Rozmaitości z brzegiem, formy różniczkowe

Poprawiłem ten tekst 4 września 2016 r., około 11:05 po wskazaniu błędów przez p. M.Ż. i 14 czerwca 2023 r. Zwykła prośba: proszę o informację o zauważonych błędach, poprawię.

Rozszerzymy nieco pojęcie rozmaitości. Zdefiniujemy mianowicie rozmaitości z brzegiem. W dalszym ciągu $\mathbb{R}^m_+$ będzie oznaczać domkniętą, m–wymiarową półprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^m$, czyli $\mathbb{R}^m_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \quad x_1 \geq 0\}$.

Definicja 12.1 (funkcji gładkiej na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^m_+$)
Jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^m_+$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m_+$, to $f\colon \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ jest funkcją klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ otwarty w $\mathbb{R}^m$ i taka funkcja klasy C^r $\tilde{f}\colon \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ klasy C^r, że $\tilde{f}_{|U} = f$. ■

Mówiąc inaczej: funkcja na zbiorze niekoniecznie otwartym w $\mathbb{R}^m$ nazywana jest funkcją klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy można przedłużyć ją do funkcji klasy C^r na pewnym otwarym w $\mathbb{R}^m$ nadzbiorze dziedziny funkcji f. Można z łatwością sprawdzić, że dla tak zdefiniowanych funkcji gładkich zachodzą podstawowe twierdzenia o różniczkowaniu (suma iloczyn złożenie). Można też zdefiniować funkcje klasy C^r bez przedłużania podając odpowiednie warunki, ale tym nie będziemy zajmować się. Dyskusja szczegółowa wychodzi poza zakres wykładu i jest związana z twierdzeniami Whitney'a o przedłużaniu (por. np. B.Malgrange Ideals of differentiable functions, 1966 albo H.Federer „Geometric measure theory”, 1969 lub 1996, lub tłumaczenie rosyjskie 1987 z dodatkami L. D. Ivanova i A. T. Fomenko).

Definicja 12.2 (rozmaitości z brzegiem)
Zbiór $M \subseteq \mathbb{R}^k$ jest m–wymiarową rozmaitością z brzegiem klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$ istnieje otwarte w M otoczenie U punktu $\mathbf{p}$ i taki homeomorfizm $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m_+$, którego obraz jest otwarty w $\mathbb{R}^m_+$, że odwzorowanie $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest klasy C^r i jego różniczka w każdym punkcie zbioru $\varphi(U)$ jest włożeniem. **Brzeg** ∂M rozmaitości M, to zbiór tych punktów, które mapy odwzorowują w podprzestrzeń o równaniu $x_1 = 0$. ■

Podana definicja niewiele różni się od definicji rozmaitości, z którą spotkaliśmy się poprzednio. Jedyna widoczna różnica, to rozpatrywanie zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^m_+$ zamiast w $\mathbb{R}^m$. To dosyć ważna różnica. Przy okazji należałoby udowodnić, że definicja punktów brzegu M nie zależy od wyboru mapy. To akurat łatwo wynika z tego, że w tych punktach zbiór $T_\mathbf{p}M$ wektorów stycznych do M w punkcie $\mathbf{p} \in M$ **nie** jest przestrzenią liniową. To rozumowanie mogłoby być czysto topologiczne (np. wykorzystujące twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru, ale większość studentów II roku nie zna odpowiednio zaawansowanych twierdzeń topologicznych, więc nie wnikamy tu w te kwestie).

Jasne jest też, ze każda rozmaitość bez brzegu jest też rozmaitością z brzegiem (pustym), bo otwarte podzbiory $\mathbb{R}^m$ można potraktować jako otwarte podzbiory $\mathbb{R}^m_+$, bo przekształcenie

$$(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_m) \longrightarrow (e^{x_1}, x_2, x_3 \ldots, x_m)$$

jest dyfeomorfizmem całej przestrzeni $\mathbb{R}^m$ na otwarty podzbiór $\mathbb{R}^m_+$, który jest też otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$. Istnieją jednak rozmaitości z brzegiem niepustym.

Przykład 12.3 Koło domknięte, czyli zbiór $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\quad x^2+y^2\le 1\}$. ■

Przykład 12.4 Domknięty pierścień kołowy, czyli np. zbiór
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\quad 1\le x^2+y^2\le 10\},$$
oczywiście promienie mogą być inne. ■

Przykład 12.5 Pierścień kołowy, niecałkiem domknięty, czyli np. zbiór
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\quad 1< x^2+y^2\le 10\}.\ ■$$

Przykład 12.6 Pełny torus, czyli zbiór powstały w wyniku obrotu koła domkniętego wokół prostej, która leży w płaszczyźnie obracanego koła i która tego koła nie przecina. Jeśli np. obracamy koło o promieniu 1 i środku $(2,0,0)$, leżące w płaszczyźnie $y=0$ wokół osi OZ, to otrzymujemy zbiór złożony ze wszystkich punktów (x,y,z), dla których zachodzi nierówność
$$\big(x-\tfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)^2+\big(y-\tfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)^2+z^2\le 1,$$
którą można przepisać tak:
$$(x^2+y^2+z^2+3)^2\le 16(x^2+y^2).$$
Widzimy więc, że niektóre rozmaitości z brzegiem można opisać nierównościami. Zachęcam do sformułowania twierdzenia analogicznego do tego, które pozwalało rozmaitość bez brzegu traktować, przynajmniej lokalnie jako rozwiązanie układu równań. Teraz może to być nierówność i równania. ■

Przykład 12.7 Rozważymy przekształcenie $F\colon\mathbb{R}\times[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem $F(\alpha,t)=\big((2+t\sin\alpha)\cos(2\alpha),(2+t\sin\alpha)\sin(2\alpha),t\cos\alpha\big)$. Obraz przekształcenia F, czyli zbiór $M:=F\big(\mathbb{R}\times[-1,1]\big)$ jest dwuwymiarową rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^3$. Ta rozmaitość to tzw. wstęga M'obiusa. Jej brzeg jest spójny, jest homeomorficzny z okręgiem. ■

Przykład 12.8 Kwadrat $(x,y)\colon\quad |x|,|y|\le 1$ rozmaitością z brzegiem nie jest. Przeszkadzają wierzchołki. Jeśli je (cztery wierzchołki) usuniemy, to otrzymamy dwuwymiarową rozmaitość z brzegiem, która nie jest zwarta. Jest natomiast rozmaitością topologiczną z brzegiem, bo topologia nie rozróżnia wierzchołka kwadratu od innych punktów jego brzegu. ■

Przykład 12.9 Zbiór
$$\{(x,y,z)\colon\quad x^2+y^2+z^2\le 100,\ (x-3)^2+y^2+z^2\ge 1,\ (x+3)^2+y^2+z^2\ge 1,$$
$$x^2+(y-3)^2+z^2\ge 1,\ x^2+(y+3)^2+z^2\ge 1\}$$
jest trójwymiarową rozmaitością zwartą, której brzegiem jest suma pięciu parami rozłącznych kul. ■

Twierdzenie 12.10 (o brzegu rozmaitości)
Brzeg rozmaitości m–wymiarowej jest albo zbiorem pustym, albo rozmaitością wymiaru $m-1$. ■

Dowód tego „twierdzenia” opuszczamy, by nie demoralizować studentów podawaniem aż tak łatwych rozumowań, ale proszę się przynajmniej przez chwilkę zastanowić nad nim.

Definicja 12.11 (rozmaitości orientowalnej)
Rozmaitość M (z brzegiem lub bez) nazywana jest orientowalną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki atlas $\{U_j,\varphi_j\}$, $U_j\subseteq M$ jest otwartym podzbiór przestrzeni M, φ_j mapa na nim określona, że jeśli $U_j\cap U_{j'}\neq\emptyset$, to $\det\big(D(\varphi_{j'}\circ\varphi_j^{-1})\big)\big(\varphi_j(\mathbf{p})\big)>0$ dla każdego punktu $\mathbf{p}\in U_j\cap U_{j'}$. ■

Przykład 12.12 k–wymiarowa sfera $S^k=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{k+1}:\quad \|\mathbf{x}\|=1\}$ jest orientowalna. Można łatwo wskazać atlas złożony z dwu map, rzutów stereograficznych z punktów $(0,0,\dots,0,1)$ i $(0,0,\dots,0,-1)$. Niech

$$\varphi_N(\mathbf{x})=\big(\tfrac{x_1}{1-x_{k+1}},\tfrac{x_2}{1-x_{k+1}},\dots,\tfrac{x_k}{1-x_{k+1}}\big),\qquad \varphi_S(\mathbf{x})=\big(\tfrac{x_1}{1+x_{k+1}},\tfrac{x_2}{1+x_{k+1}},\dots,\tfrac{x_k}{1+x_{k+1}}\big).$$

Każde z tych odwzorowań przekształca sferę bez jednego punktu na całą przestrzeń $\mathbb{R}^k$. Osoby, które znają twierdzenie Talesa[1], mogą stwierdzić bez trudu, że dla każdego $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^k\setminus\{\mathbf{0}\}$ zachodzi równość

$$\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}(\mathbf{y})=\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\,.$$

Prawdziwy jest więc wzór $D\big(\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}\big)(\mathbf{y})\mathbf{h}=\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{y}\|^2}-2\frac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{h})\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^4}$. Z niego wynika, że wektory $\mathbf{h}$ prostopadłe do $\mathbf{y}$ to wektory własne przekształcenia $D\big(\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}\big)(\mathbf{y})$ odpowiadające wartości własnej $\frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2}$, natomiast $D\big(\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}\big)(\mathbf{y})\mathbf{y}=-\frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}$, więc $\mathbf{y}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $-\frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Wynika stąd, że

$$\det\big[D\big(\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}\big)(\mathbf{y})\big]=-\frac{1}{\|\mathbf{y}\|^{2k}}<0\,,$$

więc na razie nie możemy stwierdzić, że sfera S^k jest orientowalna. Jeśli jednak zastąpimy mapę φ_S przez mapę ψ zdefiniowaną wzorem $\psi(\mathbf{x})=\big(\frac{-x_1}{1+x_{k+1}},\frac{x_2}{1+x_{k+1}},\dots,\frac{x_k}{1+x_{k+1}}\big)$, czyli złożeniem φ_S z symetrią względem podprzestrzeni $y_1=0$, to stwierdzimy, że $\det\big[D\big(\psi\circ\varphi_N^{-1}\big)(\mathbf{y})\big]=\frac{1}{\|\mathbf{y}\|^{2k}}>0$, a to oznacza, że sfera S^k jest orientowalna. ■

Przykład 12.13 Niech

$$T^2=\{(x,y,z):\quad \exists_{\alpha,\beta}\ x=(2+\cos\alpha)\cos\beta, y=(2+\cos\alpha)\sin\beta, z=\sin\alpha\}.$$

Przyjmijmy też $F(\alpha,\beta)=\big((2+\cos\alpha)\cos\beta,(2+\cos\alpha)\sin\beta,\sin\alpha\big)$. Zbiór T^2 jest więc obrazem płaszczyzny w przekształceniu F. Jest to torus powstały z obrotu okręgu o środku w punkcie $(2,0,0)$ leżącego w płaszczyźnie $y=0$ wokół osi OZ. Wykażemy, że jest on rozmaitością orientowalną. Atlasem będzie zbiór złożony z przekształceń odwrotnych do obcięć przekształcenia F do otwartych kwadratów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, o boku 2π, na których przekształcenie jest różnowartościowe, nawet więcej kwadrat jest homeomorfizmem na obraz, co udowodniliśmy wcześniej. Należy wykazać, że jeśli F_1 i F_2 są takimi parametryzacjami, tzn. F_1^{-1} i F_2^{-1} są mapami, to $\det\big(D(F_1^{-1}\circ F_2)(\mathbf{y})\big)>0$ dla każdego $\mathbf{y}$, dla którego złożenie to jest dobrze określone. Wynika to stąd, że przekształcenie $F_1^{-1}\circ F_2)(\mathbf{y})$ jest na każdej składowej swej dziedziny przesunięciem. ■

Bez dowodu podać wypada następujące

[1] Można też przerachować i zapomnieć o tym pogańskim twierdzeniu.

Twierdzenie 12.14 (o orientowalności rozmaitości kowymiaru 1)
Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^k$ jest $(k-1)$–wymiarową zwartą rozmaitością bez brzegu, to M jest orientowalna. ■

Twierdzenie to podaję, choć jego dowód wykracza znacznie ponad to, co jestem w stanie udowodnić teraz. W przykładach korzystać z niego nie będziemy. Niedługo przekonamy się o tym, że zarówno założenie, że M jest bez brzegu jak i założenie, że jest zwarta i jej kowymiar równy jest 1, są istotne. Po to, by wykazać nieorientowalność jakiejś rozmaitości, należy wykazać jakieś twierdzenie, które to ułatwi.

Lemat 12.15 (o mapach na rozmaitości orientowalnej)
Niech M będzie m–wymiarową rozmaitością zorientowaną za pomocą atlasu $\mathcal{A}$ i niech φ będzie mapą, której dziedzina jest spójna. Niech σ będzie symetrią zdefiniowaną wzorem $\sigma(\mathbf{y}) = (-y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$ i niech $\tilde{\varphi} = \sigma \circ \varphi$. Wtedy dokładnie jeden ze zbiorów zbiór $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$, $\mathcal{A} \cup \{\tilde{\varphi}\}$ też jest atlasem definiującym orientację rozmaitości M, tzn. dla każdej pary map $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ nierówność
$$\det\big(D\big(\psi_1 \circ \psi_2^{-1}\big)(\mathbf{y})\big) > 0$$
zachodzi dla dowolnego $\mathbf{y}$, dla którego złożenie $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ jest określone.

