = 0$ ;
  - e.  $(\sin^2 x + t \operatorname{ctg} x)x' = 1$ ;
  - f.  $x' = \frac{x}{3x - x^2}$ .
18. Rozwiązać równania:  $3x' + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0$ ,  $x' - 2tx + x^2 = 5 - t^2$ .
19. Niech  $a > 0$  będzie liczbą rzeczywistą,  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = b$ . Wykazać, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania  $tx' + ax = f(t)$ , które jest ograniczone przy  $t \rightarrow 0$  i znaleźć granicę tego rozwiązania przy  $t \rightarrow 0$ .
20. Znaleźć rozwiązanie równania  $x' \sin(2t) = 2(x + \cos t)$  ograniczone przy  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .