Niektóre fragmenty wykładu z równań różniczkowych

To może za kilka dni się powiększyć o jakieś inne twierdzenia

Zagadnienie dwóch ciał

Dwa ciała poruszają się w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której poza nimi nic nie ma. Jedyna siła, która działa to grawitacja. Ciała mają masy m, M, znajdują się w chwili t w punktach $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$. Niech G oznacza stałą grawitacyjną. Z prawa powszechnego ciążenia wynika, że na masę m działa siła $GmM\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}$, a na masę M — siła $GmM\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}$. Obie siły różnią się jedynie zwrotem (znakiem). Spełnione są równania Newtona:

$$m\mathbf{x}'' = GmM\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}, \qquad M\mathbf{y}'' = GmM\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}.$$

Dodając je stronami otrzymujemy: $m\mathbf{x}''+M\mathbf{y}'' = 0$, a ponieważ środkiem masy rozpatrywanej pary punktów materialnych jest $\frac{m\mathbf{x}+M\mathbf{y}}{m+M}$, więc możemy stwierdzić, że ruch środka masy jest jednostajny i prostoliniowy. Możemy więc w dalszym ciągu przyjąć, że $m\mathbf{x} + M\mathbf{y} = 0$ dla każdego t, czyli że środek masy nie porusza się, po prostu zastępujemy jeden układ inercjalny innym, w języku matematyki: dodajemy do każdej z funkcji $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ funkcją linową, co ani nie zmienia ich różnicy, ani drugiej pochodnej.

Odejmijmy teraz równania ruchu stronami podzieliwszy uprzednio pierwsze z nich przez m a drugie — przez M. Otrzymujemy

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})'' = \mathbf{x}'' - \mathbf{y}'' = -GmM\left(\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{M}\right)\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} = -\mu\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}, \quad \text{gdzie}$$

$\mu = GmM\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$.

Oznaczamy w dalszym ciągu: $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, zatem równanie przybiera postać $r'' = -\mu\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$. Zauważmy, że $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}')' = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}' + \mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \left[-\mu\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\right] = \mathbf{0}$, bo iloczyn wektorowy wektorów równoległych jest wektorem zerowym. Wykazaliśmy więc, że funkcja $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ jest stała na rozwiązaniach naszego układu, co oznacza, że jest całką pierwszą tego układu (fizycznie: moment pędu nie zmienia się w czasie). Poza tym, że możemy używać uczonych terminów wynika z tego, że ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do $\mathbf{r}\times\mathbf{r}'$ (zakładamy, że $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$, a co się dzieje, gdy $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$?). Możemy, bez straty ogólności rozważań założyć, że $\mathbf{r}\times\mathbf{r}'$ jest wektorem równoległym do $(0, 0, 1)$, ewentualna zmiana bazy w $\mathbb{R}^3$.

Przy okazji warto zauważyć, że długość wektora $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t+h)$ równa jest polu równoległoboku rozpiętego przez wektory $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t + h)$. Mamy

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t).$$

Wobec tego $\frac{1}{2}\|\mathbf{r}\times\mathbf{r}'\|$ to tzw. prędkość polowa. Udowodniliśmy więc drugie prawo Keplera, a nawet ciut więcej, bo w wektorowej wersji. Wiemy już też, że ruch odbywa się w płaszczyźnie, a to jest fragment pierwszego prawa Keplera, które niedługo też wykażemy.

Sprowadziliśmy zagadnienie przestrzenne do płaskiego. Nie zmieniamy oznaczeń. Mamy całkę pierwszą: moment pędu, czyli $\mathbf{r}\times\mathbf{r}'$. Należy spodziewać się co najmniej jeszcze jednej, mianowicie energii całkowitej. Mamy $\operatorname{grad}\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$. Rolę energii całkowitej powinna pełnić funkcja

$$\tfrac{1}{2}\|\mathbf{r}'\|^2 - \tfrac{\mu}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Sprawdzimy, że jest ona całką pierwszą układu, którym się zajmujemy. Różniczkujemy względem t:

$$\left(\tfrac{1}{2}\|\mathbf{r}'\|^2 - \tfrac{\mu}{\|\mathbf{r}\|}\right)' = \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' + \tfrac{\mu\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot\mathbf{r}' = \mathbf{r}'\left(\mathbf{r}'' + \tfrac{\mu\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\right) = 0.$$