Dowód. Zauważmy, że dla każdej mapy $\psi \in \mathcal{A}$ zbiór
$$D_\psi = \{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\varphi)\colon \quad \det\big(D(\psi \circ \varphi^{-1})([\varphi(\mathbf{x})])\big) > 0\}$$
jest otwarty. Zauważmy też, że jeśli $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\varphi) \cap \mathrm{dom}(\psi_1) \cap \mathrm{dom}(\psi_2)$ i $\mathbf{x} \in D_{\psi_1}$, to również $\mathbf{x} \in D_{\psi_2}$. Wynika to od razu z tego, że $\det\big(D(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})[\psi_1(\mathbf{x})]\big) > 0$, bo atlas $\mathcal{A}$ wyznacza orientację rozmaitości M. Jasne jest, że również zbiór
$$\tilde{D}_\psi = \{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\varphi)\colon \quad \det\big(D(\psi \circ \varphi^{-1})([\varphi(\mathbf{x})])\big) < 0\}$$
jest otwarty. Niech $D = \bigcup_{\psi \in \mathcal{A}} D_\psi$, $\tilde{D} = \bigcup_{\psi \in \mathcal{A}} \tilde{D}_\psi$. Zbiory D i $\tilde{D}$ są otwarte i rozłączne. Ich sumą jest dziedzina mapy φ, która jest spójna. Wobec tego jeden z nich jest pusty. Jeśli $\tilde{D} = \emptyset$, to zbiór $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ jest atlasem, który wyznacza tę samą orientację, co atlas $\mathcal{A}$. Jeśli $D = \emptyset$, to zbiór $\mathcal{A} \cup \{\tilde{\varphi}\}$ jest poszukiwanym atlasem. ■

Dzięki temu prościutkiemu lematowi jesteśmy w stanie wykazać nieorientowalność różnych rozmaitości.

Przykład 12.16 Wstęga M´obiusa nie jest orientowalna. Zdefiniujmy odwzorowanie $F\colon \mathbb{R} \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem
$$F(\alpha, t) = \big((2 + t\sin\alpha)\cos(2\alpha), (2 + t\sin\alpha)\sin(2\alpha), t\cos\alpha\big).$$
Jego obraz jest rozmaitością z brzegiem. Ta rozmaitość z brzegiem nazywana jest wstęgą M´obiusa. Niech $\varphi_1 = \big(F_{|(0,\pi)\times(-1,1)}\big)^{-1}$, $\varphi_2 = \big(F_{|(\pi/2,3\pi/2)\times(-1,1)}\big)^{-1}$. Każde z tych przekształceń jest mapą. W sumie te mapy nie dają atlasu, bo suma ich dziedzin nie pokrywa brzegu wstęgi M´obiusa.

Rozważmy przekształcenie $h := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$. Załóżmy, że $h(\alpha, t) = (\beta, s)$, czyli że $F(\beta, s) = F(\alpha, t)$. Wykazaliśmy (zob. „Definicja i przykłady rozmaitości”), że wtedy istnieje taka liczba całkowita n, że $\alpha - \beta = n\pi$. Ponieważ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ i $0 < \beta < \pi$, więc albo $n = 0$ i wtedy również $t = s$, albo $n = 1$ i wtedy $t = -s$. Wykazaliśmy, że
$$h(\alpha, t) = \begin{cases} (\alpha, t), \mathrm{gdy} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \\ (\alpha - \pi, -t), \mathrm{gdy} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Wobec tego $\det\big(Dh(\alpha,t)\big)=\pm 1$ i oba przypadki mają miejsce. Oznacza to, że gdyby wstęga M'obiusa była orientowalna, to jedną z map φ_1,φ_2 dałoby się dołączyć do atlasu orientującego wstęgę, bo dla dowolnej mapy ψ określonej w otoczeniu punktu $\mathbf{p}=F(\pi+\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})=F(\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2})=\big(0,2-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\big)$, bo wyznacznik jednego z przekształceń $D(\psi\circ\varphi_1^{-1})(\varphi_1(\mathbf{p}))$, $D(\psi\circ\varphi_2^{-1})(\varphi_2(\mathbf{p}))$ jest dodatni (a drugiego — ujemny). Gdyby wstęga M'obiusa była orientowalna, to znak wyznacznika różniczki h nie zależałby od punktu — wynika to z lematu o mapach na rozmaitości orientowalnej! ■

Przykład 12.17 Płaszczyzna rzutowa (zob. „Rozmaitości – przykłady") jest nieorientowalna. Wynika to natychmiast z tego, że wstęga M'obiusa jest nieorientowalna i tego, że wstęga M'obiusa jest otwartym podzbiorem płaszczyzny rzutowej. ■

Przykład 12.18 Butelka Kleina (zob. „Rozmaitości – przykłady") jest nieorientowalna. Wynika to natychmiast z tego, że wstęga M'obiusa jest nieorientowalna i tego, że wstęga M'obiusa jest otwartym podzbiorem butelki Kleina. ■

W dwóch ostatnich przykładach skorzystaliśmy z następującego stwierdzenia.

Uwaga 12.19

Otwarty podzbiór rozmaitości orientowalnej jest rozmaitością orientowalną.
Jeśli M_1 jest orientowalna i homeomorfizm h przekształca rozmaitość M_1 **na** rozmaitość M_2, przy czym dla dowolnych dwu map: φ określonej na otwartym podzbiorze M_1 i ψ określonej na otwartym podzbiorze M_2 przekształcenia $\psi\circ h\circ\varphi^{-1}$ i $\varphi\circ h^{-1}\circ\psi^{-1}$ są klasy C^1 lub wyższej, to M_2 też jest orientowalna.[2] ■

Twierdzenie 12.20 (o orientowalności w kowymiarze 1)

Rozmaitość $M\subset\mathbb{R}^k$ wymiaru $k-1$ jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja ciągła $\mathbf{n}\colon M\longrightarrow\mathbb{R}^k$, że dla każdego punktu $\mathbf{p}\in M$ i każdego wektora $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}M$ zachodzą równości $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=0$ i $\|\mathbf{n}(\mathbf{p})\|=1$.

Dowód. Załóżmy, że rozmaitość M jest orientowalna i niech $\{(U_j,\varphi_j)\}$ będzie atlasem definiującym orientację, $\varphi_j\colon U_j\longrightarrow\mathbb{R}^{k-1}$ jest mapą określoną na zbiorze U_j otwartym (w przestrzeni M). Niech $V_j=\varphi_j(U_j)\subseteq\mathbb{R}^{k-1}$ i niech $\psi_j=\varphi_j^{-1}$. Niech $\mathrm{n}(\mathbf{p})$ będzie takim wektorem o długości 1, że wyznacznik macierzy, której kolejnymi kolumnami są wektory $\mathrm{n}(\mathbf{p})$, $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_1}\big(\varphi_j(\mathbf{p})\big)$, $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_2}\big(\varphi_j(\mathbf{p})\big)$, … , $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_{k-1}}\big(\varphi_j(\mathbf{p})\big)$, jest dodatni — przykładem wektora takiego wektora dla $k=3$ jest iloczyn wektorowy wektorów $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_1}\big(\varphi_j(\mathbf{p})\big)$ i $\frac{\partial\psi_j}{\partial y_2}\big(\varphi_j(\mathbf{p})\big)$ podzielony przez swoją długość; w wyższym wymiarze robimy w zasadzie to samo, tzn. dzielimy wektor utworzony z dopełnień algebraicznych wyrazów znajdujących się w pierwszej kolumnie przez jego długość.

Ze względu na to, że szukamy wektora o długości 1, który jest prostopadły do każdego z $k-1$ wektorów liniowo niezależnych, jest on określony z dokładnością do zwrotu. Zwrot jest zdeterminowany przez znak opisanego wcześniej wyznacznika.

Załóżmy teraz, że $\mathbf{p}\in U_i\cap U_j$. Mamy wtedy do czynienia z dwiema definicjami wektora $\mathrm{n}(\mathbf{p})$. Mogą różnić się one jedynie zwrotem. Wykażemy, że nie różnią się niczym.

[2] Wtedy h nazywamy dyfeomorfizmem rozmaitości M_1 na rozmaitość M_2.

Mamy $\psi_j = \psi_i \circ \varphi_i \circ \psi_j$, zatem $D\psi_j[\varphi_j(\mathbf{p})] = D\psi_i[\varphi_i(\mathbf{p})] \cdot D\big(\varphi_i \circ \psi_j\big)[\varphi_j(\mathbf{p})]$. Macierz $D\big(\varphi_i \circ \psi_j\big)[\varphi_j(\mathbf{p})]$ ma $k-1$ wierszy i tyleż kolumn, macierze $D\psi_j[\varphi_j(\mathbf{p})]$ i $D\psi_i[\varphi_i(\mathbf{p})]$ mają po $k-1$ kolumn i po k wierszy. Do macierzy $D\big(\varphi_i \circ \psi_j\big)[\varphi_j(\mathbf{p})]$ dopiszmy na górze wiersz postaci $1, 0, 0, \ldots, 0$ i kolumnę z lewej strony złożoną z jedynki i $k-1$ zer pod nią. Otrzymaną macierz oznaczmy przez A. Do każdej z macierzy $D\psi_j[\varphi_j(\mathbf{p})]$ i $D\psi_i[\varphi_i(\mathbf{p})]$ dopisujemy z lewej strony ten sam wektor $\mathrm{n}(\mathbf{p})$ otrzymany dla mapy ψ_j. Otrzymane macierze kwadratowe oznaczmy odpowiednio przez A_j oraz A_i. W wyniku otrzymujemy równość $A_j = A_i \cdot A$. Zachodzą oczywiście równości $\det(A) = \det\big(D\big(\varphi_i \circ \psi_j\big)[\varphi_j(\mathbf{p})]\big)$ oraz $\det(A_j) = \det(A_i)\det(A)$. Wynika stąd, że wyznaczniki macierzy A_j oraz A_i mają ten sam znak, więc oba są dodatnie. Wobec tego wektory prostopadłe do $T_{\mathbf{p}}M$ otrzymane za pomocą map φ_j i φ_i pokrywają się. Wykazaliśmy twierdzenie w jedną stronę.

Dowód w drugą stronę również jest prosty. Jeśli $\mathbf{n}$ jest ciągłym polem wektorów normalnych na M[3] i ψ jest lokalną parametryzacją M określoną na spójnej dziedzinie, to po dopisaniu do macierzy $D\psi$ z lewej strony kolumny $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ otrzymujemy macierz $k \times k$, której kolumny są liniowo niezależne, więc której wyznacznik jest różny od 0. Ponieważ jest tak na spójnej dziedzinie, więc wyznacznik ten jest wszędzie dodatni lub wszędzie ujemny. W drugim przypadku zastępujemy parametryzację ψ przez przekształcenie $\tilde{\psi}$ odwrotne do złożenia symetrii względem podprzestrzeni $k-2$ wymiarowej z mapą ψ^{-1}. Wyznacznik macierzy, której pierwszą kolumną jest n a następnymi — kolejne kolumny macierzy $D\tilde{\psi}$, jest dodatni. Poprawiając w ten sposób mapy z wybranego dowolnie atlasu złożonego z map o spójnych dziedzinach otrzymujemy atlas złożony z map, które oznaczamy przez φ_j. Czytelnik zechce sprawdzić, że różniczki dyfeomorfizmów postaci $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ mają dodatnie wyznaczniki. Oznacza to, że te mapy definiują orientację rozmaitości M. ■

Tak prosto nie można scharakteryzować orientowalności rozmaitości kowymiaru większego niż 1. Główną przyczyną jest to, że jest „zbyt dużo kierunków" prostopadłych do podprzestrzeni kowymiaru 2 lub jeszcze większego.

Po to, by ten problem przewalczyć uciekniemy się do przestrzeni sprzężonej do przestrzeni liniowej $T_{\mathbf{p}}M$. Będziemy zamiast wektorów normalnych rozważać funkcjonały. W istocie rzeczy chodzi o uogólnienie definicji iloczynu wektorowego. Od razu wypada stwierdzić, że gdyby chodziło jedynie o abstrakcyjną definicję, to zapewne nikt poważny nie zajmowałby się tym problemem. Jednak okazuje się, że to uogólnienie jest bardzo owocne i upraszcza mówienie o wielu kwestiach z pogranicza matematyki i fizyki. Ułatwia też życie matematykom.

Najważniejszą cechą iloczynu wektorowego (i wyznacznika) jest liniowość ze względu na każdy czynnik (każdy wiersz lub każdą kolumnę) oraz antysymetria. Antysymetria oznacza, że zamiana miejscami dwóch wektorów powoduje zmianę zwrotu iloczynu wektorowego (zamiana dwóch wierszy lub kolumn powoduje zmianę znaku wyznacznika).

