

Egzamin z analizy matematycznej I

2 czerwca 1995 - część zadaniowa

1. $f \in C^1[0, \infty)$, $f'(x) > \pi$ dla $x > 0$, $f(0) = -e$. Wykazać, że funkcja f ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(0, 1)$.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x jest:

$$e^x + \sin x \geq 1 + 2x - \frac{1}{6} x^3.$$

Dla jakich x zachodzi równość?

3. Dla jakich $n \geq 0$ całka $\int_0^{+\infty} x^n \cdot (3 + \cos x)^{-1} \cdot e^{-x} dx$ jest zbieżna?

4. Obliczyć
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x \cos(t^4) dt}{\frac{x^3}{\int_0^x \sin(t^2) dt}}$$

5. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+|x|}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$ oraz znaleźć wszystkie punkty różniczkowalności jego sumy.

EGZAMIN POPRAWKOWY Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Część druga: ZADANIA

1. Udowodnić, że dla każdej liczby $x \in (0, \pi/2)$ zachodzi nierówność $2 \sin x + \operatorname{tg} x > 3x$.
2. Zbadać, czy ciąg funkcji $f_n(x) = \frac{\ln(e^{-nx} + 1)}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.
3. Rozwinąć funkcję $f(x) = \arctg \frac{2x-1}{2x+1}$ w szereg potęgowy postaci $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$.
Dla jakich wartości x otrzymany wzór ma sens i jest prawdziwy?
4. Obliczyć długość wykresu funkcji $f(x) = \arcsin(e^{-nx})$ między punktami $(0, f(0))$ i $(1, f(1))$.
5. Zbadać, dla jakich wartości stałej rzeczywistej w całka niewłaściwa $\int_0^\infty (xe^x)^w dx$ ma wartość skończoną (tzn. jest zbieżna).

Uwaga:

Oceniane będą rozwiązania czterech zadań.

Rozwiązanie każdego zadania prosimy pisać na oddzielnym arkuszu papieru.

Korzystając z twierdzeń znanych z wykładu, ćwiczeń lub literatury należy

wyraźnie się na te twierdzenia powoływać.

(II) ZESTAW PYTAŃ NALEŻY PODPISAC I DOŁĄCZYĆ DO PRACY.

Pośród pytań C i C* należy wybrać jedno (jeśli poda Pan(i) odpowiedzi na oba, tylko jedna będzie punktowana); proszę zwrócić uwagę, że jedynie wybierając C* można uzyskać ilość punktów wystarczającą na ocenę bardzo dobrą. Oceniana będzie poprawność i kompletność odpowiedzi, oraz sposób w jaki została zredagowana.

PUNKTACJA : A: A,B,C - po 8p. B - 24p. C - 36p. C* - 52p.

A. (A) Podać definicję kresu górnego $\sup A$ i kresu dolnego $\inf A$ ograniczonego zbioru A liczb rzeczywistych.

(B) Sformułować regułę L'Hospitala (nie opisywać wszystkich przypadków). Czy regułę L'Hopitala można zastosować do znalezienia granicy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}}{\sin x}$? Odpowiedź uzasadnić.

(C) Podać definicję zbieżności punktowej i jednostajnej ciągów funkcyjnych $(f_n)_n$, gdzie $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$.

B. Sformułować twierdzenie o całkowaniu i różniczkowaniu szeregów potęgowych. Sformułować twierdzenie Abela o szeregach potęgowych zbieżnych w końcu przedziału zbieżności.

Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję $\arctan(x)$ i uzasadnić formułę $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

C. Podać definicję funkcji całkowalnych w sensie Riemanna i wykazać, że funkcje monotoniczne na przedziale skończonym są całkowalne w sensie Riemanna.

Sformułować i udowodnić podstawowe twierdzenie analizy matematycznej - formułę Newtona-Leibniza.

C*. Udowodnić, że funkcje ciągłe na przedziale domkniętym $[a,b]$ są jednostajnie ciągłe.

Wykazać, że funkcje ciągłe na $[a,b]$ są na tym przedziale całkowalne w sensie Riemanna.

3 : A - 10p., B - 10p., C - 15p. 4 : 20 p.

1. (A) Niech $f(x) = \frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$, dla $x > 0$.

