

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. Funkcja ciągła $f: [1789, 1857] \xrightarrow{na} [0, 2010]$ jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału otwartego $(1789, 1857)$. Czy wynika stąd, że

- (a) dla każdego $y \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x: y = f(x)\}$ ma skończenie wiele elementów?
 - (b) jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to jest ściśle monotoniczna?
 - (c) istnieje taka liczba $c \in (1789, 1857)$, że $|f'(c)| > 30$?
-

1. Wykazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma co najwyżej trzy pierwiastki w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz że ma co najmniej jeden pierwiastek w tym przedziale.

2. Niech $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x-3)}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W jakich punktach funkcja f jest różniczkowalna? Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie, na których jest wypukła, na których jest wklęsła, granice funkcji f przy $x \rightarrow \pm\infty$ oraz granice f' w końcach przedziałów, na których funkcja f jest różniczkowalna. Czy istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, że $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b - f(x)) = 0$? Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f .

3. Rozstrzygnąć, czy funkcja $\sin(x + \sin x)$ jest jednostajnie ciągła

- (a) na przedziale $(0, 10]$
- (b) na półprostej $[10, \infty)$.

Czy ta funkcja spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[0, 1000]$?

4. Wykazać, że nierówność $(x + y + z) \ln(x + y + z) \leq x \ln(2x) + y \ln(3y) + z \ln(6z)$ zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z . Wyjaśnić stąd się ona równością?

5. Dowieść, że jeśli wielomian w ma co najmniej trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to ma punkt przegięcia.