Definicja 12.21 (formy m–liniowej antysymetrycznej)
Przekształcenie $\omega\colon \underbrace{V \times V \times V \times \cdots \times V}_{m \text{ czynników}} \longrightarrow \mathbb{R}$ m-liniowe, antysymetryczne nazy-

[3] Ta powszechnie używana nazwa nie ma nic wspólnego z polityką

wamy formą antysymetryczną (zewnętrzną) stopnia m. ■

Przykład 12.22 $V = \mathbb{R}^m$. $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & v_{3,1} & \ldots & v_{m,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & v_{3,2} & \ldots & v_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,m} & v_{2,m} & v_{3,m} & \ldots & v_{m,m} \end{vmatrix}$ jest przykładem formy stopnia m na $\mathbb{R}^m$. Jest jasne, że zbiór m–form na $\mathbb{R}^m$ ma wymiar $\binom{m}{m} = 1$, więc inne formy stopnia m otrzymujemy mnożąc wyznacznik przez stałą. ■

Przykład 12.23 Niech $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ będzie dowolnym ustalonym wektorem. Niech $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1})$ będzie wyznacznikiem macierzy której kolumnami są kolejno wektory $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$. Jasne jest, że zdefiniowaliśmy formę stopnia $m-1$ na $\mathbb{R}^m$. Jeśli $m = 3$, to formę tę można zdefiniować jako $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$, czyli iloczyn skalarny wektora $\mathbf{w}$ i iloczynu wektorowego wektorów $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. ■

Definicja 12.24 (bazowych form zewnętrznych)
Określimy pewną formę stopnia m na $\mathbb{R}^k$. Załóżmy, że $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ zostały wybrane spośród $1, 2, \ldots, k$. Niech

$$\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = \begin{vmatrix} v_{1,i_1} & v_{2,i_1} & \ldots & v_{m,i_1} \\ v_{1,i_2} & v_{2,i_2} & \ldots & v_{m,i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,i_m} & v_{2,i_m} & \ldots & v_{m,i_m} \end{vmatrix}.$$

Można na to spojrzeć tak: rzutujemy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … , $\mathbf{v}_m$ na podprzestrzeń wyznaczoną przez wektory $\mathbf{e}_{i_1}$, $\mathbf{e}_{i_2}$, … , $\mathbf{e}_{i_m}$ i obliczmy objętość (miarę m–wymiarową) równoległościanu rozpiętego przez te rzuty, którą mnożymy przez ± 1 w zależności od tego czy uporządkowana m–tka tych rzutów ma orientację zgodną z orientacją m–tki $\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_m}$, czy przeciwną. Dzięki wyborowi znaku otrzymujemy funkcję klasy C^∞. Tę formę oznaczać będziemy zwykle dziwnym symbolem:

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}.$$

Jasne jest, że jeśli nie założymy, że $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ i zdefiniujemy tak samo $\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}$, to okaże się, że jeśli wśród liczb $i_1, i_2, \ldots, i_m$ są co najmniej dwie równe, to

$$\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = 0$$

i ogólnie zmiana kolejności czynników $\mathrm{d}x_{i_1}, \mathrm{d}x_{i_2}, \ldots, \mathrm{d}x_{i_m}$ prowadzi do zmiany znaku formy, jeśli permutacja symboli jest nieparzysta i do tej samej formy (tylko nieco inaczej zapisanej), jeśli permutacja jest parzysta. ■

Przykład 12.25 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 = = -\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 = 0$. ■

Jasne jest, że formy zewnętrzne stopnia m na $\mathbb{R}^k$ tworzą przestrzeń liniową wymiaru $\binom{k}{m}$ oraz że formy opisane w definicji 16.10 stanowią bazę w tej przestrzeni. Wobec tego każdą m–formę zewnętrzną na $\mathbb{R}^k$ możemy zapisać w postaci

$$\textstyle\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le k} a_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m},$$

sumowanie odbywa się po wszystkich wyborach numerów $i_1, i_2, \ldots, i_m$ spełniających warunek widoczny przy znaku sumy.

Definicja 12.26 (elementarnej jednoformy)
W przypadku $m = 1$ otrzymujemy $\mathrm{d}x_i(\sum v_j\mathbf{e}_j) = v_i$. Funkcje $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, ... , $\mathrm{d}x_k$ są przekształceniami liniowymi o wartościach w przestrzeni jednowymiarowej (czyli funkcjonałami) tworzącymi w przestrzeni $(\mathbb{R}^k)^*$ bazę sprzężoną do bazy ortonormalnej $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_k$. ■

Można i należy myśleć o tym w sposób opisany dalej w kilku zdaniach. Funkcja przypisująca punktowi $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ liczbę x_j oznaczana jest często (nawet chyba na ogół) symbolem x_j, czyli wartość funkcji i sama funkcja oznaczane są tak samo. $\mathrm{d}x_j$ oznacza różniczkę tej funkcji. Ponieważ wspomniana funkcja, czyli rzut na j–tą oś układu współrzędnych, jest liniowa, więc jej różniczka to ta sama funkcja liniowa, czyli rzut na j–tą oś układu współrzędnych. Moglibyśmy teoretycznie opisać Dx_j, ale powszechnie stosowanym oznaczeniem jest $\mathrm{d}x_j$, zresztą za chwilę okaże się, że to drugie jest lepsze i że należy w tym kontekście używać nieco innego symbolu niż poprzednio.

Zdefiniujemy teraz m–formę na otwartym podzbiorze $G \subseteq \mathbb{R}^k$. W tym celu oznaczmy przez $L^m_{as}(R^k)$ zbiór m–linowych antysymetrycznych przekształceń liniowych na $\mathbb{R}^k$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Jest to jak już wcześniej stwierdziliśmy przestrzeń liniowa wymiaru $\binom{k}{m}$.

Definicja 12.27 (zewnętrznej formy różniczkowej)
Odwzorowanie $\omega\colon G \longrightarrow L^m_{as}(R^k)$ nazywamy zewnętrzną formą różniczkową stopnia m. Jeśli jest ono klasy C^r, to mówimy, że forma różniczkowa jest klasy C^r. Zbiór form różniczkowych stopnia m oznaczać będziemy symbolem $\Omega^m(G)$. ■

Nie uwidaczniamy tu klasy różniczkowalności, ale w razie potrzeby będzie mówić ile razy różniczkowalna ma być forma różniczkowa. Jeśli nie wspomnimy o tym, należy zakładać, że mowa jest o formie klasy C^1.

Przyjmujemy dodatkowo, że $\Omega^0(G)$ oznacza zbiór funkcji rzeczywistych na zbiorze otwartym G.

Każdą funkcję o wartościach w przestrzeni liniowej można zapisać w wybranej bazie. Naszą wybraną bazą będą standardowo formy postaci $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}$ opisane nieco wcześniej w jednym z przykładów. Jeśli $\omega \in \Omega^m(G)$, to istnieją takie funkcje rzeczywiste $\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ określone na zbiorze G, że

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}\ .$$

Jest jasne, że forma różniczkowa jest klasy C^r na zbiorze G wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje $\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{x})$ są tej właśnie klasy.

Zdefiniujemy iloczyn zewnętrzny form różniczkowych.

Definicja 12.28 (iloczynu zewnętrznego form zewnętrznych)
Przyjmujemy, że
$(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}) \wedge (\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_n}) =$

$= \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_n}$, ■

Jeśli $\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}$ jest formą zewnętrzną stopnia m, $\eta = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_n} \eta_{j_1,j_2,\ldots,j_n}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_n}$ — formą zewnętrzna stopnia n, to ich iloczynem zewnętrznym nazywamy formę $\omega \wedge \eta$ zdefiniowaną za pomocą równości:

$$\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_m \\ j_1<j_2<\cdots<j_n}} \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{x})\eta_{j_1,j_2,\ldots,j_n}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_n}. \blacksquare$$

Jeśli nie zachodzą nierówności $i_1 < i_2 < \cdots < i_m < j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, to zmieniamy kolejność zmiennych przestawiając zmienne $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, \mathrm{d}x_{j_n}$ na właściwe miejsca, a każde przestawienie o jedno miejsce powoduje jedna zmiane znaku. Oczywiście, jeśli którakolwiek zmienna powtarza się, to forma jest równa 0. Jest tak zawsze w sytuacji, gdy $m + n > k$.

Przykład 12.29 $(x_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + x_1\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_2\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1) \wedge (\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3) =$
$=(x_1 + x_2 + x_3)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$. ■

Bez większego trudu możemy przekonać się, że zachodzi

Twierdzenie 12.30 (o własnościach iloczynu zewnętrznego form)

1. $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$ dla dowolnej m–formy ω_1 i dowolnych n–form ω_2, ω_3;

2. $\omega \wedge (t\eta) = t\omega \wedge \eta$ dla dowolnej m–formy ω, dowolnej n–formy η i dla dowolnej liczby rzeczywistej t;

2'. $\omega \wedge (f\eta) = f\omega \wedge \eta$ dla dowolnej m–formy ω, dowolnej n–formy η i dla dowolnej funkcji rzeczywistej f;

3. $\omega \wedge \eta = (-1)^{mn}\eta \wedge \omega$ dla dowolnej m–formy ω i dowolnej n–formy η. ■

Definicja 12.31 (różniczki zewnętrznej m–formy różniczkowej)
$\mathrm{d}\big(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}\big) =$

$$= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_m}}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}.$$

Zakładamy, że różniczkowana forma jest klasy C^r, $r \geq 1$. Zakładamy też, że jeśli i jest jedną z liczb $i_1, i_2, \ldots, i_m$, to $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}$ jest przekształceniem zerowym. Jeśli wśród liczb $i_1, i_2, \ldots, i_m$ liczby i nie ma oraz $i_s < i < i_{s+1}$, to
$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} =$

$$= (-1)^s\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_s \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{s+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}. \blacksquare$$

Ta definicja jest zgodna z tym, czego należy oczekiwać — odpowiada ona temu, że przestawiając wiersz wyznacznika s razy zmieniamy jego znak właśnie tyle razy. Jest w niej zbyt wiele słów, ale zdecydowałem się na pewne powtórzenia w nadziei, że ułatwią studentom lekturę.

Z definicji tej wynika, że spełnione jest następujące twierdzenie, którego rachunkowy dowód pozostawiam czytającym ten tekst studentom.

Twierdzenie 12.32 (o własnościach różniczki zewnętrznej)

1. $\mathrm{d}(\omega+\eta) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\eta$ dla dowolnych m– form ω, η;
2. $\mathrm{d}(t\omega) = t\,\mathrm{d}\omega$ dla dowolnej m–formy ω i liczby rzeczywistej t.
3. $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^m\omega\wedge\mathrm{d}\eta$ dla dowolnej m–formy ω i dowolnej n–formy η.
4. $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ dla dowolnej formy klasy C^2.

Dowód trudny nie jest, ale wypada stwierdzić, że własność czwarta to po prostu twierdzenie o symetrii drugiej różniczki funkcji klasy C^2. Własność trzecia to w zasadzie zwykły wzór na pochodną iloczynu uwzględniający to, że mnożenie zewnętrzne przemienne nie jest.

Znaczenie własności czwartej jest ogromne, ale niestety w analizie brak miejsca na dokładniejsze rozważania, czy choćby ilustracje. Powiedzmy tylko, że z tego wzoru płyną daleko idące wnioski dotyczące struktury topologicznej dziedziny, na której rozpatrywane są formy różniczkowe zewnętrzne.

Jeśli $\varphi\colon G \longrightarrow H$ jest przekształceniem klasy C^r i ω jest m–formą na H, to można określić formę $\varphi^*(\omega)$ na zbiorze G za pomocą wzoru

$$\varphi^*(\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m) = \omega\big(\varphi(\mathbf{x})\big)\big(D\varphi(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, D\varphi(\mathbf{x})\mathbf{v}_2,\ldots,D\varphi(\mathbf{x})\mathbf{v}_m\big).$$

Oczywiście na ogół jeśli ω jest formą klasy C^r, to $\varphi^*(\omega)$ jest formą klasy C^{r-1}. Nie trzeba oczywiście zakładać różnowartościowości przekształcenia φ.

Można łatwo sprawdzić, że spełnione są następujące wzory:

1. $\varphi^*(\omega+\eta) = \varphi^*(\omega)+\varphi^*(\eta)$ dla dowolnych m–form ω i η;
2. $\varphi^*(f\omega) = f\circ\varphi\cdot\varphi^*(\omega)$ dla dowolnej m–formy ω i dowolnej funkcji φ;
3. $\varphi^*(\omega\wedge\eta) = \varphi^*(\omega)\wedge\varphi^*(\eta)$ dla dowolnej m–formy ω i dowolnej n–formy η;
4. $\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\big(\varphi^*(\omega)\big)$ dla dowolnej m–formy ω i dowolnej funkcji φ.

Przykład 12.33 Jeśli $\varphi(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)$ oraz $\omega(x,y,z) = x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, to

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\omega)(\alpha,\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}(\cos\alpha\sin\beta)\wedge\mathrm{d}(\sin\alpha) + \cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{d}(\sin\alpha)\wedge\mathrm{d}(\cos\alpha\cos\beta) + \\
&\qquad + \sin\alpha\,\mathrm{d}(\cos\alpha\cos\beta)\wedge\mathrm{d}(\cos\alpha\sin\beta) = \\
&= \cos\alpha\cos\beta(-\sin\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}\alpha + \cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}\beta)\wedge(\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha) + \\
&\quad + \cos\alpha\sin\beta(\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha)\wedge(-\sin\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}\alpha - \cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{d}\beta) + \\
&\qquad + \sin\alpha\big(-\sin\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}\alpha - \cos\alpha\sin\beta\,\mathrm{d}\beta\big)\wedge\big(-\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha + \cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{d}\beta\big) = \\
&= \big(-\cos^3\alpha\cos^2\beta - \cos^3\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta\big)\,\mathrm{d}\alpha\wedge\mathrm{d}\beta = \\
&= -\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\wedge\mathrm{d}\beta = \cos\alpha\,\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\alpha. \blacksquare
\end{aligned}$$

Formy różniczkowe można całkować.

Definicja 12.34 (całki z k–formy na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^k$)
Jeśli $\omega(\mathbf{x}) = \omega_{1,2,\ldots,k}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_k$ dla $\mathbf{x}\in\operatorname{int}G$, to definiujemy

$$\int_G\omega = \int_G\omega_{1,2,\ldots,k}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\ell_k(\mathbf{x}).$$

Jeśli $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ jest permutacją liczb $(1, 2, \ldots, k)$ i dla każdego $x \in G$ spełniona jest równość $\eta(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, to prawdziwy jest wzór

$$\int_G \eta = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_k) \int_G f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\ell_k,$$

tu symbol $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ oznacza znak permutacji $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. ■

Mówimy, że dyfeomorfizm $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy $\det\big(D\varphi(\mathbf{x})\big) > 0$ dla $\mathbf{x} \in G$.

