

0. a. Podać definicję skończonej granicy ciągu liczbowego.

Rozstrzygnąć, które z poniższych implikacji są prawdziwe:

- b. Jeśli ciąg $(|a_n|)$ ma granicę skończoną i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to ciąg $(|a_n + b_n|)$ ma granicę skończoną.

- c. Jeśli ciągi $(|a_n|)$ i (b_n) mają granice skończone, to ciąg $(|a_n + b_n|)$ ma granicę skończoną.

Rozwiązanie.

- a. Liczba g jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba n_ε , że dla każdej liczby naturalnej $n > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

- b. Z nierówności trójkąta wynika, że

$$|a_n| - |b_n| \leq |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Niech $A = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| + |b_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| + \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = A + 0 = A$, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (było na wykładzie, zresztą to akurat stwierdzenie wynika

natychmiast z definicji granicy). Analogicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| - |b_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| - \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = A - 0 = A$.

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika od razu, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + b_n| = A$. Wobec tego implikacja z punktu b. jest prawdziwa.

- c. Twierdzenie sformułowane w punkcie c. jest nieprawdziwe. Wystarczy przyjąć $a_n = (-1)^n$ i $b_n = 1$. Wtedy ciągi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ mają granice równe 1, bo są to ciągi stałe o wyrazie 1. Natomiast ciąg $(|a_n + b_n|)$ granicy nie ma, bo jego wyrazy odpowiadające parzystym numerom n są równe 2, a nieparzystym — 0.

1. Obliczyć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie.

Oczywiście $\frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} > 0$ dla dowolnych liczb naturalnych m, n . Wobec tego

$$\inf \left\{ \frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \geq 0.$$

Tym kresem jest liczba 0, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1+n}}{2^n + 2^{2^2} + 2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \frac{2}{2^{-n} + 4 \cdot 2^{-2n} + 1} = 0$. Zachodzi nie-

równość $\frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} < \frac{2^{m+n}}{2^{2m} + 2^{2n}} \leq \frac{1}{2}$, bo $2^{2m} + 2^{2n} - 2 \cdot 2^{m+n} = (2^m - 2^n)^2 \geq 0$. Stąd wynika, że

$$\sup \left\{ \frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \leq \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+n}}{2^n + 2^{2n} + 2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-n} + 1 + 1} = \frac{1}{2}$, więc

$$\sup \left\{ \frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} : m, n \in \mathbb{N} \right\} = \frac{1}{2}.$$

2. Niech a_1 oznacza liczbę dodatnią. Niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Znaleźć granicę ciągu (a_n) lub wykazać, że ten ciąg granicy nie ma.

Rozwiązanie.

Mamy: $1 - a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}(1 + a_n) = \frac{1}{2}(1 - a_n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wobec tego $1 - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(1 - a_1)$. Stąd wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = (1 - a_1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

3. Niech $a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2$ oraz $b_n = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Udowodnić, że każdy z tych ciągów jest monotoniczny.

Znaleźć granicę ciągu (a_n) oraz granicę ciągu (b_n) .

Rozwiązanie.

Mamy: $n\sqrt{n^2 + 1} - n^2 = n(\sqrt{n^2 + 1} - n) = n \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$. Jasne jest, że

mianownik $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1$ maleje ze wzrostem n , więc ciąg o wyrazie $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2 = a_n$

jest ściśle rosnący. Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$ — zastosowaliśmy twierdzenia o granicy sumy, o granicy pierwiastka kwadratowego z ciągu zbieżnego oraz o granicy ilorazu.

Podobnie: $n^2 - n\sqrt{n^2 - 1} = n(n - \sqrt{n^2 - 1}) = n \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$. Jasne jest, że

mianownik $1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ rośnie ze wzrostem n , więc ciąg o wyrazie $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1} = b_n$

jest ściśle malejący. Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} = \frac{1}{2}$ — zastosowaliśmy twierdzenia o granicy sumy, o granicy pierwiastka kwadratowego z ciągu zbieżnego oraz o granicy ilorazu.

