

Egzamin z analizy matematycznej 1, 3 września 2003, część zadaniowa

Należy wszystkie swoje stwierdzenia szczegółowo uzasadniać. Wolno powoływać się na twierdzenia znane z wykładu lub ćwiczeń, w przypadku stosowania innych twierdzeń należy je udowodnić.

Każde zadanie należy napisać na oddzielnej kartce, bo będzie sprawdzane przez inną osobę. Zacząć należy od podpisania czterech kartek: w lewym górnym rogu proszę podać nr swojego indeksu, swoje imię i swoje nazwisko, w prawym – nazwisko wykładowcy

Każde zadanie warte jest 25 punktów.

- 1.** Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2}e^x(2 + e^x) > (1 + e^x) \ln(1 + e^x).$$

- 2.** Znaleźć granice:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 \int_0^x \ln(1 + \sin t) dt}{x^3}$ b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \sqrt{\frac{k}{n}}.$

- 3.** Niech $f_n = x^n \sin \frac{x}{n}$ dla $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$

- a. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale $[0, a]$, gdzie $0 < a < 1$. Wyjaśnić, czy suma tego szeregu jest różniczkowalna na przedziale $(0, 1)$.
- b. Wykazać, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$\sup_{0 \leq x < 1} (f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{2n}(x)) \geq \frac{1}{4}$$

i wyjaśnić, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 1)$.

- 4.** Niech $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $g(x+1) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Wykazać, że jeśli f jest funkcją charakterystyczną przedziału $[a, b] \subset [0, 1]$, tzn.

$$f(x) = 1 \text{ dla } a \leq x \leq b \text{ i } f(x) = 0 \text{ dla } x \notin [a, b], \text{ to}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)g(nx) dx = (b-a) \int_0^1 g(x) dx.$$

- (b) Wykazać, że jeśli $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)g(nx) dx = \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx.$$