

Analiza I₁, kolokwium poprawkowe, 10 marca 2008

16:10 — 18:40

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. Podać definicję kresu górnego zbioru niepustego $A \subseteq \mathbb{R}$.

Podać przykład **przeliczalnego** zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, dla którego $\sup A = 2008$ i $2008 \notin A$.

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem i niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza pewną funkcję. Podać definicję ciągłości i definicję jednostajnej ciągłości funkcji f .

1. Niech $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} - 1$.

Rozstrzygnąć, czy ciąg (a_n) ma granicę.

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę, znaleźć ją.

2. Dla jakich liczb rzeczywistych c szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{|c|}$$

jest zbieżny?

3. Znaleźć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych a, b , dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+x)} & \text{dla } -1 < x < 0, \\ b & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}} & \text{dla } x > 0; \end{cases}$$

jest ciągła we wszystkich punktach półprostej $(-1, \infty)$.

4. f spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = f(x) \sin x$ spełnia warunek Lipschitza na $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ograniczona.