Możemy teraz sformułować ważny choć bardzo prosty

Lemat 12.35 (o zamianie zmiennych)
Jeśli φ jest zachowującym orientację dyfeomorfizmem zbioru otwartego $G \subseteq \mathbb{R}^k$ na zbiór $\varphi(G)$, k–forma różniczkowa ω jest określona na zbiorze $\varphi(G)$, to zachodzi równość $\int_{\varphi(G)} \omega = \int_G \varphi^*(\omega)$. ■

Dowód lematu pomijamy. Polega on na bezpośrednim zastosowaniu definicji całki z formy i twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a. Występująca w twierdzeniu o zamianie zmiennych wartość bezwzględna w niczym nie przeszkadza, bo dyfeomorfizm, z którym mamy do czynienia zachowuje orientację — wybieramy mapy zgodne z nią!

Zdefiniujemy teraz całkę z formy różniczkowej określonej na rozmaitości zwartej. Zaczniemy od twierdzenia, którego uogólnienia Czytelnik może znaleźć np. w książce Ryszarda Engelkinga „Topologia ogólna" lub w krótszej wersji „Zarys topologii ogólnej", w rozdziale poświęconym przestrzeniom parazwartym.

Lemat 12.36 (o wpisywaniu pokryć)
Jeśli U_1, U_2,…,U_n są otwartymi podzbiorami przestrzeni metrycznej X i spełniona jest równość $X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$, to istnieją takie zbiory otwarte V_1, V_2,…, V_n, że $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n = X$ oraz $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$.

Dowód. Niech $F_1 = X \setminus (U_2 \cup U_3 \cup \ldots U_n)$, $H = X \setminus U_1$. Zbiory $F_1 \subseteq U_1$, H są domknięte jako dopełnienia otwartych. Oczywiście $F_1 \cap H = \emptyset$. Istnieją więc rozłączne zbiory otwarte $V_1 \supseteq F_1$ i $W \supseteq H$. Ponieważ $V_1 \subseteq X \setminus W$, więc $\overline{V_1} \subseteq X \setminus W \subseteq U_1$. Oczywiście $V_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n = X$. W taki sam sposób zastępujemy kolejne zbiory U_2, … , U_n przez mniejsze zbiory V_2,…,V_n — indukcja. ■

Uwaga 12.37
Jeśli dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi $V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$, to pokrycie $\{V_i\colon \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy wpisanym w pokrycie $\{U_i\colon \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$. ■

Lemat 12.38 (Urysohna — gładka wersja)[4]
Jeśli zbiory $F, H \subset \mathbb{R}^k$ są domknięte i rozłączne, to istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0, 1]$, że $f(x) = 0$ dla każdego $x \in F$ oraz $f(x) = 1$ dla każdego $x \in H$.

Dowód. Niech $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0, \infty)$ będą takimi funkcjami klasy C^∞, które zerują się odpowiednio na F i H, a poza tym każda z nich jest dodatnia (istnienie takich

[4] Profesor Jerzy Mioduszewski twierdzi, że łuzin pierwszy to udowodnił w tej wersji, a Urysohn zastąpił gładkość ciągłością i przeniósł na dowolne przestrzenie metryczne.

funkcji jest treścią twierdzenia o najpaskudniejszej poziomicy, z I semestru). Niech $f(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\beta(x)}$. Ponieważ $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$, więc funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, a ponieważ $\beta(x) = 0$ dla $x \in H$, więc $f(x) = 1$ dla $x \in H$. Dowód został zakończony. ∎

Zadanie 12.1 Udowodnić, że jeśli zbiory $F, H \subset \mathbb{R}^k$ są domknięte i rozłączne, to istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,1]$, że $f(x) = 0 \iff x \in F$ oraz $f(x) = 1 \iff x \in H$. ∎

Definicja 12.39 (nośnika funkcji)
Jeśli $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją określoną na przestrzeni metrycznej X, to zbiór domknięty $\overline{\{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}}$ nazywamy nośnikiem funkcji f i oznaczamy symbolem $\mathrm{supp}(f)$.[5] ∎

Definicja 12.40 (rozkładu jedności wpisanego w rodzinę)
Mówimy, że ciąg funkcji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest rozkładem jedności wpisanym w rodzinę $\{U_i\colon \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{supp}\alpha_i \subseteq U_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i dla każdego $x \in U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ zachodzi równość $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \cdots + \alpha_n(x) = 1$. ∎

W zasadzie będziemy wpisywać rozkłady jedności w rodziny zbiorów otwartych. Ogólnie nie wymaga się skończoności rodziny, ale ograniczamy definicje do przypadku, który występuje w dalszym ciągu.

Definicja 12.41 (o istnieniu rozkładów jedności)
Dla każdej rodziny $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^k$ istnieje rozkład jedności klasy C^∞ w nią wpisany.

Dowód. Z lematu o wpisywaniu pokryć wynika, że istnieją takie zbiory otwarte $V_1, V_2, \ldots, V_n, W_1, W_2, \ldots, W_n$, że $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ oraz $\overline{V_i} \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Niech β_i będzie funkcją klasy C^∞, która jest równa 1 na zbiorze V_i i 0 poza zbiorem W_i — istnienie takiej funkcji wynika z lematu Urysohna dla funkcji gładkich. Niech $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta_1+\beta_2+\cdot+\beta_n}$. Jasne jest, że zdefiniowaliśmy rozkład jedności wpisany w rodzinę $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. ∎

Definicja 12.42 (funkcji gładkich na rozmaitości)
Niech M, N będą rozmaitościami klasy C^r, $r \geq 1$. Mówimy, że funkcja $f\colon M \longrightarrow N$ jest klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$ istnieją takie mapy φ określona w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ i ψ określona w otoczeniu punktu $f(\mathbf{p})$, że przekształcenie $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jest klasy C^r. ∎

W tej definicji pisząc $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ mamy oczywiście na myśli funkcję f ograniczoną do tak małego otoczenia punktu $\mathbf{p}$, by rozpatrywane złożenie miało sens.

łatwo stwierdzić można, że funkcje klasy C^r o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^\ell$ określone w otoczeniu rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$ klasy C^r są, po ograniczeniu dziedziny do M, klasy C^r w sensie nowej definicji.

Czytelnicy bez większych trudności przeniosą twierdzenie o istnieniu rozkładów jedności na rozmaitości.

[5] Od angielskiego słowa *support*.

Definicja 12.43 (całki z formy różniczkowej)
Załóżmy, że ω jest m–formą różniczkową klasy C^1 określoną w otoczeniu m–wymiarowej, zorientowanej rozmaitości zwartej $M \subseteq \mathbb{R}^k$ (lub tylko na samej rozmaitości M). Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będzie rozkładem jedności klasy C^1, określonym na rozmaitości M, przy czym dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ istnieje mapa φ_i klasy C^1, zgodna z orientacją , której dziedzina U_i zawiera nośnik funkcji α_i. Definiujemy całkę z formy ω:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\varphi_i(U_i)} \left(\varphi_i^{-1}\right)^*(\alpha_i \cdot \omega). \ \blacksquare$$

Podanie takiej definicji wymaga jednak tego, by przekonać się o niezależności całki z formy różniczkowej od wyboru rozkładu jedności i map. Zauważmy, że jeśli mamy dwa rozkłady jedności $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ i $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\ell$, to zachodzi też równość $\sum_{i,j} \alpha_i\beta_j = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\ell) = 1$. Jednocześnie mamy $\operatorname{supp}(\alpha_i\beta_j) \subseteq \operatorname{supp}(\alpha_i) \cap \operatorname{supp}(\beta_j)$. Wiemy też, że podana definicja całki na zbiorze, na którym określone są dwie mapy daje ten sam wynik (lemat 16.18 o zamianie zmiennych). Wynika stąd, że całka $\int_M (\alpha_j \cdot \beta_j)\omega$ jest dobrze określona, tzn. użycie w definicji mapy $\varphi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ daje ten sam wynik, co użycie mapy $\psi_j \colon V_j \longrightarrow \mathbb{R}^m$, w istocie rzeczy ważne jest to, że są one obie określone na zbiorze $U_i \cap V_j$. Całka z formy ω jest więc sumą $n \cdot \ell$ całek z formy ω pomnożonej przez funkcję $\alpha_i \cdot \beta_j$, a te całki nie zależą od używanej ich definicji mapy.

Uwaga 12.44 (o formach określonych na rozmaitości)
Mówimy, że na rozmaitości M jest określona s–forma ω (forma stopnia s), jeśli dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$ określone jest przekształcenie s–liniowe antysymetryczne

$$\omega(\mathbf{p}) \colon \underbrace{T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \times \cdots \times T_{\mathbf{p}}M}_{\text{s czynników}} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Forma ω jest klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej mapy φ forma $\left(\varphi^{-1}\right)^*(\omega)$ jest klasy C^r, ta ostatnia jest określona na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^m$, oczywiście aby wszystkie operacje miały sens należy ograniczać dziedzinę formy. Trzeba też założyć, że rozmaitość M oraz rozpatrywane mapy są klasy co najmniej C^{r+1}. Formy określone na rozmaitościach niekoniecznie zanurzonych w przestrzeni euklidesowej mają duże znaczenie w geometrii różniczkowej i wielu działach analizy. W tym wykładzie wystąpią w jednym twierdzeniu. $\blacksquare$

Uwaga 12.45
Czytelnik może rozszerzyć definicję całki z formy po całej rozmaitości i zdefiniować całkę z formy po jej otwartym podzbiorze. W naszym ujęciu to tylko kwestia istnienia skończonego pokrycia dziedzinami map zbioru, po którym zamierzamy całkować. $\blacksquare$

Przykład 12.46 Niech $\omega(x, y, z) = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Obliczymy całkę z tej formy po sferze jednostkowej S^2, złożonej z tych punktów (x, y, z), dla których

$x^2+y^2+z^2=1$. Załóżmy, że jest ona zorientowana w ten sposób, że uporządkowana para wektorów $(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, które są styczne do sfery w punkcie $(1,0,0)$, jest zgodna z orientacją. Niech $(u,v)=\varphi(x,y,z)=\big(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\big)$. Oczywiście przekształcenie φ jest klasy C^∞ poza płaszczyzną $z=-1$, na której nie jest zdefiniowane. Jest niezdefiniowane tylko w jednym punkcie sfery, mianowicie w punkcie $(0,0,-1)$. Na sferze jest różnowartościowe. Dla dowodu wystarczy podać wzór na przekształcenie odwrotne, co wymaga rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ \frac{x}{1+z}=u, \\ \frac{y}{1+z}=v. \end{cases}$$

Niewiadomymi są tu x,y,z. Mamy $1-z^2=x^2+y^2=u^2(1+z)^2+v^2(1+z)^2$, więc $1-z=(1+z)(u^2+v^2)$. Stąd $z=\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$, zatem $1+z=\frac{2}{1+u^2+v^2}$, więc $x=\frac{2u}{1+u^2+v^2}$, $y=\frac{2v}{1+u^2+v^2}$. Możemy napisać

$$(x,y,z)=\varphi^{-1}(u,v)=\big(\tfrac{2u}{1+u^2+v^2},\tfrac{2v}{1+u^2+v^2},\tfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\big).$$

Mamy więc (bezmyślne obliczenia)

$$\begin{aligned}
&(\varphi^{-1})^*(\omega)(u,v)=\tfrac{2u}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}\big(\tfrac{2v}{1+u^2+v^2}\big)\wedge\mathrm{d}\big(\tfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\big)+\\
&\qquad+\tfrac{2v}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\big)\wedge\mathrm{d}\big(\tfrac{2u}{1+u^2+v^2}\big)+\tfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}\big(\tfrac{2u}{1+u^2+v^2}\big)\wedge\mathrm{d}\big(\tfrac{2v}{1+u^2+v^2}\big)=\\
&=\tfrac{2u}{1+u^2+v^2}\big(\tfrac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u+\tfrac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\tfrac{-4u}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u+\tfrac{-4v}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}v\big)+\\
&+\tfrac{2v}{1+u^2+v^2}\big(\tfrac{-4u}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u+\tfrac{-4v}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\tfrac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u+\tfrac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}v\big)+\\
&+\tfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\big(\tfrac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u+\tfrac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\tfrac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u+\tfrac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}v\big)=\\
&=\tfrac{1}{(1+u^2+v^2)^5}\left(2u\begin{vmatrix}-4uv & 2(1+u^2-v^2)\\ -4u & -4v\end{vmatrix}+2v\begin{vmatrix}-4u & -4v\\ 2(1-u^2+v^2) & -4uv\end{vmatrix}+\right.\\
&\qquad\left.+(1-u^2-v^2)\begin{vmatrix}2(1-u^2+v^2) & -4uv\\ -4uv & 2(1+u^2-v^2)\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\\
&=\tfrac{4}{(1+u^2+v^2)^5}\left(4u^2\begin{vmatrix}-2v & 1+u^2-v^2\\ -1 & -v\end{vmatrix}+4v^2\begin{vmatrix}-u & -1\\ 1-u^2+v^2 & -2u\end{vmatrix}+\right.\\
&\qquad\left.+(1-u^2-v^2)\begin{vmatrix}1-u^2+v^2 & -2uv\\ -2uv & 1+u^2-v^2\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\\
&=\tfrac{4}{(1+u^2+v^2)^5}\big[4u^2(2v^2+1+u^2-v^2)+4v^2(2u^2+1-u^2+v^2)+\\
&\qquad+(1-u^2-v^2)(1-(u^2-v^2)^2-4u^2v^2)\big]\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\\
&=\tfrac{4}{(1+u^2+v^2)^5}\big[4(u^2+v^2)(1+u^2+v^2)+(1-u^2-v^2)\big(1-(u^2+v^2)^2\big)\big]\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\\
&=\tfrac{4}{(1+u^2+v^2)^4}\big[4(u^2+v^2)+(1-u^2-v^2)^2\big]\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\tfrac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Mapa φ jest określona na prawie całej sferze, poza dziedziną jest tylko jeden punkt: $(0,0,-1)$. Wobec tego $\int_{S^2}\omega=\int_{\mathbb{R}^2}(\varphi^{-1})^*(\omega)=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=$

