

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

0. a. Podać definicję skończonej granicy ciągu liczbowego.

Rozstrzygnąć, które z poniższych implikacji są prawdziwe:

- b. Jeśli ciąg $(|a_n|)$ ma granicę skończoną i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to ciąg $(|a_n + b_n|)$ ma granicę skończoną.
c. Jeśli ciągi $(|a_n|)$ i (b_n) mają granice skończone, to ciąg $(|a_n + b_n|)$ ma granicę skończoną.
-

1. Obliczyć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{2^{m+n}}{2^n + 2^{2m} + 2^{2n}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Niech a_1 oznacza liczbę dodatnią. Niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$.
Znaleźć granicę ciągu (a_n) lub wykazać, że ten ciąg granicy nie ma.
-

3. Niech $a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2$ oraz $b_n = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$.
Udowodnić, że każdy z tych ciągów jest monotoniczny.
Znaleźć granicę ciągu (a_n) oraz granicę ciągu (b_n) .
-

4. Obliczyć granicę w zależności od parametru $b > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b^{2n} + (2b)^{-n} + 1}.$$

Dla jakich liczb $b > 0$ granica ta jest:

- (i) mniejsza od 1, (ii) dla jakich jest równa 1, (iii) dla jakich jest od 1 większa?
-

Następne zadanie wolno rozwiązywać po napisaniu rozwiązań wszystkich poprzednich.

5. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B > 0$ oraz, że wszystkie wyrazy obu ciągów (a_n) i (b_n) są dodatnie. Rozstrzygnąć, czy istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1 b_n} + \frac{1}{a_2 b_{n-1}} + \frac{1}{a_3 b_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} b_2} + \frac{1}{a_n b_1}}.$$

Jeśli istnieje, obliczyć ją.
