

Analiza I₁, kolokwium 24 kwietnia 2010

9:05 — 11:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. Załóżmy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Wynika stąd, że
- a. dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$, że $f(1+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + r_n(h)$ i granica $\lim_{h \rightarrow 0} r_n(h) h^{-n}$ jest skończona;
 - b. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(h) = 0$;
 - c. $\lim_{h \rightarrow 0} r_n(h) = 0$.
-

1. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos(\sin^2 x)}{\ln(1+2x^2) - 2 \operatorname{tg}^2 x}$.

2. Zbadać, czy ciąg funkcji $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(x+1)^n}$ jest jednostajnie zbieżny na półprostej $[0, \infty)$.

3. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1+x^{2n})$ jest zbieżny? Na jakich przedziałach postaci $[-a, a]$ zbieżność jest jednostajna? Na których z tych przedziałów suma szeregu jest funkcją różniczkowalną?

4. Znaleźć $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \cos \frac{1-x}{n}$.

5. Wykazać, że dla każdej liczby $c \in \mathbb{R}$ i każdego $x \in (-1, 1)$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+c}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{c+1}}.$$