$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\,\mathrm{d}\ell_2 \xlongequal[v=r\sin\theta]{u=r\cos\theta} \int_{r>0,\,|\theta|<\pi} \frac{4}{(1+r^2)^2}\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\,\mathrm{d}\ell_2 =$
$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{4r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}\ell_2 = 2\pi\cdot\big(-\frac{2}{(1+r^2)}\big|_0^{\infty} = 4\pi.$

Obliczenia zakończyliśmy. Mogliśmy użyć innej mapy, np. określonej na innym zbiorze. Niech $x=\cos\alpha\cos\beta$, $y=\cos\alpha\sin\beta$, $z=\sin\alpha$ dla $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$, $|\beta|<\pi$. Zdefiniowaliśmy parametryzację prawie całej sfery, z wyjątkiem jednego domkniętego półokręgu, którego punkty (x,y,z) spełniają warunki $x\le 0$, $y=0$, $x^2+z^2=1$, którego miara jest równa 0. Uporządkowana para $\big(\frac{\partial x}{\partial\beta},\frac{\partial y}{\partial\beta},\frac{\partial z}{\partial\beta}\big)$, $\big(\frac{\partial x}{\partial\alpha},\frac{\partial y}{\partial\alpha},\frac{\partial z}{\partial\alpha}\big)$ wektorów stycznych do sfery w punkcie $(\cos\alpha\cos\beta,\cos\alpha\sin\beta,\sin\alpha)$ wyznacza „orientację określoną przez zewnętrzny wektor normalny". Wobec tego (por. przykład 16.17):

$\int_{S^2}\omega = \int_{|\beta|<\pi,2|\alpha|<\pi}\cos\alpha\,\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\alpha = \int_{|\beta|<\pi,2|\alpha|<\pi}\cos\alpha\,\mathrm{d}\ell_2 \xlongequal{Fubini}$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha\,\mathrm{d}\beta\Big)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(2\pi\cos\alpha\big)\,\mathrm{d}\alpha = 4\pi. \ \blacksquare$$

Uwaga 12.47

Wynik z ostatniego przykładu był do przewidzenia bez obliczeń. Mamy bowiem
$(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)(\mathbf{v},\mathbf{w}) = x\begin{vmatrix}v_2 & w_2\\ v_3 & w_3\end{vmatrix} + y\begin{vmatrix}v_3 & w_3\\ v_1 & w_1\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix}v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\end{vmatrix} =$
$= (x,y,z)\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \sqrt{\begin{vmatrix}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\end{vmatrix}}$, jeśli trójka wektorów $(x,y,z),\mathbf{v},\mathbf{w}$ jest dodatnio zorientowana w $\mathbb{R}^3$, przypominam, że $x^2+y^2+z^2=1$, więc całkowanie tej formy po sferze to całkowanie funkcji charakterystycznej sfery względem miary Lebesgue'a–Riemanna, zatem całka jest miarą tej sfery (czyli jej polem). $\blacksquare$

Pokażemy teraz, jak można użyć form różniczkowych do uogólnienia twierdzenia o orientowalności w kowymiarze 1 (rozmaitość jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nigdzie niezerujące się ciągłe pole wektorów normalnych).

Stwierdzenie 12.48 (o orientowalności)

Rozmaitość spójna M, klasy C^r, wymiaru m jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka forma ω klasy C^{r-1}, stopnia m określona na M, że dla każdego $\mathbf{p}\in M$ i dowolnych liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_m\in T_{\mathbf{p}}M$ zachodzi nierówność $\omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_m)\neq 0$.

Dowód. Jeśli taka forma istnieje, to rozmaitość można zorientować przyjmując, że uporządkowana baza $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_m$ w przestrzeni $T_{\mathbf{p}}M$ jest zgodna z orientacją wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_m)>0$. Atlas orientujący uzyskujemy rozpatrując te mapy φ, dla których kolumny macierzy $D\varphi^{-1}\big(\varphi(\mathbf{x})\big)$ są bazą zgodną z orientacją. Jasne jest, że przy takiej definicji $\det(D(\psi\circ\varphi^{-1}))>0$ dla dowolnych map φ,ψ spełniających nałożony warunek.

Załóżmy teraz, że rozmaitość M jest orientowalna. Niech $\{(U_i,\varphi_i)\}$ będzie atlasem definiującym jej orientację, $\varphi_i\colon U_i\longrightarrow\mathbb{R}^m$ jest mapą, której dziedziną jest zbiór U_i otwarty w przestrzeni M. Zbiór $V_i=\varphi_i(U_i)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$. Niech $\psi_i=\varphi_i^{-1}$. Zdefiniujemy m–formę ω_i na zbiorze V_i. Niech

$$\omega_i(\mathbf{y}) = \sqrt{\det\big[\big(D\psi_i(\mathbf{y})\big)^T\cdot D\psi_i(\mathbf{y})\big]}\ \mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2\wedge\dots\wedge\mathrm{d}y_m.$$

Ponieważ rozmaitość jest zorientowana, więc dla każdej parametryzacji ψ_j zachodzi równość $(\varphi_i \circ \psi_j)^*(\omega_i) = \omega_j$, oczywiście na zbiorze $V_j \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)$ — obliczenia bardzo podobne do tych, które miały miejsce przy sprawdzaniu, że definicja miary na rozmaitości jest niezależna od wyboru mapy, korzystamy też oczywiście z nierówności $\det(D(\varphi_i \circ \psi_j)) > 0$. Z tego wynika, że definiując formę ω wzorem $\omega = (\varphi_i)^*(\omega_i)$ na zbiorze U_i. Jasne jest, że tak zdefiniowana forma spełnia oczekiwane warunki. ■

Uwaga 12.49
Podany dowód można przeprowadzić nieco inaczej. Na zbiorze U_i można określić formę $\nu_i = (\varphi_i)^*(\,dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_m)$. Ta forma nie znika w żadnym punkcie zbioru U_i, co więcej, przyjmuje dodatnią wartość na dowolnej bazie przestrzeni $T_{\mathbf{x}}M$, zgodnej z orientacją, dla każdego $\mathbf{x} \in U_i$. Następnie wpisać gładki rozkład jedności $\{\alpha_i\}$ w pokrycie $\{U_i\}$ i zdefiniować formę ν na całej rozmaitości M wzorem $\nu = \sum_i \alpha_i \nu_i$. Dowód jest nieco krótszy, ale mniej widoczny jest jego związek z miarą ma M. Nigdzie niezerująca się forma stopnia m na rozmaitości M często nazywana jest *formą objętości* na rozmaitości M. ■

Przejdziemy teraz do uogólnienia twierdzenia Greena na dowolne rozmaitości zwarte. To uogólnienie nazywane jest twierdzeniem Stokesa. Zaczniemy od szczególnego przypadku.

Lemat 12.50 (twierdzenie Stokesa dla kostki)
Jeśli ω jest $m-1$–formą klasy C^1, określoną w otoczeniu kostki $Q = [0,1]^m$, której każda ściana jest zorientowana za pomocą zewnętrznego wektora normalnego, to zachodzi równość

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega\,.$$

Dowód. Istnieją takie funkcje $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ klasy C^1, że

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum (-1)^{i-1}\omega_i(\mathbf{x})\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

symbol $\widehat{dx_i}$ oznacza, że ten jeden czynnik pomijamy. Dla każdego i mamy

$$d\big((-1)^{i-1}\omega_i(\mathbf{x})\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m\big) = \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_i}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_i \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Z definicji całki z formy i z twierdzenia Fubiniego wynika, że

$\int_Q \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_i \wedge \cdots \wedge dx_m = \int_Q \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}\,d\ell_m =$
$= \int_{Q_{m-1}} \big(\omega_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_m) - \omega_i(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_m)\big)\,d\ell_{m-1} =$
$= \int_{\partial Q_m} (-1)^{i-1}\omega_i(\mathbf{x})\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m.$ — ostatnia równość równość wynika z tego, że na każdej ścianie kostki jedna ze współrzędnych jest stała, aby całka była różna od 0 musi to być i–ta współrzędna, po uwzględnieniu orientacji otrzymujemy ostatnią równość.[6] Po zsumowaniu uzyskanych równości otrzymujemy tezę. ■

Twierdzenie 12.51 (Stokesa)
Dla każdej $m-1$–formy ω klasy C^1 na zorientowanej rozmaitości zwartej M zachodzi

[6] Zewnętrzny wektor normalny w punktach ściany danej równaniem $x_i = 1$ to wektor $\mathbf{e}_i$, a w punktach ściany danej równaniem $x_i = 0$ to wektor $-\mathbf{e}_i$.

równość
$$\int_{\partial M}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega\ .$$

Dowód. Pokrywamy rozmaitość M zbiorami otwartymi U_1, U_2, ... , U_n, które są dziedzinami map $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$, zgodnych z orientacją. Zakładamy, że w pokrycie $\{U_i\}$ można wpisać taki rozkład jedności $\{\alpha_i\}$, że mapa przekształca nośnik funkcji α_i w pewną m–wymiarową kostkę Q_i. Dodatkowo, jeśli $\mathbf{x}\in U_i\cap\partial M$, to $\varphi_i(\mathbf{x})\in\partial Q_i$. Mamy teraz
$\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial M}(\sum_i\alpha_i)\omega=\sum_i\int_{\partial M}\alpha_i\omega \xlongequal[\textit{dla kostki}]{\textit{tw. Stokesa}} \sum_i\int_M \mathrm{d}(\alpha_i\omega)=$
$=\sum_i\int_M \mathrm{d}\alpha_i\wedge\omega+\sum_i\int_M\alpha_i\,\mathrm{d}\omega=\int_M\big(\sum_i \mathrm{d}\alpha_i\big)\omega+\int_M\big(\sum_i\alpha_i\big)\,\mathrm{d}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega$
— ostatnia równość wynika z tego, że $\sum_i\alpha_i(\mathbf{x})=1$ dla każdego $\mathbf{x}\in M$. ■

Uwaga 12.52
W twietdzeniu założyliśmy, że zbiór M jest rozmaitością z brzegiem. W szczególności „brzeg" jest rozmaitością (już bez brzegu). W rezultacie tak sformułowane twierdzenie nie daje się użyć w różnych, ważnych przypadkach, np. gdy M jest prostokątem, prostopadłościanem itp. W istocie rzeczy to założennie jest zbyt mocne. Można dopuścić rogi, załamania, byle nie było ich zbyt dużo. Należałoby jednak wyjaśnić, co to znaczy. Napiszę nie wchodząc w szczegóły. Należy zakładać, że zbiór M jest zwarty i po usunięciu zbioru B, którego $(m-1)$–wymiarowa miara Hausdorffa jest równa 0, staje się m–wymiarową rozmaitością z $(m-1)$–wymiarowym brzegiem. Należy wyjaśnić, co oznacza sformułowanie „$(m-1)$–*wymiarowa miara Hausdorffa jest równa* 0". Otóż oznacza to, że dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki ciąg kul $B(\mathbf{p}_1,r_1)$, $B(\mathbf{p}_2,r_2)$, ..., że $\sum_{n=1}^\infty r_i^{m-1}<\varepsilon$ oraz $\bigcup_{n=1}^\infty B(\mathbf{p}_n,r_n)\supseteq B$. W szczególności zbiór B może być sumą przeliczalnie wielu rozmaitości wymiaru mniejszego (ostro!) niż $m-1$. Szczegółowy dowód tej wersji twierdzenia znajdą zainteresowani studenci w wielokrotnie polecanym podręczniku „Analiza matematyczna" Andrzeja Birkholca. Można też znaleźć tę wersję twierdzenia w monografii „ Geometric measure theory" Herberta Federera. ■

Najbardziej klasyczna wersja twierdzenia Stokesa to zapewne twierdzenie zwane twierdzeniem Gaussa – Ostrogradzkiego występująca w wielu podręcznikach fizyki (w działach poświęconych elektryczności, magnetyzmowi). To bardzo szczególny przypadek: $M\subset\mathbb{R}^3$, $\dim M=3$. Wtedy wzór Stokesa wygląda tak:
$$\int_{\partial M}\big(P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big)=\int_M\big(\tfrac{\partial P}{\partial x}+\tfrac{\partial Q}{\partial y}+\tfrac{\partial R}{\partial z}\big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$
Z definicji całki z formy wynika, że prawa strona jest równa $\int_M\big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\big)\,\mathrm{d}\ell_3$. Przyjrzymy się lewej stronie. Załóżmy, że brzeg M został lokalnie sparametryzowany zgodnie z orientacją. Oznacza to, że możemy potraktować zmienne x,y,z jako funkcje dwóch argumentów, np. u,v. Wtedy zachodzą równości
$$P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=P\big(\tfrac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\tfrac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\tfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\tfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\big)+$$
$$+Q\big(\tfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\tfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\tfrac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\tfrac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\big)+R\big(\tfrac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\tfrac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\tfrac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\tfrac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\big)=$$
$$=\Big(P\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}+Q\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}+R\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\Big)=$$
$$=[P,Q,R]\cdot\Big(\big[\tfrac{\partial x}{\partial u},\tfrac{\partial y}{\partial u},\tfrac{\partial z}{\partial u}\big]\times\big[\tfrac{\partial x}{\partial v},\tfrac{\partial y}{\partial v},\tfrac{\partial z}{\partial v}\big]\Big)=[P,Q,R]\cdot\mathbf{n}\cdot\big\|\big[\tfrac{\partial x}{\partial u},\tfrac{\partial y}{\partial u},\tfrac{\partial z}{\partial u}\big]\times\tfrac{\partial x}{\partial v},\tfrac{\partial y}{\partial v},\tfrac{\partial z}{\partial v}\big]\big\|.$$

Wektor $\mathbf{n}$ to jednostkowy wektor otrzymany przez podzielenie iloczynu wektorowego $\left[\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right]\times\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\big]$ przez długość tego iloczynu. Jest więc prostopadły do płaszczyzny mnożonych wektorów, czyli płaszczyzny stycznej do rozmaitości ∂M i skierowany „na zewnątrz" M.