Wykazać, że funkcja f maleje i znaleźć $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(B) Wykazać, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{2+x} > \frac{1}{4}.$$

2. Wyjaśnić, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n - \ln(n)}$ jest rozbieżny, zbieżny warunkowo, czy też jest zbieżny bezwzględnie? Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$, $n = 2, 3, \dots$

(A) Wykazać, że szereg funkcyjny $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a, +\infty)$, gdzie $a > 0$.

(B) Wykazać, że dla każdego $n \geq 2$ istnieje $m > n$ takie, że

$$\int_0^1 (f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)) dx > 1.$$

(C) Czy szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny na przedziale $(0, 1]$? Odpowiedź uzasadnić.

4. Wykazać, że dla $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\left(\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)^2 < 2 \cdot \int_0^x \sin\left(\frac{t}{1+t}\right) dt.$$

WSKAZÓWKA: Porównać pochodne funkcji po obu stronach nierówności.

EGZAMIN Z ANALIZY I (1), 5.VI.95

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na osobnych kartkach. Odpowiedzi należy uzasadnić.

Punktacja : 1 - 15p. 2 - 20p. 3 - 20p. 4 - 25p. 5 - 20p.

1. Niech $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną formułą

$$f_c(x) = \begin{cases} \sqrt{x - \ln(1+x)} & , \text{ dla } x \geq 0, \\ \frac{1 - \cos(cx)}{x} & , \text{ dla } x < 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć liczby c , dla których funkcja f_c jest różniczkowalna.

2. (A) Wykazać, że funkcja $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$, gdzie $x \geq 1$, jest wypukła.

- (B) Wykazać, że dla $s, t \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\ln\left(\frac{2}{e^{s-1} + e^{t-1}}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1-s}{1+s} + \frac{1-t}{1+t} \right) \cdot \ln\left(\frac{e^{s+1} + e^{t+1}}{2}\right).$$

3. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n \cdot 2^n} x^n$$

i zbadać zbieżność tego szeregu w każdym z końców jego przedziału zbieżności.

4. Niech $f_n(x) = \frac{1}{n(nx + \ln(n))}$, gdzie $x > 0$.

- (A) Wykazać, że dla $\delta > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[\delta, +\infty)$.

- (B) Wykazać, że dla każdego n istnieje $m > n$ takie, że

$$f_n\left(\frac{1}{m}\right) + f_{n+1}\left(\frac{1}{m}\right) + \dots + f_m\left(\frac{1}{m}\right) \geq 1.$$

Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $(0, +\infty)$?

Odpowiedź należy dokładnie uzasadnić.

5. Niech $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o okresie 1, tzn. $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, dla $x \in \mathbb{R}$.

- (A) Wykazać, że dla $a < b$,

$$\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b \varphi(nx) dx = (b-a) \cdot \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

- (B) Wykazać, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ całkownej w sensie Riemanna,

$$\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b f(x) \cdot \varphi(nx) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

EGZAMIN POPRAWKOWY Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Część pierwsza: TEORIA (TEST)

Imię, Nazwisko:

Grupa (nazwisko osoby
prowadzącej ćwiczenia):

W każdą ramkę
należy wpisać:
tak lub: nie

Punktacja: — trzy odpowiedzi poprawne $\mapsto$ 1 punkt
— dwie odpowiedzi poprawne, jedna ramka pusta $\mapsto$ 2/3 punktu
— dwie odpowiedzi poprawne, jedna błędna $\mapsto$ 1/3 punktu
— mniej niż dwie odpowiedzi poprawne $\mapsto$ 0 punktów

Funkcja f , $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbf{R}$, jest przedstawialna wzorem Taylora $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_n(x)$; reszta $R_n(x)$, zapisana w postaci Lagrange'a, jest dana jednym z następujących wzorów; którym? (ξ oznacza punkt leżący między x_0 a x .)

- $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \dots \dots \dots$
- $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(\xi-x_0)^{n+1} \dots \dots \dots$
- $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-\xi)^{n+1} \dots \dots \dots$

Rozważamy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x + 5}$. Niech A będzie zbiorem jego punktów zbieżności (to znaczy, zbiorem tych liczb rzeczywistych x , dla których szereg jest zbieżny). Czy są prawdziwe następujące zdania?

- $A = (0, \infty)$
- $A = (1, \infty)$
- $A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Rozważamy szereg funkcyjny $f_1 + f_2 + f_3 + \dots$, którego składniki f_n są funkcjami określonymi na tym samym przedziale (a, b) . Zakładamy, że jest spełniony warunek:

dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje numer k (zależny od ε) taki, że:
 $(x \in (a, b) \wedge n > k) \Rightarrow |f_k(x) + f_{k+1}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$.

