

Analiza I₂, kolokwium pierwsze, 31 marca 2008

16:15 — 18:45

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej. **Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. (a) Sformułować jedną z dwu wersji reguły de l'Hospitala.
(b) Funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału otwartego (a, b) .
(i) Podać warunek, który ma spełniać pochodna f' funkcji f , równoważny monotoniczności funkcji f .
(ii) Podać warunek, który ma spełniać pochodna f' funkcji f , równoważny wypukłości funkcji f .
-

1. Niech $f(x) = |x| \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2}$.

Znaleźć te przedziały, na których funkcja f maleje i te, na których rośnie oraz jej lokalne ekstrema.

Znaleźć te przedziały, na których funkcja f jest wypukła i te, na których jest wklęsła oraz jej punkty przegięcia.

Obliczyć granice pochodnej f' funkcji f w punktach, w których funkcja f nie ma pochodnej.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f .

2. Wykazać, że funkcja $\ln(\operatorname{arctg}(x))$ jest ściśle wklęsła na półprostej $(0, \infty)$.

Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$ i $\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = 1$, to zachodzi nierówność

$$(\operatorname{arctg}(a))^2 (\operatorname{arctg}(b))^4 (\operatorname{arctg}(c))^6 \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{12}.$$

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.
-

4. Rozważmy funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalną. Załóżmy, że $b - a > 4$. Wykazać, że istnieje takie x_0 , że

$$\frac{f'(x_0)}{1 + (f(x_0))^2} < 1.$$
