Całka krzywoliniowa, twierdzenia Greena i Jordana

Ostatnio poprawiałem i rozszerzałem ten tekst 7 czerwca 2015 r., około 21:29

Zwykła prośba: proszę o informację o zauważonych błędach, poprawię.

Definicja 11.1 (krzywej)
Przekształcenie $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy krzywą. Jeśli γ jest ciągłe, to mówimy o krzywej ciągłej, jeśli jest klasy C^r, to krzywa jest klasy C^r. Krzywa jest przedziałami (lub kawałkami) klasy C^r wtedy, gdy przedział $[a,b]$ jest sumą skończenie wielu przedziałów i na każdym z nich γ jest klasy C^r (w końcach mówimy o pochodnych jednostronnych). Jeśli dla każdego $t \in [a,b]$ zachodzą będą obie nierówności $\gamma'_-(t) \neq \mathbf{0} \neq \gamma'_+(t)$, to mówimy o krzywej *regularnej*. Jeśli istnieje taka liczba $M \geq 0$, że dla dowolnych $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ zachodzi nierówność $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \cdots + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| \leq M$, to krzywą nazywamy *prostowalną*, a kres górny sum występujących w tej nierówności nazywany jest długością krzywej γ. ■

Twierdzenie 11.2 (o długości krzywej)
Jeśli krzywa γ jest klasy C^1, to jej długość jest równa $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Dowód. Z nierówności trójkąta i twierdzenia o wartości średniej wynika, że
$\big|\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|-\|\gamma'(t)h\|\big| \leqslant \|\gamma(t+h)-\gamma(t)-\gamma'(t)h\| \leqslant |h| \sup_{\theta\in[0,1]} \|\gamma'(t+\theta h)-\gamma'(t)\|$.
Stąd i z jednostajnej ciągłości funkcji $\|\gamma'\|$ wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ oraz $t_j - t_{j-1} < \delta$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, to zachodzą też nierówności

$$\big|\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \cdots + \|\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)\| - \\ - [\|\gamma'(t_0)\|(t_1 - t_0) + \|\gamma'(t_1)\|(t_2 - t_1) + \cdots + \|\gamma'(t_{n-1})\|(t_n - t_{n-1})]\big| < \varepsilon$$

oraz $\big|\|\gamma'(t_0)\|(t_1-t_0)+\|\gamma'(t_1)\|(t_2-t_1)+\cdots+\|\gamma'(t_{n-1})\|(t_n-t_{n-1})-\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\big| < \varepsilon$,
więc $\big|\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \cdots + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\big| < 2\varepsilon$. ■

Definicja 11.3 (całki krzywoliniowej)
Jeśli $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest krzywą i funkcje $P_1, P_2, \ldots, P_k$ są określone w zbiorze $\gamma([a,b])$, to liczba I nazywana jest całką z formy

$$P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \text{ i } t_j - t_{j-1} < \delta \text{ oraz } t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$$

dla $j = 1, 2, \ldots, n$, to

$$\big|P\big(\gamma(\tau_1)\big) \cdot \big(\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\big) + P\big(\gamma(\tau_2)\big) \cdot \big(\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\big) + \cdots + \\ + P\big(\gamma(\tau_n)\big) \cdot \big(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\big) - I\big| < \varepsilon,$$

tu $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$. Ta całka oznaczamy jest przez

$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big).$$ ■

Z oczywistych przyczyn sumę
$P\big(\gamma(\tau_1)\big) \cdot \big(\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\big) + P\big(\gamma(\tau_2)\big) \cdot \big(\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\big) + \cdots + P\big(\gamma(\tau_n)\big) \cdot \big(\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\big)$
będziemy nazywać sumą Riemanna całki $\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big)$.

Nie będziemy analizować bardzo szczegółowo kwestii warunków gwarantujących istnienie całki krzywoliniowej, ale przynajmniej jedno twierdzenie podamy.