Niech $g_n = f_1 + \dots + f_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Czy z podanych założeń wynikają następujące stwierdzenia?

- Istnieje funkcja $g: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$
- Istnieje funkcja $g: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ taka, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in (a, b)} |g_n(x) - g(x)| \right) = 0$
- Szereg funkcyjny $f_1 + f_2 + f_3 + \dots$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale (a, b)

Rozważamy szereg potęgowy postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Czy są prawdziwe następujące zdania?

- Jeśli szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla $x = -3$,
to jest również zbieżny bezwzględnie dla $x = 3$
- Jeśli szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla $x = -3$,
to jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[-2, 2]$
- Jeśli szereg ten jest zbieżny (niekoniecznie bezwzględnie) w punkcie $x = -3$,
to jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[-2, 2]$

Rozważamy liczby $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ oraz $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$. Czy są prawdziwe następujące zdania?

- $\beta < 2$
- $\beta > 2$
- β jest liczbą wymierną

Dana jest liczba $a \in [-1, 1]$. Rozważamy liczby:

$$b = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \dots, \quad c = 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots, \quad d = b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots$$

Czy są prawdziwe następujące zdania?

- Różnica $ac - d$ jest dodatnia, gdy $a > 0$, a ujemna, gdy $a < 0$ ☐
- Różnica $ac - d$ jest dodatnia, gdy $a < 0$, a ujemna, gdy $a > 0$ ☐
- Różnica $ac - d$ jest dodatnia dla każdej liczby $a \neq 0$ z przedziału $[-1, 1]$ ☐

Dany jest przedział (a, b) ($-\infty < a < b < \infty$), funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ oraz ciąg funkcji $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Rozważamy warunki:

- (1) dla każdej liczby $x \in (a, b)$ ciąg wartości $(f_n(x))$ jest zbieżny do liczby $f(x)$;
- (2) ciąg funkcyjny $f_1, f_2, f_3, \dots$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale (a, b) do funkcji f ;
- (3) wszystkie funkcje f_n są ciągłe; (4) funkcja f jest ciągła;
- (5) wszystkie funkcje f_n są różniczkowalne; (6) funkcja f jest różniczkowalna.

Czy zachodzą następujące implikacje?

- $[(1) \wedge (3)] \Rightarrow (4)$ ☐
- $[(2) \wedge (3)] \Rightarrow (4)$ ☐
- $[(2) \wedge (5)] \Rightarrow (6)$ ☐

W dalszym ciągu rozważamy sytuację z poprzedniego pytania: warunki (1), (2), (3) oraz – dodatkowo – warunki:

- (7) wszystkie funkcje f_n mają całkę Riemanna; (8) funkcja f ma całkę Riemanna.

Czy zachodzą następujące implikacje?

- $[(1) \wedge (7)] \Rightarrow (8)$ ☐
- $[(2) \wedge (7)] \Rightarrow (8)$ ☐
- $[(2) \wedge (3)] \Rightarrow (8)$ ☐

Nadal rozważamy sytuację z dwóch poprzednich pytań: warunki (1), (2), (3) oraz – dodatkowo – warunki:

- (9) wszystkie funkcje f_n mają funkcje pierwotne; (10) funkcja f ma funkcję pierwotną.

Czy zachodzą następujące implikacje?

- $[(1) \wedge (9)] \Rightarrow (10)$ ☐
- $[(2) \wedge (9)] \Rightarrow (10)$ ☐
- $[(2) \wedge (3)] \Rightarrow (10)$ ☐

Dana jest funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ($-\infty < a < b < \infty$). Czy są prawdziwe następujące zdania?

- Jeżeli funkcja f ma skończone granice jednostronne w każdym punkcie przedziału $[a, b]$, to ma na tym przedziale całkę Riemanna ☐
- Jeżeli funkcja f ma na przedziale $[a, b]$ funkcję pierwotną, to ma na nim całkę Riemanna ☐
- Jeżeli f jest funkcją niemalejącą na przedziale $[a, b]$, to ma na nim całkę Riemanna ☐

Funkcja $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ jest całkowna w sensie Riemanna na każdym przedziale domkniętym, zawartym w przedziale $[0, \infty)$. Niech $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ dla $x \in [0, \infty)$. Czy są prawdziwe następujące zdania?

