

Egzamin z analizy matematycznej 1, 6 marca 2003, część zadaniowa

Należy wszystkie swoje stwierdzenia szczegółowo uzasadniać. Wolno powoływać się na twierdzenia znane z wykładu lub ćwiczeń, w przypadku stosowania innych twierdzeń należy je udowodnić.

Każde zadanie należy napisać na oddzielnej kartce, bo będzie sprawdzane przez inną osobę. Zacząć należy od podpisania czterech kartek: w lewym górnym rogu proszę podać nr swojego indeksu, swoje imię i swoje nazwisko, w prawym – nazwisko wykładowcy

Każde zadanie warte jest 25 punktów.

1. Niech $a_0 = \frac{1}{2}$ oraz $a_{n+1} = a_n + \frac{1 - a_n}{1 + (1 - a_n)^2}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wykazać, że ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

2. Wyjaśnić, czy następujący szereg jest zbieżny bezwzględnie, warunkowo, czy rozbieżny.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 + 2 \sin \frac{1}{n})^{n^2}}{9^n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{1/n} - 1}{\ln n}$

3. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $f'(0) = 1$, $f'(1) = 2$. Znaleźć liczbę $a > 0$ taką, że funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorami:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(ax) - f(0)}{x} & \text{dla } x > 0, \\ \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{x^2} & \text{dla } x < 0, \\ a & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

jest ciągła.

4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(x+1) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że

(a) istnieje liczba $x_0 \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x_0) = \inf\{f(x): x \in \mathbb{R}\}$;

(b) dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $f(a+b) = f(b)$.