Sprowadziliśmy rzecz do równania drugiego rzędu na płaszczyźnie, czyli do zagadnienia czterowymiarowego, ale mamy jeszcze dwie całki pierwsze, więc mamy poważne szanse obniżyć wymiar o dwa. Zrobimy, to ale najpierw przejdziemy do układu biegunowego, co w rozpatrywanym zagadnieniu jest bardzo naturalnym pomysłem.

Niech (r,θ) będą współrzędnymi biegunowymi. Wtedy zachodzą następujące trzy równości

$\mathbf{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$\mathbf{r}' = r'(\cos\theta,\sin\theta) + r\theta'(-\sin\theta,\cos\theta)$,

$\mathbf{r}'' = r''(\cos\theta,\sin\theta) + 2r'\theta'(-\sin\theta,\cos\theta) + r\theta''(-\sin\theta,\cos\theta) - r(\theta')^2(\cos\theta,\sin\theta)$.

Możemy więc napisać układ równań:

$$r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r(\theta')^2\cos\theta = -\tfrac{\mu\cos\theta}{r^2},$$
$$r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta + r\theta''\cos\theta - r(\theta')^2\sin\theta = -\tfrac{\mu\sin\theta}{r^2}.$$

Zapiszemy go w postaci normalnej, tzn. wyznaczymy z niego r'' i θ''. W tym celu mnożymy pierwsze równanie przez $\cos\theta$, drugie przez $\sin\theta$ i dodajemy stronami:

$$r'' - r(\theta')^2 = -\tfrac{\mu}{r^2}.$$

Teraz mnożymy drugie równanie przez $\cos\theta$ i odejmujemy od niego pierwsze pomnożone przez $\sin\theta$:

$$2r'\theta' + r\theta'' = 0.$$

Znalezione całki pierwsze we współrzędnych r,θ mają postać: $r^2\theta' := \alpha$ ($\frac{1}{2}\alpha$ to prędkość polowa) oraz $\frac{1}{2}\left[(r')^2 + r^2(\theta')^2\right] - \frac{\mu}{r} := E$ (energia całkowita, μ pełni tu rolę masy, układ nie jest przecież inercjalny, ale równanie wygląda tak jak w inercjalnym), α, E są stałymi oczywiście zależnymi od warunku początkowego.

Przypadek $\alpha = 0$ nie jest interesujący: albo $r = 0$ dla każdego t (fizycznie to bez sensu, bo wtedy nie ma ruchu), albo $\theta' = 0$, co oznacza, że $\theta = \text{const}$, więc w tym przypadku ciała poruszają się wzdłuż prostej (więc dojdzie do zderzenia).

Jeśli $\alpha \neq 0$, to $\theta' \neq 0$, a z tej nierówności wynika, że funkcja θ jest różnowartościowa. Pozwoli to nam wyeliminować z układu zmienną t. Otrzymamy więc równanie krzywej po której porusza się nasz punkt materialny. Mamy $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\theta' = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{\alpha}{r^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\alpha}{r}\right)$.

Z tego wzoru wynika, że $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\alpha}{r}\right)\right] \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{-\alpha}{r}\right) \cdot \theta' = \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{-\alpha}{r}\right) \cdot \frac{\alpha}{r^2}$. Możemy więc napisać równanie $r'' - r(\theta')^2 = -\frac{\mu}{r^2}$ w postaci $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{-\alpha}{r}\right) \cdot \frac{\alpha}{r^2} - r\left(\frac{\alpha}{r^2}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$ lub jeszcze prościej

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{\alpha^2}.$$

Otrzymaliśmy równanie liniowe, drugiego rzędu z niewiadomą funkcją $\frac{1}{r}$ zmiennej θ. Rozwiązanie tego równania ma postać $c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta + \frac{\mu}{\alpha^2}$, co można napisać w postaci $h\cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu}{\alpha^2}$. Otrzymaliśmy wzór $\frac{1}{r} = h\cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu}{\alpha^2}$, gdzie $h > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