4. Obliczyć granicę w zależności od parametru $b > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^{2n} + (2b)^{-n} + 1}.$$

Dla jakich liczb $b > 0$ granica ta jest:

- (i) mniejsza od 1, (ii) dla jakich jest równa 1, (iii) dla jakich jest od 1 większa?

Rozwiązanie.

Założmy, że x jest największą z liczb dodatnich x, y, z czyli, że zachodzą nierówności $x \geq y$ i $x \geq z$.

Wtedy $x = \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} \leq \sqrt[n]{3x^n} = x \sqrt[n]{3}$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$, więc z twierdzenia

o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = x$. Stąd wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^{2n} + (2b)^{-n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^{2n} + \left(\frac{1}{2b}\right)^n + 1^n} = \max\left(b^2, \frac{1}{2b}, 1\right).$$

Jeśli $b \geq 1$, to $\frac{1}{2b} \leq \frac{1}{2} < 1 \leq b$, więc $\max\left(b^2, \frac{1}{2b}, 1\right) = b^2$. Jeśli $1 > b \geq \frac{1}{2}$, to $\frac{1}{2b} \leq 1$, więc $\max\left(b^2, \frac{1}{2b}, 1\right) = 1$. Jeśli natomiast $b < \frac{1}{2}$, to $\frac{1}{2b} > 1$, więc $\max\left(b^2, \frac{1}{2b}, 1\right) = \frac{1}{2b}$. Wynika stąd, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^{2n} + (2b)^{-n} + 1} = \begin{cases} b^2, & \text{gdy } b \geq 1, \\ 1, & \text{gdy } 1 > b \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2b}, & \text{gdy } \frac{1}{2} > b > 0. \end{cases}$$

5. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B > 0$ oraz, że wszystkie wyrazy obu ciągów (a_n) i (b_n) są dodatnie. Rozstrzygnąć, czy istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1 b_n} + \frac{1}{a_2 b_{n-1}} + \frac{1}{a_3 b_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} b_2} + \frac{1}{a_n b_1}}.$$

Jeśli istnieje, obliczyć ją.

Rozwiązanie pierwsze, z pracy pana Szymona Kubiciusa

Udowodnimy najpierw, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ zachodzi nierówność $|\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2}$, zwana nierównością Buniakowskiego-Cauchy'ego-Schwarza, a często po prostu Schwarza.

Mamy $0 \leq \sum_{i=1}^n (\alpha_i t + \beta_i)^2 = t^2 (\sum_{i=1}^n \alpha_i^2) + 2t \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \sum_{i=1}^n \beta_i^2$ dla każdej liczby rzeczywistej t . Jeśli $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 0$, to $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, więc dowodzona nierówność przyjmuje postać $0 \leq 0$, jest więc spełniona. Jeśli $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$, to mamy do czynienia z trójmianem kwadratowym zmiennej t przyjmującym jedynie nieujemne wartości. Wyróżnik tego wielomianu jest więc niedodatni, czyli

$$0 \geq \Delta = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2\right), \text{ czyli}$$

$$(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2),$$

po obu stronach spierwiastkowaniu otrzymujemy dowodzoną nierówność.*

Z nierówności Schwarza otrzymujemy:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1 b_n} + \frac{1}{a_2 b_{n-1}} + \frac{1}{a_3 b_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} b_2} + \frac{1}{a_n b_1}} \geq \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{b_n^2} + \frac{1}{b_{n-1}^2} + \dots + \frac{1}{b_1^2}}}.$$

Z twierdzenia Stolz'a wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{1}{A^2}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_n^2}\right) = \frac{1}{B^2}$.

Wobec tego zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{b_n^2} + \frac{1}{b_{n-1}^2} + \dots + \frac{1}{b_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{A^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{B^2}}} = AB.$$

Z nierówności między średnią harmoniczną i geometryczną wynika, że

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1 b_n} + \frac{1}{a_2 b_{n-1}} + \frac{1}{a_3 b_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} b_2} + \frac{1}{a_n b_1}} \leq \sqrt[n]{a_1 b_n a_2 b_{n-1} \dots a_n b_1}.$$

* Dla $n=3$ (i dla $n=2$) nierówność można interpretować geometrycznie: iloczyn skalarny wektorów $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ i $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ jest nie większy od iloczynu ich długości, czyli że wartość bezwzględna kosinusa kąta między tymi wektorami jest nie większa od 1.

