

Egzamin z analizy matematycznej 1, 4 czerwca 2003, część zadaniowa

Należy wszystkie swoje stwierdzenia szczegółowo uzasadniać. Wolno powoływać się na twierdzenia znane z wykładu lub ćwiczeń, w przypadku stosowania innych twierdzeń należy je udowodnić.

Każde zadanie należy napisać na oddzielnej kartce, bo będzie sprawdzane przez inną osobę. Zacząć należy od podpisania czterech kartek: w lewym górnym rogu proszę podać nr swojego indeksu, swoje imię i swoje nazwisko, w prawym – nazwisko wykładowcy

Każde zadanie warte jest 25 punktów.

1. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność: $\ln(1 + e^{-x}) \geq \frac{2}{1 + 2e^x}$.

2. Znaleźć granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \int_0^x \cos \sqrt{t} dt}{(\sin x)^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4} \exp\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$

3. Niech $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nx}$ dla $0 < x \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$

(a) Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale postaci

$$[a, 1], \quad 0 < a < 1 \quad \text{oraz że istnieje granica skończona} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx.$$

(b) Wykazać, że $\sup_{0 < x \leq 1} \left(f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{2n}(x) \right) \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ i wyjaśnić, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{jest zbieżny jednostajnie na przedziale } (0, 1].$$

4. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ takim, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzą nierówności $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \dots$ oraz istnieje funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$.

(a) Wykazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ i dla pewnej liczby A nierówność $f(c_n) \geq A$ zachodzi dla każdego n , to $f(c) \geq A$.

(b) Wykazać, że kres górny funkcji f jest jej wartością, tzn. że istnieje liczba $c \in [a, b]$ taka, że dla każdej liczby $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność $f(x) \leq f(c)$.