- Jeżeli funkcja f jest ciągła, to funkcja F też jest ciągła ☐
- Funkcja F jest ciągła (bez żadnych dodatkowych założeń o funkcji f) ☐
- Jeżeli funkcja f jest ciągła, to funkcja F jest różniczkowalna ☐

Czy następujące całki niewłaściwe są zbieżne?

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$ ☐
- $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ ☐
- $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3} + x^5}$ ☐

EGZAMIN POPRAWKOWY Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Część pierwsza: TEORIA (TEST)

Imię, Nazwisko:

Grupa (nazwisko osoby
prowadzącej ćwiczenia):W każdą ramkę
należy wpisać:
tak lub: nie

Punktacja: — trzy odpowiedzi poprawne $\mapsto$ 1 punkt
 — dwie odpowiedzi poprawne, jedna ramka pusta $\mapsto$ 2/3 punktu
 — dwie odpowiedzi poprawne, jedna błędna $\mapsto$ 1/3 punktu
 — mniej niż dwie odpowiedzi poprawne $\mapsto$ 0 punktów

Funkcja f , czterokrotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz spełniająca warunki $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 4$, $f''(x_0) = 5$, $f'''(x_0) = 6$, $f^{(4)}(x_0) = 7$, jest w tym otoczeniu przedstawialna wzorem Taylora $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + R(x)$.

Czy zachodzą następujące równości?

- $a_2 = 5$
- $a_3 = 1$
- $R(x) = \frac{7}{24}(x - x_0)^4$

Rozważamy szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2001}{11 + 9n^{x+1}}$. Niech J będzie zbiorem jego punktów zbieżności (to znaczy, zbiorem tych liczb rzeczywistych x , dla których szereg jest zbieżny).

Czy są prawdziwe następujące równości?

- $J = [0, \infty)$
- $J = (0, \infty)$
- $J = (1, \infty)$

Dla każdej z określonych niżej funkcji orzec, czy istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do tej funkcji na przedziale $[-1, 1]$:

- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny dla $x = x_0 - 2$. Czy stąd wynikają następujące nierówności?

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 2$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 2$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/2$

Imię, Nazwisko:

Grupa (nazwisko osoby
prowadzącej ćwiczenia):

W każdą ramkę

należy wpisać:

tak lub: nie

Punktacja: — trzy odpowiedzi poprawne $\mapsto$ 1 punkt— dwie odpowiedzi poprawne, jedna ramka pusta $\mapsto$ 2/3 punktu— dwie odpowiedzi poprawne, jedna błędna $\mapsto$ 1/3 punktu— mniej niż dwie odpowiedzi poprawne $\mapsto$ 0 punktów

Niech A będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, ograniczonym z góry. Które z następujących zdań są prawdziwe dla każdego takiego zbioru?

- W zbiorze A istnieje liczba największa
- Wśród liczb ograniczających zbiór A z góry istnieje liczba najmniejsza
- Może nie istnieć żadna z liczb, o których mowa w poprzednich podpunktach

Rozważamy ciąg (a_n) o wyrazach $a_n = \frac{n^4 5^n}{6^n}$. Czy prawdziwe są następujące zdania?

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- W ciągu (a_n) istnieje wyraz największy
- Istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $a_n > \delta$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Ciąg (x_n) , o wyrazach rzeczywistych $x_n \neq 0$, dąży do zera. Czy następujące ciągi mają skończone granice?

- Ciąg o wyrazach $a_n = \sqrt{x_n} \cdot \ln |x_n|$
- Ciąg o wyrazach $b_n = \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n}$
- Ciąg o wyrazach $c_n = \frac{x_n^2}{\operatorname{tg} |x_n|}$

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych (a_n) . Rozważamy warunki:

- (1) ciąg (a_n) ma skończoną granicę;
- (2) ciąg (a_n) ma granicę, skończoną lub nie;
- (3) dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje numer k (zależny od ε) taki, że: $(m, n > k \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$.

Czy zachodzą następujące implikacje?

- (1) $\Rightarrow$ (3)
- (2) $\Rightarrow$ (3)
- (3) $\Rightarrow$ (1)

O każdym z określonych poniżej zbiorów orzec, czy może on być zbiorem wartości pewnej funkcji ciągłej, której dziedziną jest przedział $[0, 1]$.

