

Analiza I₂, egzamin, 22 czerwca 2006

9:00 — 12:30

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1. Obliczyć $\int_0^\infty \frac{x^2}{4+x^4} dx$.

2.1 Niech

$$g(x) = \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{dla } x \neq \frac{\pi}{4} \quad \text{i} \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wykazać, że funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ .

2.2 Niech $f_n(x) = \left[\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^n$. Wykazać, że $f_n^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{n!}{(\sqrt{2})^n}$.

2.3 Wykazać, że funkcja $f_n^{(n)}$ ma w przedziale $(0, 2\pi)$ co najmniej n pierwiastków.

3.1 Dla $0 < x \neq 1$ definiujemy: $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$. Zakładając, że istnieje granica $\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ i przyjmując $f(1) = \lambda$ wykazać, że funkcja $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, ściśle rosnąca i ściśle wypukła.

3.2 Znaleźć granicę $\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

4. Niech ciąg (a_n) będzie zdefiniowany za pomocą równości:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{dla } |x| < \frac{1}{10}.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(2n+3)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_{n-k}a_k = a_n a_0 + a_{n-1}a_1 + \dots + a_0 a_n.$$

5.1 Niech $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$. Znaleźć szereg Fouriera funkcji f i wykazać, że jest on zbieżny jednostajnie do funkcji f .

5.2 Znaleźć sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{4n^2 - 1} \right]^2.$$

Niektóre bardzo cenne informacje (przydatne, choć większość niekoniecznie dziś):

$2 + 2 = 4$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $(\operatorname{ctg} x)' = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$,
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(e^x)' = e^x$.