Ponieważ długość iloczynu wektorowego dwóch wektorów w $\mathbb{R}^3$ to pole równoległoboku przez nie rozpiętego, czyli pierwiastek z ich wyznacznika Grama, więc zachodzi równość $\int_{\partial M}\big(P\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y\big)=\int_{\partial M}[P,Q,R]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\ell_{\partial M}$. Możemy teraz zapisać klasyczną wersję twierdzenia Gaussa–Ostrogradzkiego:

$$\int_{\partial M}[P,Q,R]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\ell_{\partial M}=\int_M\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\ell_3=\int_M \operatorname{div}[P,Q,R]\,\mathrm{d}\ell_3.$$

Lewa strona zwana jest strumieniem pola $[P,Q,R]$ przez powierzchnię ∂M. Zachęcam Państwa do obejrzenia wyprowadzenia „fizycznego" tego twierdzenia, np. J.Orear „Fizyka", tom 1, tam fizycy mówią o liczbie linii sił pola. Dokładnie tak samo wygląda ten wzór w dowolnym wymiarze:

$$\int_{\partial M}\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\ell_{\partial M}=\int_M \operatorname{div}\mathbf{P}\,\mathrm{d}\ell_M,$$

gdzie $\mathbf{P}=(P_1,P_2,\ldots,P_m)$, $\operatorname{div}\mathbf{P}=\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial P_m}{\partial x_m}$[7], a $M\subseteq\mathbb{R}^m$ jest m–wymiarową rozmaitością z $(m-1)$–wymiarowym brzegiem.

Zapewne to dobry moment na podanie wzoru wiążącego minory iloczynu macierzy z minorami macierzy mnożonych. Załóżmy, że liczba kolumn macierzy $A=(a_{i,j})$ jest równa r jest równa liczbie wierszy macierzy $B=(b_{j,n})$. Niech $(c_{i,n})=C=AB$. Wybierzmy s wierszy macierzy A, czyli liczby $i_1<i_2<\cdots<i_s$ i tyleż samo kolumn macierzy macierzy B, czyli liczby $n_1<n_2<\cdots<n_s$. Wtedy zachodzi równość

$$\det(c_{i_\nu,n_\nu})=\sum\nolimits_{j_1<j_2<\cdots<j_s}\det(a_{i_\nu,j_\mu})\det(b_{j_\mu,n_\nu}),\qquad\mathbf{(G)},$$

sumujemy po wszystkich możliwych $\binom{r}{s}$ wyborach liczb $j_1<j_2<\cdots<j_s$. Wzór można dosyć szybko udowodnić korzystając z tego, że przy ustalonej macierzy B obie strony są s–liniowymi funkcjami antysymetrycznymi wierszy macierzy A. Oznacza to, że można sprawdzić, że równość ma miejsce, gdy wiersze macierzy A są wektorami liniowo niezależnymi wybranymi z pewnej ustalonej bazy, np. bazy $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots$. Wypisujemy więc kolejne wektory $\mathbf{e}_{j_1}$, $\mathbf{e}_{j_2}$, …,$\mathbf{e}_{j_s}$ jako wiersze macierzy A. Wtedy odpowiedni minor macierzy C jest po prostu równy minorowi macierzy B — zgadzają nawet współczynnik obu macierzy, więc tym bardziej ich wyznaczniki. Po prawej stronie tylko jeden z wybieranych minorów macierzy A jest niezerowy i to ten akurat, który mnożymy przez $\det(b_{j_\mu,n_\nu})$. W ten sposób wykazaliśmy wzór **(G)**.

Z wzoru **(G)** wynika, że wyznacznik Grama s wektorów w $\mathbb{R}^m$ jest sumą kwadratów wszystkich minorów wymiaru s macierzy, której wierszami są te właśnie wektory — to uogólnienie równości $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{v}\|^2\cdot\|\mathbf{w}\|^2-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2$, dla $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$.

O dywergencji powiemy jeszcze coś ważnego. Załóżmy, że rozpatrujemy układ m równań różniczkowych z m niewiadomymi funkcjami:

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{P}(\mathbf{x}(t)).$$

$\mathbf{P}$ jest funkcją klasy C^1. Wtedy, jak wiadomo z teorii równań różniczkowych, warunek

[7] Symbol div P czytamy: dywergencja pola $\mathbf{P}$.

początkowy wyznacza jednoznacznie rozwiązanie, które zależy gładko od tego warunku początkowego. Niech $\varphi_t(\mathbf{x})$ będzie funkcją zmiennych $t \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, która jest rozwiązaniem układu spełniającym warunek $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Mamy zatem

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\varphi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\varphi_t(\mathbf{x})).$$

Przy ustalonym t otrzymujemy przekształcenie określone na pewnym zbiorze otwartym (gdyby wszystkie rozwiązania były określone na całej prostej dla każdego warunku początkowego i funkcja $\mathbf{P}$ na całej przestrzeni $\mathbb{R}^m$, to przekształcenie φ_t byłoby określone na całym $\mathbb{R}^m$). Z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wynika, że $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, a ponieważ φ_0 jest identycznością, więc φ_t jest dyfeomerfizmem (odwrotne to φ_{-t}). Niech $\varphi_t = (\varphi_t^1, \varphi_t^2, \ldots, \varphi_t^m)$. Wtedy możemy napisać $\frac{\partial}{\partial t}\det(D\varphi_t) =$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_t^1}{\partial t\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi_t^1}{\partial t\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2\varphi_t^1}{\partial t\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_t^2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_t^m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^m}{\partial x_m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_t^1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial^2\varphi_t^2}{\partial t\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi_t^2}{\partial t\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2\varphi_t^2}{\partial t\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_t^m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^m}{\partial x_m} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_t^1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_t^2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_t^3}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi_t^m}{\partial t\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi_t^m}{\partial t\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2\varphi_t^m}{\partial t\partial x_m} \end{vmatrix}$$

— tylko w jednym wierszu w każdym z m wyznaczników występują pochodne drugiego rzędu. Do otrzymanego wzoru podstawiamy $t = 0$ pamiętając o tym, że $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ i $\frac{\partial\varphi_t^i}{\partial t}(\mathbf{x}) = P_i(\varphi_t(\mathbf{x}))$. W rezultacie $\frac{\partial}{\partial t}\det(D\varphi_t)\big|_{t=0} =$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial P_1}{\partial x_m} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial P_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial x_1} & \frac{\partial P_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial P_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \tfrac{\partial P_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial P_2}{\partial x_2} + \cdots + \tfrac{\partial P_m}{\partial x_m}.$$

Udowodniliśmy

Twierdzenie 12.53 (Liouville'a)
Jeśli pole wektorowe $\mathbf{P}$ jest klasy C^1, (φ_t) oznacza jego potok, to zachodzi równość:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\det(D\varphi_t)\big|_{t=0} = \tfrac{\partial P_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial P_2}{\partial x_2} + \cdots + \tfrac{\partial P_m}{\partial x_m}. \ \blacksquare$$

Wniosek 12.54

$$\big(\mathrm{div}\mathbf{P}\big)(\mathbf{x}) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\ell(B(0,r))} \cdot \frac{d}{dt}\ell\big(\varphi_t B(\mathbf{x}, r)\big).$$

Wniosek wynika łatwo z twierdzenia Liouville'a, twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a i twierdzenia o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. ■

Zadanie 12.2 Udowodnić, że jeśli $(\mathrm{div}\mathbf{P})(\mathbf{x}) = 0$ dla każdego $\mathbf{x}$, to $\ell_m(A) = \ell_m(\varphi_t(A))$ dla każdego zbioru mierzalnego A.

Przykład 12.55 Załóżmy, że w nieściśliwej cieczy jest zanurzone ciało M (trójwymiarowa rozmaitość zwarta z brzegiem ∂M). Według prawa Pascala ciśnienie na głębokości d jest takie samo we wszystkich kierunkach i jest równe $\varrho \cdot d \cdot g$, gdzie ϱ oznacza ciężar właściwy cieczy (nieściśliwość oznacza, że ta gęstość nie zależy od głębokości), g oznacza przyspieszenie ziemskie. Załóżmy,że oś OZ jest skierowana ku górze, że powierzchnia cieczy znajduje się na poziomie $z = 0$. Niech $\mathfrak{n}(p)$ oznacza zewnętrzny wektor normalny do ∂M w punkcie $p \in \partial M$. Wtedy składowa pionowa „całkowitego parcia na M wywieranego przez ciecz" to:
$\int_{\partial M} \varrho z g(0,0,1)\cdot\mathfrak{n}\, \mathrm{d}\ell_{\partial M} = \int_{\partial M} \varrho z g\, \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y = \int_M \varrho g\, \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y = \int_M \varrho g\, \mathrm{d}\ell_3 = \varrho g \ell_3(M)$.
Okazało się, że ta składowa to ciężar wypartej cieczy. Wyprowadziliśmy więc znane prawo Archimedesa z prawa Pascala. ■

Przykład 12.56 Jeśli w początku układu współrzędnych znajduje się ciało o masie 1,a w punkcie $\mathbf{x}$ ciało o masie m, to to drugie przyciąga pierwsze z siłą $Gm\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$. Rozważymy pole wektorowe F dane wzorem $F(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ i obliczymy jego strumień przez „zamkniętą powierzchnię" ∂M, która jest brzegiem pewnego obszaru (zbioru otwartego i spójnego) $\tilde{M}$. Mówiąc nieco dokładniej: $M \subseteq \mathbb{R}^3$ jest zwartą trójwymiarową rozmaitością z brzegiem ∂M, $\tilde{M} = M \setminus \partial M$. Zakładamy też, że $\mathbf{0} \notin \partial M$. Rozważymy dwa przypadki $\mathbf{0} \notin M$ oraz $\mathbf{0} \in M$. Obliczymy więc $\int_{\partial M} \frac{x\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$. Mamy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\Big) = \\
&= \big((x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\big)\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \\
&+ \big((x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\big)\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \\
&+ \big((x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\big)\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y = \\
&= \big(3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\big)\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z\big) = 0\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia Stokesa wynika od razu, że $\int_{\partial M} \frac{x\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}\mathbf{x}\wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = 0$.

Poprzednio (przykład 11.46) obliczyliśmy: $\int_{S^2} (x\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y) = 4\pi$, gdzie $S^2 = \{(x,y,z):\quad x^2+y^2+z^2 = 1\}$, ze zwykłą orientacją. Stąd oczywiście wnioskujemy, że $\int_{S^2} \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\Big) = 4\pi$ — na S^2 mianownik jest równy 1. Ponieważ różniczka całkowanej dwuformy zeruje się wszędzie (mówimy, że forma jest zamknięta), więc całka z niej po dowolnej sferze o środku w punkcie $\mathbf{0}$ jest też równa 4π. Wynika to stąd, że jeśli $S^2(r)$ oznacza sferę o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu $r \neq 1$, to

$$\int_{\partial \hat{M}} \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\Big) = 0,$$

gdzie przez $\hat{M}$ oznaczyliśmy rozmaitość trójwymiarową, której brzegiem jest $S^2 \cup S^2(r)$. Zauważmy, że stosując twierdzenie Stokesa orientujemy zewnętrzna sferę jak zwykle, a wewnętrzną przeciwnie (jak wygląda zewnętrzny wektor normalny?!).

Ostatnie rozumowanie dowodzi zresztą, że jeśli $\mathbf{0} \in M$, to

$$\int_{\partial M} \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\Big) = 4\pi.$$

Dla dowodu rozpatrujemy $\hat{M} = M \setminus B(\mathbf{0}, r)$, gdzie $r > 0$ jest tak małą liczbą dodatnią, że $B(\mathbf{0}, r) \subset \mathrm{int}(M)$ i powtarzamy rozumowanie uzasadniające dowodzoną równość dla dowolnej sfery o środku w punkcie $\mathbf{0}$. Stwierdzenia uzasadnione w tym przykładzie to klasyczne twierdzenie Gaussa. Jest ono intensywnie używane przez fizyków. Richard Feynman, laureat nagrody Nobla z 1965 r. napisał w swej książce „Feynmana wykłady z fizyki", że Newtonowi byłoby o wiele łatwiej uzasadniać swe tezy, gdyby znał to twierdzenie (ono jednak zostało odkryte około 100 lat później). ■

Lemat 12.57 (Poincarégo)
Jeśli $G\subseteq\mathbb{R}^k$ jest otwartym zbiorem ściągalnym, to każda forma zamknięta $\omega\in\Omega^m(G)$ ($\mathrm{d}\omega=0$), jest zupełna (czyli dokładna), tzn. $\omega=\mathrm{d}\eta$ dla pewnej formy $\eta\in\Omega^{m-1}(G)$.