- Zbiór $[-2, -1] \cup [1, 2]$
- Przedział $(-1, 3]$
- Zbiór $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$

Rozważamy funkcję f określoną na przedziale $[0, 3]$ wzorem: $f(x) = \ln |\ln(5 + \sin x) + \sqrt{3 - x}|$.

Czy prawdziwe są następujące zdania?

- Funkcja f jest jednostajnie ciągła na przedziale $[0, 3]$ ☐
- Istnieje taka liczba $x_0 \in [0, 3]$, że zbiór wartości przyjmowanych przez funkcję f na przedziale $[0, 3]$ jest zawarty w przedziale $[0, f(x_0)]$ ☐
- Istnieje taka liczba $a > 0$, że $f(x) > a$ dla wszystkich $x \in [0, 3]$ ☐

Dla każdej z wymienionych niżej funkcji rozstrzygnąć, czy nierówność $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) < \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ zachodzi dla każdej trójki różnych liczb $x, y, z > 0$.

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ☐
- $f(x) = 2 \ln x$ ☐
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ☐

Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ma w punkcie 0 wartość 0 i pochodną dodatnią, skończoną: $f(0) = 0$ oraz $0 < f'(0) < \infty$.

Czy stąd wynikają następujące stwierdzenia?

- Funkcja f ma wartości dodatnie w przedziale postaci $(0, \delta)$, dla pewnej liczby $\delta > 0$ ☐
- Funkcja f jest ciągła w punkcie 0 ☐
- Istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ☐

Dana jest funkcja $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, dwukrotnie różniczkowalna; x_0 jest punktem wewnętrznym przedziału I . Zakładamy, że $f'(x_0) = 0$. Czy zachodzą następujące implikacje?

- $(f''(x_0) > 0) \implies$ (funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne) ☐
- $(f''(x_0) > 0) \implies$ (funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne) ☐
- $(f''(x_0) = 0) \implies$ (x_0 jest dla funkcji f punktem przegięcia) ☐

Funkcja f , $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbf{R}$, jest przedstawialna wzorem Taylora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x);$$

reszta $R_n(x)$, zapisana w postaci Lagrange'a, jest dana jednym z następujących wzorów; którym? (ξ oznacza punkt leżący między x_0 a x .)

- $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$ ☐
- $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(\xi - x_0)^{n+1}$ ☐
- $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x - \xi)^{n+1}$ ☐

1. Obliczyć długość łuku wykresu funkcji $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ zawartego między punktami $(1, f(1))$ i $(2, f(2))$.
2. Dany jest ciąg funkcji $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(e^{nx} + e^x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
 - (a) Dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$ obliczyć granicę $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
 - (b) Zbadać, czy ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f na przedziale $[-1, 1]$.
3. Rozważamy szereg potęgowy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$.
 - (a) Wyznaczyć jego przedział zbieżności J .
 - (b) Obliczyć sumę tego szeregu (tzn. wyrazić ją wzorem jako funkcję zmiennej $x \in J$).
4. Funkcja g jest dana wzorem: $g(x) = \int_{-0,5}^x \frac{\sin t^2}{1-t^2} dt$. Obliczyć $g^{(9)}(0)$.
5. Zbadać, dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha + \sqrt{x}}$ jest zbieżna.

Uwaga. Rozwiązanie każdego zadania prosimy pisać na oddzielnym arkuszu papieru!!

1. Dla każdej liczby $c > 0$ obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazach $a_n = \sqrt[n]{c^n + (c + \frac{1}{2})^{-n}} + 1$.
2. Zbadać, czy funkcja $f(x) = \cos(e^x)$ jest jednostajnie ciągła:
(a) na przedziale $(-\infty, 0]$;
(b) na przedziale $[0, \infty)$.
3. Obliczyć kresy funkcji $f(x) = (\frac{\pi}{2} - x) \operatorname{tg} x$ na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$.
4. Zbadać, czy ciąg funkcji $f_n(x) = \frac{nx}{(x+1)^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[0, \infty)$.
5. Rozwinąć funkcję $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-2}{x+2}$ w szereg potęgowy wokół zera i ustalić, na jakim przedziale słuszny jest otrzymany wzór.
6. (a) Zbadać, dla jakich wartości parametru $\alpha > 0$ całka niewłaściwa $\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\alpha dx$ jest zbieżna.
(b) Obliczyć jej wartość, gdy $\alpha = 2$.

