

Analiza Matematyczna I.1, kolokwium, 22 listopada 2013, 16:15 — 19:15

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Zadanie 0. Podać definicję kresu dolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$.

Zadanie 1. Dane liczby dodatnie $a < b < c$. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a^n + b^n + c^n)}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg (a_n) . Jego podciąg (a_{2^n}) jest zbieżny do pewnej skończonej granicy g . Ciąg $(|a_{n+1} - a_n|)$ jest zbieżny do zera. Czy wynika stąd zbieżność ciągu (a_n) ?

Zadanie 3. Znaleźć kresy zbioru A , jeśli

$$A = \left\{ \frac{2013n + k}{n + 2013k} : n, k \in \mathbb{Z}, n, k \geq 10000 \right\}.$$

Zadanie 4. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Wykazać, że ciąg (a_n) ma granicę, a następnie znaleźć ją.

Zadanie 5. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n} \right) \ln \frac{2n+1}{2n}$.

Zadanie* 6. (szansa na dodatkowe punkty.)

Niech $a \geq -1$ będzie liczbą rzeczywistą. Ciąg (a_n) jest zdefiniowany wzorami: $a_0 = a$ oraz $a_n = \sqrt{2^{n+1}a_{n-1} + 4^n} - 2^n$, dla $n = 1, 2, \dots$

Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
