

Egzamin z analizy matematycznej 1, 29 stycznia 2003, część zadaniowa

Należy wszystkie swoje stwierdzenia szczegółowo uzasadniać. Wolno powoływać się na twierdzenia znane z wykładu lub ćwiczeń, w przypadku stosowania innych twierdzeń należy je udowodnić.

Każde zadanie należy napisać na oddzielnej kartce, bo będzie sprawdzane przez inną osobę. Zacząć należy od podpisania czterech kartek: w lewym górnym rogu proszę podać nr swojego indeksu, swoje imię i swoje nazwisko, w prawym – nazwisko wykładowcy

1. Niech $a_0 = 5$ oraz $a_{n+1} = \sqrt[4]{12 + (a_n)^2}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wykazać, że ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest malejący, zbieżny i znaleźć jego granicę.
2. Wyjaśnić, czy następujący szereg jest zbieżny bezwzględnie, warunkowo, czy rozbieżny.
a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$
3. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ określmy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{1/x} & \text{dla } x > 0, \\ \frac{1 - \cos ax}{x^2} & \text{dla } x < 0, \\ b & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że istnieje liczba a , dla której można dobrać liczbę b tak, by funkcja f była ciągła.

4. Niech $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie 1 i niech $f(1) = 4 = f'(1)$. Znaleźć

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h)}{f(1+3h)} \right)^{1/h}.$$

Egzamin z analizy matematycznej 1, 29 stycznia 2003, część zadaniowa

Należy wszystkie swoje stwierdzenia szczegółowo uzasadniać. Wolno powoływać się na twierdzenia znane z wykładu lub ćwiczeń, w przypadku stosowania innych twierdzeń należy je udowodnić.

Każde zadanie należy napisać na oddzielnej kartce, bo będzie sprawdzane przez inną osobę. Zacząć należy od podpisania czterech kartek: w lewym górnym rogu proszę podać nr swojego indeksu, swoje imię i swoje nazwisko, w prawym – nazwisko wykładowcy

1. Niech $a_0 = 5$ oraz $a_{n+1} = \sqrt[4]{12 + (a_n)^2}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wykazać, że ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest malejący, zbieżny i znaleźć jego granicę.
2. Wyjaśnić, czy następujący szereg jest zbieżny bezwzględnie, warunkowo, czy rozbieżny.
a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$
3. Dla $a, b \in \mathbb{R}$ określmy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{1/x} & \text{dla } x > 0, \\ \frac{1 - \cos ax}{x^2} & \text{dla } x < 0, \\ b & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że istnieje liczba a , dla której można dobrać liczbę b tak, by funkcja f była ciągła.

4. Niech $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie 1 i niech $f(1) = 4 = f'(1)$. Znaleźć

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h)}{f(1+3h)} \right)^{1/h}.$$