

Analiza I₁, pierwsze kolokwium, 16 listopada 2007

16:00 — 18:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

0. Sformułować warunek Cauchy'ego* dla ciągu (a_n) . Jaki jest związek tego warunku z istnieniem granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?
-

1. Znaleźć kresy zbioru $A = \left\{ \frac{k}{nk+1} : k \geq 1, n \geq 1, k, n \in \mathbb{N} \right\}$.
-

2. Niech $x_0 \in [0, 2]$ i niech $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n(5 - x_n)$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Zbadać, czy ciąg (x_n) ma granicę. Znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dla tych x_0 , dla których granica istnieje.
-

3. Niech

$$a_n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3n+1}}{\ln(2n)}.$$

Znaleźć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

4. Dla jakich $c \geq 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c + (-1)^n)^n}{n^2(3^n - n)}$ jest zbieżny?
-

* Augustin Louis Cauchy żył w latach 1789 — 1857.