

Analiza I₁, kolokwium poprawkowe, 6 marca 2010

9:35 — 12:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. Przedział P ma tę własność, że każda funkcja ciągła $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, jest ciągła jednostajnie.

Czy wynika stąd, że

- (a) przedział P jest ograniczony?
 - (b) lewostronnie domknięty?
 - (c) domknięty?
-

1. Znaleźć kresy zbioru $\left\{ \frac{e^x + e^y}{e^{2x} + e^{2y} + 1} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Ciąg (x_n) ma granicę $g \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} \right)$.

Czy z istnienia granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} \right)$ wynika istnienie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$?

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)^{\alpha} x^n$ w zależności od $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

4. Dla jakich $a, b > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{n^a + (\sqrt{n} + 1)^b}$ jest zbieżny?

5. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 wtedy i tylko wtedy,

gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.