Twierdzenie 11.4 (o istnieniu całki krzywoliniowej)
Jeśli funkcje $P_1, P_2, \ldots, P_k$ są ciągłe, a krzywa ciągła γ jest prostowalna, to istnieje
$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big).$$
Jeśli krzywa γ jest klasy C^1, to
$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) = \\ = \int_a^b \big(P_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + P_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \cdots + P_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Dowód. Zbiór $[a,b]$ jest zwarty, zatem wszystkie funkcje $P_1\circ\gamma, P_2\circ\gamma, \ldots, P_k\circ\gamma$ są na nim jednostajnie ciągłe. Stąd wynika, że jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje $\delta > 0$ taka, że $|\tau - \tau'| < \delta \Rightarrow \big|P_j(\gamma(\tau)) - P_j(\gamma(\tau'))\big| < \varepsilon$. Wynika stąd, że jeśli w sumie Riemanna naszej całki zastąpimy wybrany punkt τ_j przez punkt τ_j' z tego samego przedziału $[t_{j-1}, t_j]$ o długości mniejszej niż δ, to cała suma Riemanna zmieni się o mniej niż $\varepsilon\cdot\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$. Jeśli więc rozpatrujemy podział przedziału $[a,b]$ na przedziały o długościach mniejszych niż δ i zmieniamy jedynie punkty τ_j, to suma Riemanna zmieni się mniej niż o $\varepsilon\cdot \mathrm{dł}(\gamma)$.

Jeśli podzieliliśmy przedział $[a,b]$ na przedziały o długościach mniejszych niż δ i zwiększamy liczbę punktów przedziału, czyli rozdrabniamy podział, zachowując punkty τ_j, to suma nie ulega zmianie, choć przestaje być sumą Riemanna. Potem dodajemy nowe punkty τ tak, aby w każdym podprzedziale znalazł się dokładnie jeden z nich. Powoduje to na ogół zmianę sumy, która znów staje się sumą Riemanna, ale o wielkość mniejszą niż $\varepsilon\cdot\mathrm{dł}(\gamma)$. Oznacza, to że dwie sumy Riemanna odpowiadające dostatecznie drobnym podziałom różnią się o mniej niż $2\varepsilon\cdot\mathrm{dł}(\gamma)$: rozdrobnienie do wspólnego podziału może spowodować zmianę każdej z nich, następna zmiana spowodowana jest przejściem od jednego zestawu punktów τ_j do drugiego.

Wykazaliśmy więc, że spełniony jest warunek Cauchy'ego dla sum Riemanna. Stąd, podobnie jak w przypadku całki Riemanna, wynika, że istnieje całka krzywoliniowa.[1]

Trzeba jeszcze wykazać, że w przypadku krzywej klasy C^1 zachodzi równość
$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) = \\ = \int_a^b \big(P_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + P_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \cdots + P_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
Funkcja $\gamma'\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest ciągła. Wobec tego jest też jednostajnie ciągła. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|\tau - \tau_0| < \delta$, to $\|\gamma'(\tau) - \gamma'(\tau_0)\| < \varepsilon$. Stąd i z twierdzenia o wartości średniej wynika, że
$$\text{jeżeli } |\tau_0 - \tau| < \delta, \quad \text{to } \|\gamma(\tau_0) - \gamma(\tau) - \gamma'(\tau)(\tau_0 - \tau)\| \le \varepsilon|\tau_0 - \tau|.$$
Ponieważ funkcja $P\circ\gamma$ jest ciągła na zbiorze zwartym $[a,b]$, więc istnieje taka liczba $M \ge 0$, że $\|P(\gamma(t))\| \le M$ dla $t\in[a,b]$. Jeśli $0 < t_j - t_{j-1} < \delta$, $t_{j-1} \le \tau_j \le t_j$, to
$$\big|P(\gamma(\tau_j))\big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - P(\gamma(\tau_j))\gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\big| < M\varepsilon(t_j - t_{j-1}).$$
Zachodzi też nierówność
$$\big|P(\gamma(\tau_j))\gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}) - P(\gamma(\tau_j))\gamma'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})\big| < M\varepsilon(t_j - t_{j-1}).$$
Stąd wynika, że
$$\Big|\sum_j P(\gamma(\tau_j))\big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - \sum_j P(\gamma(\tau_j))\gamma'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})\Big| < 2M\varepsilon(b-a).$$
Z tego, że przy dostatecznie drobnym podziale przedziału $[a,b]$ ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ wynika, że

[1] Jeśli ktoś chciałby nieco dokładniej, to proszę obejrzeć notatki z pierwszego roku, twierdzenia o istnieniu całki Riemanna.

