

Analiza I₁, drugie kolokwium, 11 stycznia 2008

16:10 — 18:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. (a) Sformułować twierdzenie o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą.
(b) Podać definicję szeregu warunkowo zbieżnego i podać przykład takiego szeregu.
-

1. Zbadać zbieżność szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1000}$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{4} \cdot \frac{n}{n^2+1000}$.
-

2. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb rzeczywistych a, b, c , dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} (1-2x)^{a/x} & \text{dla } x < 0, \\ b & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\sin \sqrt{x^2 + c^2} \cdot x}{x} & \text{dla } x > 0; \end{cases}$$

jest ciągła we wszystkich punktach $\mathbb{R}$.

3. Niech $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ dla każdego $x > 0$.

Znaleźć $f(0)$.

Wyjaśnić, czy jest jednostajnie ciągła na $[0, 7)$.

Wyjaśnić, czy funkcja f jest jednostajnie ciągła na półprostej $[0, \infty)$.

4. Niech $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że $f(1) = f(4)$.

Udowodnić, że istnieje taka liczba $x \in [1, 4]$, dla której zachodzi równość $f(x) = f(2x)$.