Dowód. Podobnie jak w wypadku homotopii krzywych tak i teraz z istnienia ciągłej homotopii wynika istnienie gładkiej homotopii przekształceń gładkich. Dowodu tym razem nie podajemy, bo można tamten (jest w poprzedniej części tych notatek) przerobić, a praca jest niewielka choć coś jednak zrobić trzeba, bo tym razem zbiór nie jest zwarty. W dalszym ciągu będziemy zakładać istnienie homotopii klasy C^∞ łączącej identyczność z przekształceniem zbioru G w jeden punkt. Przyjmujemy, że

$$\omega(\mathbf{x})=\textstyle\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m}a_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_m}.$$

W dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenia $\mathbf{i}=i_1,i_2,\ldots,i_m$ i $\mathbf{j}=j_1,j_2,\ldots,j_{m-1}$.

Niech $\mathbf{p}\in G$ będzie jakimś punktem zbioru G i niech $h\colon G\times[0,1]\longrightarrow G$ będzie taką funkcją klasy C^∞, że $h(\mathbf{x},1)=\mathbf{x}$ i $h(\mathbf{x},0)=\mathbf{p}$ dla wszystkich $\mathbf{x}\in G$. Istnienie punktu $\mathbf{p}$ i przekształcenia h (homotopii łączącej identyczność z przekształceniem w punkt) wynika ze ściągalności zbioru G. Formę $h^*(\omega)$ można zapisać w postaci $\omega_1(\mathbf{x},t)+\mathrm{d}t\wedge\omega_0(\mathbf{x},t)$, gdzie ω_1 jest m–formą bez czynnika $\mathrm{d}t$, a ω_0 — $(m-1)$–formą również bez czynnika $\mathrm{d}t$. Jest jasne, że obie te formy są jednoznacznie wyznaczone przez wyjściową formę ω. Niech $\omega_1(\mathbf{x},t)=\sum_{\mathbf{i}}b_{i_1,\ldots,i_{m-1}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_m}$ oraz $\omega_0(\mathbf{x},t)=\sum_{\mathbf{j}}c_{j_1,\ldots,j_{m-1}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_{m-1}}$. Mamy więc

$$b_{\mathbf{i}}(\mathbf{x},1)=a_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})\qquad\text{oraz}\qquad b_{\mathbf{i}}(\mathbf{x},0)=0$$

dla każdego wielowskaźnika $\mathbf{i}$. Zdefiniujemy teraz $(m-1)$–formę $\mathcal{H}(\omega)$ na zbiorze G.[8]

$$\mathcal{H}(\omega)(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{j}}\Big(\int_0^1 c_{j_1,\ldots,j_{m-1}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_{m-1}}\,.$$

Wobec tego mamy

$$\mathrm{d}(\mathcal{H}(\omega))(\mathbf{x})=\sum_{j_0,\mathbf{j}}\Big(\int_0^1\frac{\partial c_{j_1,\ldots,j_{m-1}}}{\partial x_{j_0}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x_{j_0}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_{m-1}}\,. \tag{1}$$

Mamy

$$0=h^*(\mathrm{d}\omega)(\mathbf{x},t)=\mathrm{d}(h^*(\omega))(\mathbf{x},t)=\mathrm{d}(\omega_1+\mathrm{d}t\wedge\omega_0)(\mathbf{x},t)=$$

$$=\sum_{i_0,\mathbf{i}}\frac{\partial b_{\mathbf{i}}}{\partial x_{i_0}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}x_{i_0}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_m}+\sum_{\mathbf{i}}\frac{\partial b_{\mathbf{i}}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_m}-$$

$$-\sum_{j_0,\mathbf{j}}\frac{\partial c_{\mathbf{j}}}{\partial x_{j_0}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_{m-1}},$$

[8] Definicja nie wymaga tego, by $\mathrm{d}\omega=0$, można ją stosować dla każdej m–formy.

więc $\sum_{\mathbf{i}} \frac{\partial b_{\mathbf{i}}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} = \sum_{j_0,\mathbf{j}} \frac{\partial c_{\mathbf{j}}}{\partial x_{j_0}}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_{m-1}}$.

Stąd i z wzoru (1) wynika, że $\mathrm{d}(\mathcal{H}(\omega))(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}} \big(\int_0^1 \frac{\partial b_{\mathbf{i}}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} =$

$= \sum_{\mathbf{i}} \big(b_{\mathbf{i}}(\mathbf{x},1) - b_{\mathbf{i}}(\mathbf{x},0)\big)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_m} = \omega(\mathbf{x})$. Zakończyliśmy dowód lematu Poincaégo. ■

Uwaga 12.58 Można ten lemat nieco uogólnić. Jeśli dwa gładkie przekształcenia f, g są homotopijne, h jest gładką homotopią, która je łączy (tzn. $h(\mathbf{x},1) = g(\mathbf{x})$ oraz $h(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x})$), to otrzymujemy równość $\mathrm{d}(\mathcal{H}(\omega)) + \mathcal{H}(\mathrm{d}\omega) = g^*(\omega) - f^*(\omega)$. Wynika stąd, że przekształcenia f, g indukują to samo przekształcenie na grupach kohomologii de Rhama. Można też rozpatrywać formy na rozmaitości. Rozumowanie pozostaje w mocy, bo formy ω_1 i ω_0 zdefiniowane w dowodzie lokalnie, w rzeczywistości można zdefiniować globalnie (definicja nie zależy od wyboru mapy). Oznacza to, że przekształcenia homotopijne indukują to samo przekształcenie na grupach kohomologii de Rhama rozmaitości. Zdefiniowane w dowodzie przekształcenie $\mathcal{H}$ nazywane bywa homotopią kołańcuchową. ■

Uwaga 12.59 (0 twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym)
Niech $B = \overline{B}(\mathbf{0},1)$. Udowodnimy, że istnieje odwzorowanie ciągłe $h\colon B \longrightarrow B$ bez punktu stałego, tzn. $h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje gładka retrakcja $r\colon B \longrightarrow S^{k-1}$, gdzie $S^{k-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (retrakcja B na S^{k-1} to takie przekształcenie, że $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ dla każdego $\mathbf{x} \in S^{k-1}$). Jeśli istnieje przekształcenie ciągłe $h\colon B \longrightarrow B$ bez punktu stałego, to istnieje też przekształcenie $\tilde{h}\colon B \longrightarrow B$ klasy C^∞ bez punktu stałego. Jeśli h nie ma punktu stałego, to ze zwartości kuli B wynika od razu istnienie takiej liczby $\delta > 0$, że $\|h(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \geqslant 3\delta$ dla każdego $\mathbf{x} \in B$. Z twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami na zbiorach zwartych wynika natychmiast, że istnieje taka funkcja $h_1\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, której funkcję współrzędne są wielomianami i dla której nierówność $\|h(\mathbf{x}) - h_1(\mathbf{x})\| < \delta$ zachodzi dla każdego punktu $\mathbf{x} \in B$. Z niej wynika, że $\|h_1(\mathbf{x})\| < \delta + \|h(\mathbf{x})\| \leqslant \delta + 1$ Niech $h_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+\delta} h_1(\mathbf{x})$. W tej sytuacji

$$\|h(\mathbf{x}) - h_2(\mathbf{x})\| \leqslant \|h(\mathbf{x}) - h_1(\mathbf{x})\| + \|h_1(\mathbf{x}) - h_2(\mathbf{x})\| < \delta + \|h_1(\mathbf{x})\|(1 - \tfrac{1}{1+\delta}) \leqslant 2\delta$$

i oczywiście $\|h_2(\mathbf{x})\| \leqslant 1$. Wobec tego $h_2(B) \subseteq B$ przy czym h_2 jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną (bo jej współrzędne są wielomianami). Jasne też jest, że dla każdego punktu $\mathbf{x}$ zachodzi nierówność

$$\|h_2(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \geqslant \|h(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| - \|h(\mathbf{x}) - h_2(\mathbf{x})\| > 3\delta - 2\delta = \delta.$$

Wobec tego funkcja $h_2\colon B \longrightarrow B$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i nie ma punktu stałego. Zdefiniujemy przekształcenie $r\colon B \longrightarrow S^{k-1}$ jako punkt przecięcia półprostej, która zaczyna się w punkcie $h_2(\mathbf{x})$ i przechodzi przez punkt $\mathbf{x}$ ze sferą S^{k-1}. Przekształcenie r jest klasy C^∞, co wynika z tego, że przy ustalonym $\mathbf{x}$ istnieje dokładnie jedna taka liczba $t \geqslant 2$, że $\|h_2(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x} - h_2(\mathbf{x}))\| = 1$, czyli

$$1 = (h_2(\mathbf{x}))^2 + 2t h_2(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - h_2(\mathbf{x})) + t^2(\mathbf{x} - h_2(\mathbf{x}))^2 \qquad \text{(K)}.$$

Można napisać wzór na dodatni pierwiastek[9] równania (K) niewiadomą t:

$$t = \frac{h_2(\mathbf{x})(h_2(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) + \sqrt{(h_2(\mathbf{x})(h_2(\mathbf{x}) - \mathbf{x}))^2 + (1 - h_2(\mathbf{x})^2)(\mathbf{x} - h_2(\mathbf{x}))^2}}{(\mathbf{x} - h_2(\mathbf{x}))^2}\,.$$

Jasne jest, że t jako funkcja zmiennej $\mathbf{x}$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną (wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie dla każdego $\mathbf{x} \in B$). Jest też jasne, że $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in S^{k-1}$. Takie przekształcenie $r\colon B \longrightarrow S^{k-1}$ nazywane jest retrakcją. Wykażemy teraz, że takiego przekształcenia nie ma. Dla $\mathbf{x} \in S^{k-1}$ definiujemy
$\omega(\mathbf{x}) = x_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k - x_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k +$
$+ x_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k + \ldots + (-1)^{k-1}x_k\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{k-1}$.
Jasne jest, że $\int_{S^{k-1}} \omega = \ell_{S^{k-1}}(S^{k-1}) \neq 0$. Z drugiej strony możemy przeciągnąć formę ω ze sfery S^{k-1} na kulę B za pomocą retrakcji r. Forma r^* jest określona na całej kuli B. Możemy wtedy napisać
$\ell_{S^{k-1}}(S^{k-1}) = \int_{S^{k-1}} \omega = \int_{S^{k-1}} r^*(\omega) = \int_B \mathrm{d}(r^*(\omega)) = \int_B r^*(\,\mathrm{d}(\omega)) = \int_B \mathrm{d}(0) = 0$
— $\mathrm{d}\omega = 0$, $\mathrm{d}(\omega)$ jest formą stopnia k na $(k-1)$–wymiarowej rozmaitości, trzecia równość wynika z twierdzenia Stokesa. Otrzymana sprzeczność przekonuje nas o nieistnieniu gładkiej retrakcji kuli na jej brzeg, czyli sferę. W istocie rzeczy udowodniliśmy , że nie istnieje retrakcja zwartej, orientowalnej rozmaitości z brzegiem na jej brzeg (zamiast formy ω zdefiniowanej w powyższym rozumowaniu rozważyć należy tzw. formę objętości, czyli formę która po scałkowaniu po jakimś zbiorze daje jego miarę, na rozmaitości orientowalnej taka forma zawsze istnieje, por. twierdzenie o orientowalności w kowymiarze 1.)

Definicja 12.60 (laplasjanu)
Laplasjanem dwukrotnie różniczkowalnej funkcji $u\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $\mathbf{x} \in G$ nazywamy liczbę $\Delta(\mathbf{x}) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,)(u)(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$. ■

Definicja 12.61 (funkcji harmonicznej)
Funkcję klasy C^2 $u\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy harmoniczną w zbiorze otwartym G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{x} \in G$ zachodzi równość $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$. ■

Przykład 12.62 Niech $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją zmiennej zespolonej $z \in G$, gdzie G jest otwartym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, różniczkowalną w sensie zespolonym, to znaczy, że dla każdego $z \in G$ istnieje $f'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$. Niech $z = x + iy$, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, $x, y, u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}$. Można udowodnić, że wtedy funkcje u, v są nieskończenie wiele razy różniczkowalne — dowód podawany jest przez osoby wykładające "*Funkcje analityczne*". Wtedy zachodzą równości $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ — te równości nazywane są równaniami Cauchy–Riemanna[10], z nich wynika, że różniczka przekształcenia (u, u). w każdym punkcie, w którym jest niezerowa, jest podobieństwem płaszczyzny, zachowującym jej orientację. Z równań Cauchy–Riemanna wynika,

[9] Z nierówności $\|\mathbf{x}\| \leqslant 1$ i $\|h_2(\mathbf{x})\| \leqslant 1$ oraz $\mathbf{x} \neq h_2(\mathbf{x})$ wynika, że $\|h_2(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x} - h_2(\mathbf{x}))\| < 1$ dla $t \in (0,1)$, więc równanie (K) ma dwa pierwiastki leżące po różnych stronach przedziału $(0,1)$.
[10] Jest to treścią jednego z zadań do poprzedniej części tego skryptu.