$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) = \\ = \int_a^b \Big(P_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + P_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \dots + P_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Dowód został zakończony. ■

Niech $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ będzie krzywą i niech $c \in (a,b)$. Oznaczamy $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}$ oraz $\gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$. Z łatwością stwierdzamy, że z istnienia obu całek

$$\int_{\gamma_1} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) \ \text{ i } \ \int_{\gamma_2} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big)$$

wynika istnienie całki $\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big)$ oraz równość

$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) = \\ = \int_{\gamma_1} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) + \int_{\gamma_2} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big).$$

Stąd wynika, że wzór uzyskany w twierdzeniu o istnieniu całki krzywoliniowej zachodzi również dla krzywych, które są przedziałami klasy C^1.

Warto jeszcze zauważyć, że z istnienia całki

$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + P_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big)$$

łatwo wynika istnienie obu całek:

$$\int_{\gamma_1} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) \quad \text{i} \quad \int_{\gamma_2} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big).$$

Definicja 11.5 (krzywych równoważnych)

Krzywe $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ i $\tilde{\gamma}\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ściśle rosnąca funkcja ciągła $h\colon [a,b] \xrightarrow{na} [c,d]$ taka, że $\tilde{\gamma} \circ h = \gamma$. ■

Jest jasne, że równoważność krzywych jest relacją równoważności oraz że funkcja h, występująca w definicji jest homemomorfizmem. Często mówimy o krzywych jako o klasach abstrakcji wprowadzonej właśnie relacji równoważności. Zachodzi też twierdzenie, którego dowód jest tak krótki i prosty, że go nawet przytaczać nie warto.

Twierdzenie 11.6 (o niezależności całki od parametryzacji)

Jeśli $\gamma, \tilde{\gamma}$ są krzywymi równoważnymi, funkcje $P_1, P_2, \dots, P_k$ określone są na ich wspólnym obrazie, to

$$\int_\gamma \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big) = \int_{\tilde{\gamma}} \big(P_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \dots + P_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k\big),$$

przy czym z istnienia jednej całki wynika istnienie drugiej. ■

Wykażemy teraz bardzo ważne i jednocześnie bardzo proste twierdzenie, które następnie będziemy stopniowo uogólniać.

Twierdzenie 11.7 (wzór Greena dla trójkąta)

Załóżmy, że funkcje klasy $P, Q \in C^1$ są określone w pewnym zbiorze otwartym zawierającym trójkąt T o wierzchołkach (a,b), (c,b) i (a,d), gdzie $a < c$, $b < d$.

Niech $\partial T = \big([a,c] \times \{b\}\big) \cup \big\{\big(c + t(a-c), b + t(d-b)\big) : \quad t \in [0,1]\big\} \cup \big(\{a\} \times [b,d]\big)$, czyli ∂T jest łamaną złożoną z trzech odcinków składających się na brzeg trójkąta T: zakładamy, że krzywa γ, której obrazem jest ∂T, jest tak określona na przedziale $[0,3]$, że $\gamma(0) = (a,b) = \gamma(3)$, $\gamma(1) = (c,b)$, $\gamma(2) = (a,d)$, na każdym z przedziałów $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ krzywa jest klasy C^1 i różnowartościowa.[2] Wtedy zachodzi równość

$$\int_{\partial T} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_T \big(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\big)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y).$$

[2] Prościej, za to mniej formalnie: obchodzimy brzeg trójkąta „przeciwnie do ruchu wskazówek zegara”. W formalnym opisie żaden zegar nie wystąpił.

