

Analiza I₂, egzamin, część teoretyczna 17 czerwca 2008

14:00 — 15:15

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego oraz jego nr. indeksu.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Należy uzasadniać wskazane odpowiedzi. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1. (4 pkt.) Sformułować pierwsze twierdzenie o wartości średniej dla całek.

2. (10 pkt.) Niech $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji jednostajnie zbieżnym do funkcji $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. **Udowodnić**, że jeśli wszystkie funkcje f_n są ciągłe w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to również funkcja f jest ciągła w tym punkcie.

3. (5 pkt.) Podać przykład ciągu funkcji ciągłych $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ punktowo zbieżnego do funkcji ciągłej $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ale nie zbieżnego jednostajnie do f .

Czy można żądać, aby taki ciąg (f_n) był zbieżny monotonicznie do f ? **Uzasadnić odpowiedź.**

4. (6 pkt.) Niech f będzie funkcją $(n + 1)$ -krotnie różniczkowalną w otoczeniu punktu a . Podać wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a dla funkcji f i jej wielomianu Taylora stopnia n w punkcie a .

Dla funkcji $f(x) = \log_2(x)$ znaleźć jej wielomian Taylora stopnia n w punkcie 4.

5. (5 pkt.) Podać przykład takich funkcji $f, f_1, f_2, \dots$ całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx.$$

Odpowiedź należy uzasadnić.