że $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, zatem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Wobec tego część rzeczywista funkcji różniczkowalnej w sensie zespolonym w zbiorze otwarty jest funkcją harmoniczną. Analogicznie część urojona, czyli $\Delta v(x, y) = 0$. Funkcjami harmonicznymi są więc: funkcje stałe, funkcja $x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(z^2)$, $2xy = \mathrm{Im}(z^2)$, $\frac{x}{x^2+y^2} = \mathrm{Re}(\frac{1}{z})$, $\frac{-y}{x^2+y^2} = \mathrm{Im}(\frac{1}{z})$, $e^x \cos y = \mathrm{Re}(e^z)$, $e^x \sin y = \mathrm{Im}(e^z)$, $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \mathrm{Re}(\ln z)$, $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \mathrm{Im}(\ln z)$ itd. ■

Przykład 12.63 Zbadamy dla jakich $n \in \mathbb{Z}$ funkcja $\|\mathbf{x}\|^n$ jest harmoniczna w obszarze $\mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$. Mamy $\mathrm{grad}\,(\|\mathbf{x}\|^n) = n\|\mathbf{x}\|^{n-1} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = n\mathbf{x} \cdot \|\mathbf{x}\|^{n-2}$. Wobec tego

$$\Delta(\|\mathbf{x}\|^n) = \mathrm{div}\big(\,\mathrm{grad}\,(\|\mathbf{x}\|^n)\big) = \mathrm{div}\big(n\mathbf{x}\|\mathbf{x}\|^{n-2}\big) = n\mathrm{div}(\mathbf{x})\cdot\|\mathbf{x}\|^{n-2} + n\mathbf{x}\cdot\mathrm{grad}\,(\|\mathbf{x}\|^{n-2}) =$$

$$= nk\|\mathbf{x}\|^{n-2} + n\mathbf{x}\cdot(n-2)\mathbf{x}\|\mathbf{x}\|^{n-4} = n\|\mathbf{x}\|^{n-2}(k + n - 2).$$

Wobec tego funkcja $\|\mathbf{x}\|^n$ jest harmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2 - k$ oraz oczywiście dla $n = 0$. Zauważmy, że funkcja $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ jest harmoniczna w obszarze $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. ■

Definicja 12.64 Niech f będzie funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $G \subseteq \mathbb{R}^k$. $(k-1)$–formą ω_f indukowaną przez funkcję f nazywamy

$$\omega_f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \ldots \wedge \mathrm{d}x_k - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \ldots \wedge \mathrm{d}x_k + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \ldots \wedge \mathrm{d}x_{k-1}.$$ ■

Uwaga 12.65 Z funkcją f można też kojarzyć jednoformę

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k.$$ ■

Twierdzenie 12.66 (pierwszy wzór Greena)
Niech f będzie funkcją klasy C^1 a g — funkcją klasy C^2. Wtedy dla każdej rozmaitości (z brzegiem) zwartej M zawartej we wspólnej dziedzinie funkcji f i g zachodzi równość

$$\int_{\partial M} f(\mathbf{x})\omega_g(\mathbf{x}) = \int_M \mathrm{grad}\, f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{grad}\, g(\mathbf{x}) + \int_M f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x}).$$

Dowód. Twierdzenie otrzymujemy stosując twierdzenie Stokesa — założenia tak są dobrane, by można je było zastosować. ■

Twierdzenie 12.67 (drugi wzór Greena)
Niech f i g będą funkcjami klasy C^2 w obszarze zawierającym rozmaitość zwartą (z brzegiem) M. Wtedy zachodzi równość

$$\int_{\partial M} \big(f(\mathbf{x})\omega_g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\omega_f(\mathbf{x})\big) = \int_M \big(f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x})\big).$$

Dowód. Wzór ten wynika od razu z pierwszego wzoru Greena. ■

Twierdzenie 12.68
Jeśli u jest funkcją harmonicą określoną w zbiorze otwartym zawierającym rozmaitość zwartą M (z brzegiem), to zachodzi równość $\int_{\partial M} \omega_u = 0$.

Dowód. Równość wynika od razu z pierwszego wzoru Greena zastosowanego do pary funkcji $f(\mathbf{x}) = 1$, $g(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$. ■

Twierdzenie 12.69
Jeśli funkcje harmoniczne u_1, u_2 pokrywają się na brzegu rozmaitości zwartej i spójnej M zawartej w ich wspólnej dziedzinie, to są równe w każdym punkcie zbioru M.

Dowód. Stosujemy pierwszy wzór Greena do pary funkcji $f = u_1 - u_2 = g$. Otrzymujemy $0 = \int_{\partial M} f\omega_f = \int_M \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f + \int_M f\Delta f = \int_M \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f$, zatem dla każdego $\mathbf{x} \in M$ zachodzi równość $\operatorname{grad}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Stąd wynika, że funkcja f jest stała w zbiorze M, zatem jest równa 0, bo takie wartości przyjmuje w punktach brzegu ∂M. ∎

Twierdzenie 12.70 (o wartości średniej)
Jeśli u jest funkcją harmoniczną w zbiorze zawierającym kulę $\overline{B}(\mathbf{p}, R)$, to zachodzi równość $u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\ell_{\partial B(\mathbf{p},R)}(B(\mathbf{p},R))} \int_{\partial B(\mathbf{p},R)} u(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\ell_{\partial B(\mathbf{p},R)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell_{B(\mathbf{p},R)}(B(\mathbf{p},R))} \int_{B(\mathbf{p},R)} u(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\ell_k(\mathbf{x})$.

Dowód. Jeśli $k = 2$, to definiujemy $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\ln((\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}))$. Dla $k > 2$ przyjmujemy $f(\mathbf{x}) = \|(\mathbf{x}-\mathbf{p})\|^{2-k}$. W obu wypadkach funkcja f jest harmoniczna w obszarze $\mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{p}\}$ zawierającym rozmaitość $M = \overline{B}(\mathbf{p}, R) \setminus B(\mathbf{p}, r)$, gdzie $r \in (0, R)$. Zbiór M jest rozmaitością zwartą, z brzegiem, który jest sumą dwu sfer o środku $\mathbf{p}$, których promieniami są liczby $r, R > 0$. Oznaczmy te sfery przez $S(r)$ i $S(R)$. Mamy też $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = (2-k)\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^k}$

Kilka zadań

Zadanie 12.3 Obliczyć całkę $\displaystyle\iint_{(P,+)} \frac{dy\wedge dz}{x} + \frac{dz\wedge dx}{y} + \frac{dx\wedge dy}{z}$, gdzie

$$P = \{(x,y,z)\colon\ 1 < z < 2,\ \ z^2 = x^2 + y^2\},$$

a symbol $(P,+)$ oznacza powierzchnię P zorientowaną tak, że jej strona dodatnia jest „widoczna” z punktu $(0,0,-1)$.

Zadanie 12.4 Niech $W = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2 < 1,\ \ z^2 < 1\}$, $P = \partial W$ i niech $(P,+)$ oznacza P z orientacją wyznaczoną przez zewnętrzny wektor normalny do P. Obliczyć całkę

$$\iint_{(P,+)} (x^3+y^3)\ \mathrm{d}y\wedge\ \mathrm{d}z + \ \mathrm{d}z\wedge\ \mathrm{d}x + \ \mathrm{d}x\wedge\ \mathrm{d}y.$$

Zadanie 12.5 Niech $M = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2 = \sqrt{z} \geqslant 0\}$. Udowodnić, że zbiór M jest homeomorficzny z dwuwymiarową sferą. Czy M jest rozmaitością klasy C^1?
Na M jest wybieramy orientację wyznaczoną przez zewnętrzny wektor normalny. Obliczyć strumień pola $\overrightarrow{F} = \left[\frac{x}{\mathbf{z}}, \frac{y}{z}, \sqrt{z}\right]$ przez powierzchnię M.

Zadanie 12.6 Niech $M = \{(x,y,z)\colon\ (x-z)^2 + 4y^2 = (1-z)^2,\ \ 0 < z < 1\}$. Obliczyć strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = [x, y-1, z+1]$ przez powierzchnię M, której orientację wyznacza $\operatorname{grad}((x-z)^2 + 4y^2 - (1-z)^2)$.

Zadanie 12.7 Obliczyć całkę z $(k-1)$–formy

$$x_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k$$

(dla $i, j \in \{1,\ldots,k\}$) po $(k-1)$–wymiarowej sferze $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon\ \|\mathbf{x}\| = 1\}$ z orientacją zewnętrzną.

Zadanie 12.8 Niech $\overrightarrow{F} = [yz, x^3z, e^z]$. Obliczyć strumień pola $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ przez powierzchnię boczną walca $x^2 + y^2 = 1$, zawartą między płaszczyznami $2x + y + z = 2$ oraz $z = 5$, zorientowaną przez pole $[x, y, 0]$.

Zadanie 12.9 Wykazać, że jeśli 2–forma w $\mathbb{R}^3$ ma 1–formę pierwotną klasy C^2, to ma także formę pierwotną postaci $u\,dx + v\,dy$ $\big(+0\,dz\big)$; $u, v\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 12.10 Znaleźć wszystkie 1–formy pierwotne 2–formy

$$\omega = (x + y - z\,)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y + z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x^2 - 2z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Zadanie 12.11 Niech T oznacza torus powstały w wyniku obrotu okręgu o promieniu 7 i środku $(13, 0, 0)$ leżącego w płaszczyźnie o równaniu $y = 0$ wokół osi OZ. Torus jest zorientowany tak, że dodatnia strona jest widoczna z zewnątrz. Znaleźć $\int_T (x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$.

Zadanie 12.12 Obliczyć $\int_M \big[(1 + \sin x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\cos x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z\big]$, gdzie

$$M = \{(x, y, z)\colon\quad y^2 + z^2 = (1 - \sin x)^2,\ \ 0 \le x \le \tfrac{\pi}{4}\},$$

przy czym rozmaitość M jest zorientowana „na zewnątrz”, tzn. dodatnio jako fragment brzegu obszaru $\{(x, y, z)\colon\quad y^2 + z^2 < (1 - \sin x)^2,\ \ 0 < x < \tfrac{\pi}{4}\}$.

Zadanie 12.13 Znaleźć strumień przepływu pola wektorowego

$$F(x, y, z) = (xze^{xy}, -yze^{xy}, z)$$

przez powierzchnię

$$\{(x, y, z)\colon\quad 5x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy - 2yz - 2zx = 89,\ \ z \ge 0\}$$

zorientowaną ”na zewnątrz (zewnętrznym wektorem normalnym w punkcie $(-1, -4, 2)$ jest $\frac{1}{\sqrt{531}}(-11, -11, 17)$).

Zadanie 12.14 Pole wektorowe $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\mathbf{v}(x, y, z) = [yz, 2xz,\ \operatorname{arctg}(xyz)].$$

Obliczyć strumień pola wektorowego $\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ przez powierzchnię

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\quad x^2 + y^2 - 4\cos z - \cos^2 z = 4,\ |z| \le \pi\}\,,$$

której orientację wyznacza wektor $(1, 0, 0)$ prostopadły do $T_{(1,0,\pi)}M$.

Zadanie 12.15 Obliczyć całkę formy różniczkowej

$$\omega = (x + y^2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y + z^2)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (z + x^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

po zorientowanej powierzchni

$$M = \{(x, y, z)\colon\ \big(x^2 + y^2 + z^2 + 3\big)^2 = 16(x^2 + y^2),\ \ y > 0\},$$

której strona dodatnia jest wyznaczona przez wektor $[0, 1, 0]$, prostopadły do M w punkcie $(0, 3, 0)$.

Zadanie 12.16 W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ danych jest pięć punktów $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (1, 1, 0)$, $E = (1, 1, 1)$. Rozważamy powierzchnię wielościenną, utworzoną przez trójkąty ADE, DBE, BCE i CAE (rozmaitość z kantami). Niech $\overrightarrow{F} = \Big[xz, -yz, \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big]$. Obliczyć przepływ pola $\operatorname{rot}\big(\overrightarrow{F}\big)$ przez tę powierzchnię, ze strony ujemnej $\big($„widocznej” z punktu $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)\big)$ na dodatnią.

Zadanie 12.17 Niech $U = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 > 0\}$, $H_t = \{x^2 + y^2 - z^2 = t\}$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Znaleźć taką 2-formę różniczkowa ω na U, że jeśli $\mathbf{p} \in H_t$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}H_t$, to $|\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w})|$ jest polem równoległoboku rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$. Obliczyć całkę $\int_G d\omega$, gdzie

$$G = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 < z^2 \quad \text{i} \quad 0 < z < 1\}.$$

Zadanie 12.18 Obliczyć całkę z 2–formy

$$\omega = (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z - x)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (2xz - y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

po powierzchni S powstałej w wyniku obrotu cykloidy opisanej parametrycznie:

$$x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 0,\ z(t) = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le \pi,$$

wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$ (w punkcie $(\pi, 0, 2)$ wektorem orientującym S jest $[0, 0, 1]$).

Zadanie 12.19 Niech S^2 oznacza sferę $\{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, przy czym orientację przestrzeni stycznej $T_{(0,0,1)}$ wyznacza para wektorów $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Niech

$$\omega(x, y, z) = \frac{(x-2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{\left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}\,\right)^3}.$$

Znaleźć $\int_{S^2} \omega(x, y, z)$ oraz $\int_M \omega(x, y, z)$, gdzie $M = \{(x, y, z)\colon \quad (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Zadanie 12.20 Niech S^+ oznacza półsferę $\{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$, przy czym orientację przestrzeni stycznej $T_{(0,0,1)}$ wyznacza para wektorów $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, a orientację przestrzeni $T_{(0,0,0)}$ stycznej do koła $D^+ = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ wyznacza para wektorów $(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Znaleźć $\int_{D^+} \big((x + y)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y + z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (1 - 2z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big)$.

Znaleźć $\int_{S^+} \big((x + y)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y + z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (1 - 2z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big)$.

Zadanie 12.21 Udowodnić, ze jeśli $G \subseteq \mathbb{R}^2$ jest obszarem jednospójnym, $u\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją harmoniczną, to istnieje taka funkcja harmoniczna $v\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, że w zbiorze G spełnione są równania $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial\, y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Tekst zostanie niebawem zakończony, ale ponieważ wiele osób domaga się ujawnienia go, a ostatnio sporo sprawdziłem, poprawiłem i dopisałem, to wieszam już, ale uzupełnień należy spodziewać się w najbliższych dniach. Zmieniłem m.in. treść zadania 11.5 po uwadze prof. dr. hab. T. Mostowskiego .