

Analiza I₁, pierwsze kolokwium, 14 listopada 2009

10:05 — 12:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. (a) Podaj definicję tego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do $-\infty$.

(b) Niech A oznacza zdanie „ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ”, zaś B — „szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny”.

Czy z A wynika B? Czy z B wynika A? **Obydwie odpowiedzi należy uzasadnić.**

1. Znaleźć kresy zbioru $\left\{ \frac{|k-n|}{k^2+n} : k, n \in \mathbb{N}, k \neq n \right\}$.

2. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! \geq ((n+1)!)^n.$$

3. Oblicz granice

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{966\sqrt{n} - 1025n^2 + 1320n^2 \cdot \sqrt{n}}{1331\sqrt{n^5} - 1410\sqrt[3]{n^4} + 1569\sqrt[7]{n^6}},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\ln n)^{2009} - 1}.$

4. Ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zależność rekurencyjną $x_{n+1} = e^{x_n - 1}$.

Dla jakich wartości x_1 , czy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę?

Znaleźć tę granicę w zależności od x_1 .

5. Ciąg $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma tę własność, że $\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_{n+1} - w_n| < \frac{1}{n}$. Załóżmy, że $A < B < C$ oraz że liczby A i C są granicami pewnych podciągów ciągu $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wykazać, że istnieje podciąg $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do B .