Dowód. Nie ma kłopotu z całkowalnością, bowiem założyliśmy o funkcjach P, Q dostatecznie dużo, by mieć gwarancję ich istnienia. Dzięki uwagom poprzedzającym sformułowanie twierdzenia mamy sporą swobodę w wyborze parametryzacji brzegu. Możemy przyjąć np.

$$\gamma(t)=\begin{cases}\big(a+t(c-a),\,b\big) & \text{dla}\quad t\in[0,1];\\ \big(c+(t-1)(a-c),\,b+(t-1)(d-b)\big) & \text{dla}\quad t\in[1,2];\\ \big(a,\,d+(t-2)(b-d)\big) & \text{dla}\quad t\in[2,3].\end{cases}$$

Możemy teraz scałkować prawą stronę dowodzonego wzoru stosując twierdzenie Fubiniego. Otrzymujemy

$$\int_T \big(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\big)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y)=\int_T \tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y)-\int_T \tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y)=$$

$$=\int_b^d\big(\int_a^{c+(a-c)(y-b)/(d-b)}\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y-\int_a^c\big(\int_b^{b+(d-b)(x-c)/(a-c)}\tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_b^d\big(Q(c+\tfrac{(a-c)(y-b)}{d-b},y)-Q(a,y)\big)\,\mathrm{d}y-\int_a^c\big(P(x,\,b+\tfrac{(d-b)(x-c)}{a-c})-P(x,b)\big)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_a^c P(x,b)\,\mathrm{d}x+\int_b^d Q\big(c+\tfrac{(a-c)(y-b)}{d-b},y\big)\,\mathrm{d}y+\int_c^a P\big(x,\,b+\tfrac{(d-b)(x-c)}{a-c}\big)\,\mathrm{d}x+\int_d^b Q(a,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^1 P(a+t(c-a),b)(c-a)\,\mathrm{d}t+\int_1^2 Q\big(c+(a-c)(t-1),\,b+(d-b)(t-1)\big)(d-b)\,\mathrm{d}t+$$

$$+\int_1^2 P\big(c+(a-c)(t-1),\,b+(d-b)(t-1)\big)(a-c)\,\mathrm{d}t+\int_2^3 Q\big(a,d+(b-d)(t-2)\big)(b-d)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{\partial T}\big(P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big).$$

Zmiany znaków to wynik zmian granic całkowania. ■

Teraz zajmiemy się stopniowym uogólnieniem tego twierdzenia. Zaczniemy od bardzo prostej wersji twierdzenia wykazanego przez C.Jordana. Twierdzenie to ma charakter topologiczny, ale bez niego trudno jest nawet mówić precyzyjnie o ogólniejszych wersjach twierdzenia Greena. Poniżej jest jakaś wersja elementarnego dowodu, która nie będzie wymagana na egzaminie. Po udowodnieniu odpowiednich twierdzeń topologicznych twierdzenie staje się łatwe, ale bez nich dowód musi wyglądać jakoś tak, jak w tekście — obejrzałem wiele dowodów tego twierdzenia, wiele opublikowanych ma jednak luki.

Definicja 11.8 (krzywej zwykłej zamkniętej)
Krzywa ciągła $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^k$ nazywana jest krzywą zwykłą zamkniętą (lub krzywą Jordana w przypadku $k=2$) wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $\gamma_{|[a,b)}$ jest różnowartościowe i $\gamma(a)=\gamma(b)$. ■

Definicja 11.9 (łamanej zwykłej zamkniętej)
Łamana nazywana jest zwykłą zamkniętą (lub łamaną Jordana w przypadku $k=2$) wtedy i tylko wtedy, gdy ta łamana jest krzywą zwykłą zamkniętą, tj. nie ma samoprzecięć i koniec ostatniego odcinka pokrywa się z początkiem pierwszego. ■

Czytelnik zechce zauważyć, że obraz krzywej zwykłej zamkniętej jest homeomorficzny z okręgiem: zamiast przekształcenia z odcinka $[a,b]$ można rozpatrywać przekształcenie z okręgu, np. jednostkowego.

Twierdzenie 11.10 (Jordana o rozcinaniu płaszczyzny)
Obraz krzywej zwykłej zamkniętej $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rozcina płaszczyznę, tzn. zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$ ma dwie składowe spójne.

