Równania różniczkowe, zadania, część 1

Należy rozwiązać co najmniej trzy zadania, w tym jedno z zadań 8–10, rozwiązania należy mieć napisane na jakiejś kartce, mogę chcieć przeczytać. Jeśli wszyscy rozwiążą te same zadania, będę zmuszony zrobić kartkówkę.

Osoby, które obiecały mi przysłać listy elektroniczne (tzw. e-maile) powinny to zrobić możliwie szybko, bo zrobię listę grupy bez nich!

1. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego $(t^2-1)x' + 2tx^2 = 0,\ x(0) = 1$.

2. Rozwiązać równanie $2t^2xx' + x^2 = 2$.

3. Rozwiązać równanie $x' - tx^2 = 2tx$.

4. Rozwiązać równanie $x' = \cos(t-x)$.

5. Rozwiązać równanie $x' = \sqrt{4t+2x-1}$.

6. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania x równania $t^2x' - \cos(2x) = 1$, że $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \frac{9\pi}{4}$.

7. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania x równania $3x^2x' + 16t = 2tx^3$, które są ograniczone na pewnej półprostej postaci $(b,+\infty)$, $b \in \mathbb{R}$.

8. Wykazać, że każde rozwiązanie x równania $x' = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{t^4+1}}$ ma skończone granice w $\pm\infty$.

9. Rozważamy równanie $x' = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{\sin t}}$ dla $0 < t < \pi$, $0 < x$. Wykazać, że dla każdej liczby $a \in (0, \frac{1}{17})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x rozważanego równania takie, że $\lim\limits_{t\to a^+} x(t) = 0$, dla każdej liczby $b \in (0, \frac{1}{17})$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie takie, że $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = b$. Czy istnieje rozwiązanie x takie, że $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = 0$?

10. Niech $x_a' = \sqrt{2(a+\cos x_a)}$, $x_a(0) = 0$. Wykazać, że jeśli $0 < a < 1$, to funkcja x_a może być określona na całej prostej, wtedy jest okresowa. Niech T_a oznacza jej okres podstawowy (czyli najmniejszy dodatni). Wykazać, że $\lim\limits_{a\to 0} T_a = 2\pi$ oraz $\lim\limits_{a\to\infty} T_a = \infty$. Znaleźć granicę $\lim\limits_{a\to 0} \frac{T_a-2\pi}{a}$, o ile taka granica istnieje.

Miłej zabawy