Uwaga. Rozwiązanie każdego zadania prosimy pisać na oddzielnym arkuszu papieru!!

Egzamin poprawkowy z analizy I
część teoretyczna
8 września 1995 r

W kratkę należy wpisać T (tak) lub N (nie). Odpowiedź negatywną należy krótko uzasadnić na dodatkowej kartce. Uzasadnieniem może być przykład, wykres funkcji z wyraźną sugestią dokładnego wyglądu itp.

1. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to
 - (i) szereg $\sum |a_n|/(1+|a_n|)$ jest zbieżny ☐
 - (ii) szereg $\sin|a_n|$ jest zbieżny ☐
 - (iii) $\lim(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}) = 0$ ☐
2. Jeśli $\lim(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}) = 0$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny ☐
3. Jeśli $\sum |a_n| < \infty$, to szereg $\sum a_n(1+a_n)^{-1}$ jest zbieżny. ☐
4. Jeśli funkcja $f \circ f$ jest ciągła, to funkcja f jest ciągła. ☐
5. Jeśli funkcja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i nie jest stała, to przeciwobrazy zbiorów jedno punktowych są skończone. ☐
6. Jeśli funkcja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to jest ciągła ☐
7. Jeśli lewostronna pochodna f'_- istnieje i jest skończona w każdym punkcie przedziału $[a,b)$, f jest ciągła na $[a,b]$, to istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $f'_-(c) = 0$. ☐
8. $A \subseteq \mathbb{R}$ jest takim zbiorem, że każda funkcja ciągła $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Wynika stąd, że
 - (a) każda funkcja ciągła określona na A jest ograniczona ☐
 - (b) zbiór A jest przedziałem ☐
 - (c) każda funkcja ciągła określona na A ma wartość najmniejszą ☐
 - (d) każda funkcja ciągła określona na A ma własność Darboux ☐
9. Jeśli $\lim a_n = \infty = \lim b_n$ i istnieje $\lim (a_n/b_n)$, to $\lim(a_{n+1}-a_n)/(b_{n+1}-b_n) = \infty$. ☐
10. Jeśli f jest wypukła na (a,b) , to jest ciągła. ☐
11. Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem, f rosnącą funkcją różniczkowalną na A , to pochodna funkcji f jest dodatnia. ☐
12. Jeśli f jest funkcją klasy C^∞ na $\mathbb{R}$, $f'(0)=0$ i $f^{(n)}(0) \geq 0$ dla $n=2,3,\dots$, to f ma w punkcie 0 lokalne minimum ☐

13. Jeśli $f(x) = \sum a_n x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$ i f ma w punkcie 0 lokalne minimum właściwe, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f^{(n)}(0) > 0$. ☐
14. Jeśli całki $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ i $\int_0^{\infty} |g(x)| dx$ są zbieżne, to również całka $\int_0^{\infty} f(x)g(x) dx$ jest zbieżna. ☐
15. Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ jest R-całkowalna na $[a, b]$, to również funkcja $\frac{1}{f}$ jest R-całkowalna na $[a, b]$. ☐
16. Jeśli $|f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|^2$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y oraz $f(0) = f(1) = 0$, to $|f(0,5)| < 2$. ☐
17. Jeśli f jest R-całkowalna na przedziale domkniętym, to jest ograniczona i zbiór jej punktów nieciągłości jest skończony lub przeliczalny. ☐
18. Jeśli $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ i ciąg (f'_n) jest jednostajnie zbieżny oraz $f_n(0) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to granica $\lim f_n$ też jest funkcją klasy C^1 . ☐
19. Jeśli $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i dodatnią, to szereg $\sum f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^{\infty} f(x) dx < +\infty$. ☐
20. Niech $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Niech $r_n(x, h)$ oznacza wartość n -tej reszty Taylora obliczoną w punkcie x dla przyrostu h . Wtedy
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x, h) = 0$. ☐
 - (b) $\lim_{h \rightarrow 0} r_n(x, h)$ istnieje dla każdego $h \neq 0$ ☐
 - (c) $n! r_n(x, h) = h^n \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x+th) dt$ ☐
 - (d) $(n+1)! r_n(x, h) = h^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x+th) dt$ ☐
 - (e) $(n+1)! r_n(x, h) = h^{n+1} f^{(n+1)}(x + t_{h,n} h)$ dla pewnej liczby dodatniej $t_{h,n} < 1$ ☐