

Analiza I₂, egzamin, część zadaniowa 11 września 2008

10:35 — 13:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego oraz jego nr. indeksu.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 14 punktów.

1. Niech $f(x) = \frac{3}{14}x^{14/3} - \frac{3}{11}x^{11/3} - \frac{9}{8}x^{8/3} + \frac{3}{5}x^{5/3} + 3x^{2/3}$.

Zachodzą wtedy równości: $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ oraz

$$f''(x) = \frac{11(x+1)(x-x_0)(x^2+px+q)}{3\sqrt[3]{x^4}}, \text{ gdzie } 1,56 < x_0 < 1,57 \text{ i } p^2 < 4q.$$

- Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i przedziały, na których jest malejąca.
 - Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła i przedziały, na których jest wklęsła.
 - W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?
 - Znaleźć jednostronne pochodne funkcji f w punkcie 0, jeśli istnieją.
 - Naszkiecować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.
-

2. Dla jakich liczb $p > 0$ całka $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{x})^p}$ jest zbieżna?
-

3. Znaleźć długość wykresu funkcji $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{\frac{5t^2 - 4t - 1}{4t}} dt$.
-

4. Niech $f_n(x) = ne^{-nx}(e^{2x} - 1)$ dla $x \geq 0$ i $n = 1, 2, 3, \dots$.

- Czy ciąg (f_n) jest punktowo zbieżny na półprostej $[0, \infty)$?
- Czy ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na półprostej $[0, \infty)$?

Odpowiedzi szczegółowo uzasadnić.

5. Niech $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie różnowartościową funkcją ciągłą i niech $f(0) = 0$ oraz $f(1) = 1$. Definiujemy $f_1(x) = f(x)$ oraz $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, $x \in [0, 1]$. Udowodnić, że jeżeli ciąg f_n jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[0, 1]$, to $f(x) = x$ dla każdego $x \in [0, 1]$.
-