Twierdzenie to jest prawdziwe również w przypadku obrazu sfery $k-1$–wymiarowej zanurzonego homeomorficznie w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Jego dowód niewątpliwie wykracza poza program analizy na drugim roku. Jest istotna różnica między przypadkiem dwuwymiarowym i wielowymiarowym: homeomorfizm $h\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ można przedłużyć do homemomorfizmu koła $\overline{B}(\mathbf{0},1)$ (to twierdzenie Schönfliesa, nietrywialne), homeomorfizmu $h\colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ na ogół nie można przedłużyć do homeomorfizmu kuli $\overline{B}(\mathbf{0},1)$ w przestrzeń $\mathbb{R}^3$, istnieją np. tzw. „sfery rogate". Daje się to zrobić, jeśli homeomorfizm h jest dostatecznie porządny, np. „kawałkami liniowy" albo klasy C^1, ale te kwestie wykraczają bardzo daleko poza analizę na drugim roku. My chcemy wykazać jedynie twierdzenie Jordana w przypadku $k=2$. Zaczniemy od najprostszego sensownego przypadku założywszy, że krzywa jest łamaną zwykłą zamkniętą. To twierdzenie i tak w programie analizy się nie mieści, wszystkie dalsze opowieści można snuć zakładając nieco więcej (w świetle tw. Jordana niepotrzebnie) o krzywej.

Definicja 11.11 (indeksu punktu płaszczyzny względem łamanej zwykłej z

Niech $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ oznacza łamaną zwykłą zamkniętą złożoną z odcinków S_1, S_2, …,S_n, przy czym żadne dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej, przyjmujemy $S_j = S_{n+j}$ dla każdej liczby całkowitej j, koniec odcinka S_j jest początkiem odcinka S_{j+1} dla każdej liczby całkowitej j. Niech $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. Indeksem $\iota_S(\mathbf{p})$ punktu $\mathbf{p}$ względem łamanej S nazywamy resztę z dzielenia przez 2 liczby punktów przecięcia półprostej wychodzącej z punktu $\mathbf{p}$ z łamaną S, przy czym

1. jeśli półprosta przechodzi przez dokładnie jeden punkt odcinka S_j i nie jest to koniec S_j, to ten punkt jest liczony,

2. jeśli półprosta zawiera odcinek S_j, to liczymy go jako jeden punkt, jeśli odcinki S_{j-1} i S_{j+1} leżą po różnych stronach prostej L zawierającej odcinek S_j; jeśli leżą po tej samej stronie L, to punktów odcinka S_j nie liczymy wcale,

3. jeśli odcinki S_j i S_{j+1} nie są równoległe do półprostej i przechodzi ona przez ich wspólny koniec, to ten punkt liczymy, jeśli odcinki S_j i S_{j+1} leżą po różnych stronach L, jeśli leżą po tej samej stronie L, to tego punktu przecięcia nie liczymy. ■

Pierwsza rzecz, którą wypada zauważyć, to niezależność $\iota(\mathbf{p})$ od wyboru półprostej. Uzasadniamy to analizując kolejno trzy wymienione przypadki i obserwując zmiany reszty przy obrocie półprostej wokół punktu $\mathbf{p}$ o dostatecznie mały kąt.

Wiedząc już, że indeks został poprawnie zdefiniowany, możemy zauważyć bez trudu, że nie zmienia się on w wyniku zastąpienia punktu $\mathbf{p}$ przez dostatecznie blisko leżący punkt $\tilde{\mathbf{p}}$ — leżą one na jednej prostej i między nimi nie ma punktów łamanej S, a indeks możemy obliczyć używając półprostej wychodzącej z punktu $\mathbf{p}$ przez punkt $\tilde{\mathbf{p}}$. W ten sposób stwierdziliśmy, że indeks jest funkcją lokalnie stałą, więc również ciągłą.

Dowód twierdzenia Jordana dla łamanej zwykłej zamkniętej
Wykażemy, że punkty o tym samym indeksie można połączyć łamaną L, która nie przecina łamanej S. Z uwag poprzedzających dowód wynika, że jeśli łamana L nie przecina łamanej S, to wszystkie punkty L mają ten sam indeks względem S. Z tego wynika też, że punktu o indeksie 1 nie można połączyć łamaną nieprzecinającą S z punktem o indeksie 0.