◀ Teraz czas na ciekawostkę geometryczną (przypomnienie?). Niech $d > 0$, $\varepsilon > 0$. Będziemy rozważać zbiór złożony z punktów $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, dla których stosunek odległości $\mathbf{x}$ od początku układu współrzędnych $\mathbf{0}$ do odległości od prostej $x_1 = -d$ równy jest ε, to otrzymujemy:

elipsę, jeśli $0 < \varepsilon < 1$; parabolę, jeśli $\varepsilon = 1$; hiperbolę, jeśli $\varepsilon > 1$.

Prosta $x_1 = -d$ zwana jest kierownicą (ang. directrix) odpowiedniej krzywej stożkowej, punkt $\mathbf{0}$ — jej ogniskiem (ang. focus), ε —mimośrodem (ang. eccentricity).* Zauważmy, że równanie stożkowej wygląda tak:

$\frac{\|\mathbf{x}\|}{|x_1+d|} = \varepsilon$, czyli $x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2(x_1 + d)^2$ lub $(1 - \varepsilon^2)x_1^2 + x_2^2 - 2d\varepsilon^2 x_1 - d^2\varepsilon^2 = 0$.

Jeśli $\varepsilon \le 1$, to ponieważ $|x_1 + d| \ge \varepsilon|x_1 + d| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ i $d > 0$, więc $x_1 + d > 0$, więc wartość bezwzględną można opuścić. Jeśli $\varepsilon > 1$, to nie można, ale i tak opuścimy, co oznacza, że z dwu gałęzi hiperboli wybieramy jedną, tę „bliższą punktowi" $\mathbf{0} = (0, 0)$. Wobec tego od tej pory nasze równanie ma postać $\frac{\|\mathbf{x}\|}{x_1+d} = \varepsilon$, co w układzie współrzędnych biegunowych wygląda tak:

$$r = \varepsilon(d + r\cos\theta) \qquad \text{lub tak} \qquad r = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon\cos\theta}.$$

Jeśli $a > b$, to ogniskami elipsy $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ są punkty $(\mp\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ a odpowiadającymi i kierownicami proste $x_1 = \mp\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$, zachodzi też równość $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Na tym kończymy krótkie opowiadanie o stożkowych. ▶

Otrzymaliśmy poprzednio równanie $\frac{1}{r} = h\cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu}{\alpha^2}$. Możemy je przepisać w postaci

$$r = \frac{\alpha^2}{\mu + h\alpha^2\cos(\theta+\varphi)} = \frac{\frac{\alpha^2}{\mu}}{1 + \frac{h\alpha^2}{\mu}\cos(\theta+\varphi)}.$$

Widzimy więc, że ciało porusza się po stożkowej, w której ognisku znajduje się drugie ciało (pierwsze prawo Keplera): jeśli $\varepsilon = \frac{h\alpha^2}{\mu} < 1$, to tor ruchu jest elipsą, jeśli $\varepsilon = \frac{h\alpha^2}{\mu} = 1$, to — parabolą, jeśli $\varepsilon = \frac{h\alpha^2}{\mu} > 1$, to gałęzią hiperboli. Bez kłopotu możemy stwierdzić, że jeśli trajektorią ruchu jest elipsa, to jest on okresowy — idea: nie ma się gdzie zatrzymać, bo wszędzie „prędkość" jest niezerowa, a ponieważ poruszamy się po elipsie, która jest

* Więcej można o tym przeczytać w podręcznikach do geometrii analitycznej lub w bardzo pięknej książce D.Hilberta i S.Cohn-Vossena, Geometria poglądowa, z której można się dowiedzieć, dlaczego te krzywe nazywane są stożkowymi i powiązać ognisko i kierownicę ze stożkiem.

zbiorem zwartym, więc w końcu ją obejdziemy („prędkość" jest oddzielona od 0). Wielka półoś naszej elipsy równa jest

$$a = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\frac{\alpha^2}{\mu}}{1+\frac{h\alpha^2}{\mu}} + \frac{\frac{\alpha^2}{\mu}}{1-\frac{h\alpha^2}{\mu}} \right] = \frac{\alpha^2\mu}{\mu^2-h^2\alpha^4}.$$

