

Analiza I₂, kolokwium drugie, 16 maja 2008

16:00 — 18:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej. **Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. (a) Podać definicję funkcji całkowalnej w sensie Riemanna.
(b) Podać przykład ograniczonej funkcji $f: [7, 13] \rightarrow \mathbb{R}$ niecałkowalnej w sensie Riemanna.
(c) Podać przykład funkcji $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że całka niewłaściwa $\int_1^\infty f(x) dx$ jest zbieżna, a całka $\int_1^\infty |f(x)| dx$ — rozbieżna.
-

1. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \exp \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

2. Rozważmy całki z parametrem $p > 0$:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx; \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx.$$

- (a) Dla jakich $p > 0$ całka I_1 jest zbieżna?
(b) Dla jakich $p > 0$ całka I_2 jest zbieżna?
(c) Obliczyć całkę I_2 dla $p = 2$.
-

3. Obliczyć:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^3} dt}{x^4}.$$

4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech $T > 0$ będzie ustaloną liczbą. Wykazać, że całka $\int_a^{a+T} f(x) dx$ nie zależy od wyboru liczby $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją okresową o okresie T , tzn. $f(x+T) = f(x)$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.
-