Niech $\delta > 0$ będzie tak małą liczbą, że jeśli $\mathbf{p} \in S_i$, $\mathbf{q} \in S_j$ i $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| < 2\delta$, to S_i i S_j są sąsiednimi odcinkami. Taka liczba δ istnieje, bo łamana składa się ze skończenie wielu odcinków i niesąsiednie są rozłączne. Prowadzimy odcinki S_i^1 oraz S_i^0 równoległe do odcinka S_i, po obu jego stronach, w odległości $\frac{\delta}{100}$, ich końce leżą na prostych dwusiecznych kątów między S_{i-1} i S_i oraz między S_i i S_{i+1}; numerujemy prowadzone odcinki tak, aby indeks punktów z odcinka S_i^m był równy m. Oczywiście $S^1 = \bigcup_i S_i^1$ oraz $S^0 = \bigcup_i S_i^0$ są łamanymi zwykłymi zamkniętymi, rozłącznymi, bo punkty na nich leżące mają różne indeksy. Niech T_i będzie trapezem o podstawach S_i^0 i S_i^1. Trapezy T_1, T_2,..., T_n mają rozłączne wnętrza. Niech $T = \bigcup_i T_i$. Każdy punkt zbioru $T \setminus S$ można połączyć odcinkiem rozłącznym z S z jedną z łamanych S^0, S^1. Jeśli punkt $\mathbf{p}$ nie leży w zbiorze T, to prowadzimy z niego półprostą, która przecina łamaną S i nie jest równoległa do żadnego z odcinków S_1, S_2,...,S_n. Niech $\mathbf{q} \in S$ będzie pierwszym punktem tej półprostej leżącym na łamanej S, tzn. na odcinku o końcach $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ punktów łamanej S nie ma. Ponieważ $\mathbf{q}$ jest punktem wewnętrznym T, więc na odcinku $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ znajdują się punkty zbioru T. Wykazaliśmy więc, że każdy punkt płaszczyzny może być połączony odcinkiem rozłącznym z S z jakimś punktem zbioru T, a ten z kolei może być połączony odcinkiem rozłącznym z S z jakimś punktem łamanej S^0 lub z jakimś punktem łamanej S^1. Kończy to dowód tego, że każde dwa punkty o tym samym indeksie można połączyć łamaną rozłączną z S. Wykazaliśmy więc, że zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ma dwie składowe spójne. ■

Wniosek 11.12 (pierwszy z dowodu)
Zbiór punktów $\mathbf{x}$, dla których $\iota_S(\mathbf{x}) = 0$ zawiera zewnętrze koła zawierającego S, zatem zbiór tych punktów $\mathbf{x}$, dla których $\iota_S(\mathbf{x}) = 1$ jest ograniczony. ■

Wniosek 11.13 (drugi z dowodu)
Dla każdej łamanej zwykłej zamkniętej istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że jeśli $0 < \delta < \delta_0$ i punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ leżą w jednej składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S$ w odległości $\geqslant \delta$ od S, to można je połączyć łamaną Γ nie przecinającą S, której każdy punkt leży w odległości $\geqslant \delta$ od S. ■

Stwierdzenie 11.14 (o rozcinaniu krótkimi cięciwami)
Załóżmy, że S jest łamaną zwykłą zamkniętą, punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ leżą w jednej składowej D zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S$ a $\delta > 0$ jest taką liczbą, że

(i) odległość każdego z punktów $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ od łamanej S jest większa lub równa $\frac{\delta}{2}$;

(ii) z tego, że punkty **c, d** leżą na łamanej S, $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \cap S = \emptyset$ oraz punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ leżą w różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus (S \cup [\mathbf{c}, \mathbf{d}])$ wynika, że $\|\mathbf{c} - \mathbf{d}\| \geqslant \delta$.

Wtedy punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ można połączyć łamaną zawartą w D, której każdy punkt znajduje się w odległości $\geqslant \frac{\delta}{2}$ od łamanej S.

Dowód.[3] Zacznijmy od stwierdzenia, że jeśli punkt $\mathbf{p}$ można połączyć z punktem p_1 łamaną, której wszystkie punkty leżą w odległo'sci $\frac{\delta}{2}$ lub większej od łamanej S, to tezę wystarczy udowodnić dla punktów $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{q}$. Podobnie punkt $\mathbf{q}$ można zastąpić punktem $\mathbf{q}_1$, który można połączyć z $\mathbf{q}$ łamaną „odległą" od S.