Wobec tego kwadrat małej półosi równy jest:

$$b^2 = (1-\varepsilon^2)\big[\tfrac{\alpha^2\mu}{\mu^2-h^2\alpha^4}\big]^2 = \big[1 - \tfrac{h^2\alpha^4}{\mu^2}\big] \cdot \big[\tfrac{\alpha^2\mu}{\mu^2-h^2\alpha^4}\big]^2 = \tfrac{\alpha^4}{\mu^2-h^2\alpha^4}.$$

Wynika stąd, że pole elipsy równe jest $\pi ab = \pi\frac{\alpha^4\mu}{\sqrt{(\mu^2-h^2\alpha^4)^3}}$. Przypominamy, że $r^2\theta' = \alpha$ — ten warunek oznacza, że prędkość polowa jest stała i równa $\frac{1}{2}\alpha$, czyli w czasie t promień wodzący r zakreśla pole $\frac{1}{2}\alpha t$. Cała elipsa jest więc obiegana w czasie $T = 2\pi\frac{\alpha^3\mu}{\sqrt{(\mu^2-h^2\alpha^4)^3}}$. Mamy zatem $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3$. Przypomnijmy, że $\mu = GmM\big(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\big) = G(m+M)$. Przyjmując np. że M oznacza masę Słońca, a m masę jednej z planet naszego układu stwierdzamy, że kwadrat okresu obiegu planety wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu wielkiej półosi elipsy, po której porusza się wokół Słońca ta planeta. Przyjmujemy tak, choć z zasadzie to nieprawda, ale iloraz $\frac{m}{M}$ jest tak małą liczbą, że m w istocie rzeczy nie odgrywa tu istotnej roli. Jest to trzecie prawo Keplera, dwa inne pojawiły się w tekście już wcześniej.

Dodajmy jeszcze, że rezultat dotyczący kształtu orbit można przedstawić za pomocą wielkości fizycznych. Mam tu na myśli $\frac{1}{2}\alpha$ i E, czyli prędkość polową i energię całkowitą. Uzyskaliśmy wcześniej równości $r^2\theta' = \alpha$, $2E = (r')^2 + r^2(\theta')^2 - \frac{2\mu}{r}$ oraz $r' = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{\alpha}{r^2}$. Mamy $\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\big[\frac{\alpha^2}{\mu+h\alpha^2\cos(\theta+\varphi)}\big] = \frac{h\alpha^4\sin(\theta+\varphi)}{(\mu+h\alpha^2\cos(\theta+\varphi))^2} = hr^2\sin(\theta+\varphi)$. Wobec tego $2E = {}$ $=h^2r^4\sin^2(\theta+\varphi)\cdot\frac{\alpha^2}{r^4} + r^2\big(\frac{\alpha}{r^2}\big)^2 - \frac{2\mu}{r} = h^2\alpha^2\sin^2(\theta+\varphi) + \alpha^2\big[h\cos(\theta+\varphi) + \frac{\mu}{\alpha^2}\big]^2 -$ $-2\mu\big[h\cos(\theta+\varphi) + \frac{\mu}{\alpha^2}\big] = \alpha^2h^2 - \frac{\mu^2}{\alpha^2}$, więc $h = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{\alpha^2}}$, $\varepsilon = \frac{h\alpha^2}{\mu} = \sqrt{1+2E\frac{\alpha^2}{\mu^2}}$ i wreszcie $a = \frac{\alpha^2\mu}{\mu^2-h^2\alpha^4} = -\frac{\mu}{2E}$. Widać więc, że orbitą jest elipsa, gdy $E < 0$.

Przypomnieć wypada, że prawa Keplera były prawami empirycznymi. Autor sformułował je w oparciu o dane uzyskane (spisane prze innych astronomów, m.in. Tycho de Brahe). Teoria Newtona pozwala na wywnioskowanie ich z zasad dynamiki i prawa powszechnego ciążenia.