

Analiza I₂, egzamin, 14 września 2006

9:00 — 12:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1.1 Wykazać, że całki $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ i $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$ są zbieżne i znaleźć ich różnicę.

1.2 Wykazać, że $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi \cdot \ln 2}{2}$.

2. Rozstrzygnąć, dla jakich $\alpha \in (0, \infty)$ zbieżna jest całka $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha + x^{2\alpha}} dx$ jest zbieżna, a dla jakich jest zbieżna bezwzględnie.

3.1 Udowodnić, że całka $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ jest zbieżna.

3.2 Wykazać, że $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2 nh}{(nh)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2 nh}{n^2}$.

3.3 Niech $g(h) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2 nh}{n^2} \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji.

4.1 Niech $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ dla $0 < x < 2\pi$, $f(0) = 0$ i niech $f(x + 2\pi) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć szereg Fouriera funkcji f i wyjaśnić, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ f jest on zbieżny do liczby $f(x)$.

4.2 Wykazać, że szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale domkniętym $[a, b] \subset (0, \pi)$

5.1 Wykazać, że funkcja g zdefiniowana w zadaniu trzecim jest różniczkowalna we wszystkich punktach $x \in (0, \pi)$.

5.2 Udowodnić, korzystając w razie potrzeby z twierdzeń sformułowanych w poprzednich zadaniach, że zachodzi równość $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Niektóre bardzo cenne informacje (przydatne, choć większość niekoniecznie dziś):

$2 + 2 = 4$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $(\operatorname{ctg} x)' = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(e^x)' = e^x$.