Mamy więc $\sqrt[n]{a_1 b_n a_2 b_{n-1} \cdots a_n b_1} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}$. Ponieważ zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$ (można dla jej dowodu zlogarytmować liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, a potem zastosować twierdzenie Stolza) oraz równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = B$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1 b_n} + \frac{1}{a_2 b_{n-1}} + \frac{1}{a_3 b_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} b_2} + \frac{1}{a_n b_1}} = AB.$$

Dodajmy jeszcze, że w tym rozumowaniu nie jest istotne, czy np. $A < +\infty$, czy też $A = \infty$.

Ponieważ podane rozwiązanie wymaga znajomości nierówności Schwarza i sprytnego jej zastosowania, więc pokażemy teraz, jak można rozwiązać zadanie bez tego aparatu.

Rozwiązanie drugie

Niech $x_i = \frac{1}{a_i}$ oraz $b_i = \frac{1}{b_i}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Niech $X = \frac{1}{A}$, $Y = \frac{1}{B}$. Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ są dodatnie. Jeśli $A = \infty$, to $X = 0$, a jeśli $B = \infty$, to $Y = 0$. W innych przypadkach X, Y to liczby dodatnie. Wystarczy udowodnić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1) = XY$.

Oczywiście $X, Y < \infty$.

Ponieważ ciągi (x_n) i (y_n) mają skończone granice, więc są ograniczone, co oznacza, że istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdej liczby naturalnej n spełnione są nierówności: $x_n < M$ i $y_n < M$.

Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba n_1 , że jeśli $n > p$, to $|x_n - X| < \frac{\varepsilon}{10M}$ i $|y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{10M}$. Jeśli $i, j > p$, to $|x_i y_j - XY| = |x_i y_j - X y_j + X y_j - XY| \leq |x_i - X| \cdot y_j + X \cdot |y_j - Y| < \frac{2\varepsilon}{10M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{5}$. Bez założenia $i, j > p$ możemy napisać, że $|x_i y_j - XY| < M^2$. Załóżmy teraz, że $n > 2p$. Wtedy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \left(\underbrace{(x_1 y_n + \dots + x_p y_{n+1-p})}_{p \text{ składników}} + \underbrace{(x_{p+1} y_{n-p} + \dots + x_{n-p} y_{p+1})}_{n-2p \text{ składników}} + \underbrace{(x_{n-p+1} y_{p+1} + \dots + x_n y_1)}_{p \text{ składników}} \right) - XY \right| \leq \\ & \leq \underbrace{\frac{1}{n} |x_1 y_n - XY| + \dots + \frac{1}{n} |x_p y_{n+1-p} - XY|}_{p \text{ składników}} + \underbrace{\frac{1}{n} |x_{p+1} y_{n-p} - XY| + \dots + \frac{1}{n} |x_{n-p} y_{p+1} - XY|}_{n-2p \text{ składników}} \\ & \quad + \underbrace{\frac{1}{n} |x_{n-p+1} y_{p+1} - XY| + \dots + \frac{1}{n} |x_n y_1 - XY|}_{p \text{ składników}} < \frac{p}{n} \cdot M^2 + \frac{n-2p}{n} \frac{\varepsilon}{5} + \frac{p}{n} \cdot M^2 < \frac{3}{5} \varepsilon < \varepsilon, \end{aligned}$$

jeśli $n > \max\left(\frac{5p}{\varepsilon} M^2, p\right)$. Z definicji granicy wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1) = XY$,

a stąd.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1 b_n} + \frac{1}{a_2 b_{n-1}} + \frac{1}{a_3 b_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} b_2} + \frac{1}{a_n b_1}} = AB.$$