Z tej uwagi wynika, że mamy prawo założyć, że dla pewnych parametrów $t_{\mathbf{p}}$, $t_{\mathbf{q}}$ zachodzą równości $\operatorname{dist}(\mathbf{p},\Gamma) = \|\mathbf{p}-\gamma(t_{\mathbf{p}})\| = \frac{\delta}{2}$ i $\operatorname{dist}(\mathbf{q},\Gamma) = \|\mathbf{q}-\gamma(t_{\mathbf{q}})\| = \frac{\delta}{2}$.

Teraz zaczniemy „toczyć" koło K o promieniu $\frac{\delta}{2}$ po łamanej S.[4] Zaczynamy od koła, na którego brzegu leży punkt $\gamma(t_{\mathbf{p}})$ (jeśli jest to punkt wewnętrzny jednego z odcinków składających się na S, to koło K jest styczne do tego odcinka w punkcie $\gamma(t_{\mathbf{p}})$). Toczymy je w kierunku $\gamma(t_{\mathbf{q}})$ (parametr punktu S leżącego na brzegu koła K rośnie, jeśli $t_{\mathbf{q}} > t_{\mathbf{p}}$, maleje w przeciwnym przypadku). W żadnym momencie wnętrze koła K nie zawiera punktów łamanej S.

Koło może ominąć pewne fragmenty łamanej S, bo się po prostu nie da go wcisnąć (przecisnąć) w zbyt wąskie fragmenty obszaru $\mathbb{R}^2 \setminus S$ (przez zbyt wąskie „cieśniny"). Wtedy niejako odbija się od S i toczy się dalej. Twierdzimy, że w końcu dotrze do punktu $\gamma(t_{\mathbf{q}})$. Gdyby miało nie dotrzeć, to istniałyby takie liczby t_1, t_2, że punkty $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ leżałyby na brzegu koła i $\|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\| < \delta$, a punkty $\mathbf{p},\mathbf{q}$ znajdowałyby się po różnych stronach odcinka $[\gamma(t_1),\gamma(t_2)]$, który na mocy już udowodnionej części twierdzenia Jordana (dla łamanych) rozcina tę składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S$, w której leżą punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ (punkty $\gamma(t_{\mathbf{p}})$ i $\gamma(t_{\mathbf{q}})$ znalazłyby się na różnych łukach, na które podzieliły łamaną S punkty $\gamma(t_1)$ i $\gamma(t_2)$). To jednak przeczy uczynionemu założeniu (**ii**).

Droga środka koła K połączy wtedy punkt $\mathbf{p}$ z punktem $\mathbf{q}_0$ leżącym w odległości $\frac{\delta}{2}$ od punktu $\gamma(t_{\mathbf{q}})$ oczywiście znajdującym się w tej samej składowej $\mathbb{R}^2 \setminus S$, co punkt $\mathbf{p}$. Jeśli $\gamma(t_{\mathbf{q}})$ jest punktem wewnętrznym „boku" łamanej, to rozumowanie jest zakończone, bo wtedy $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. Jeśli $\gamma(t_{\mathbf{q}})$ jest wierzchołkiem łamanej, to być może trzeba jeszcze nieco obrócić koło K wokół $\gamma(t_{\mathbf{q}})$ i zakończyć podróż środka koła K w punkcie $\mathbf{q}$. ■

Ten dowód został opisany trochę nieformalnie, ale to dlatego, że pełna formalizacja całkowicie uniemożliwiłaby zrozumienie, o co w nim chodzi.

W dalszym ciągu S^1 oznacza okrąg o środku $(0,0)$ i promieniu 1.

Stwierdzenie 11.15 (o sporych kołach ograniczanych łamaną)[5]
Załóżmy, że $\gamma\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i że $\gamma(S^1)$ jest łamaną Jordana. Jeśli D jest ograniczoną składową zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(S^1)$, to D zawiera otwarte koło, na którego brzegu znajdują się takie punkty $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$, że $|a-b| \geqslant \sqrt{3}$.

[3] Dowód z pracy H.Tverberga „A Proof of the Jordan Curve Theorem", Bull. London Math. Soc. (1980). Komentarz: Dla „małych" δ wynika to od razu z dowodu twierdzenia Jordana dla łamanych — „pogrubienie" łamanej zbudowane z trapezów też dzieli płaszczyznę na dwie składowe, punkty leżące w odległości nie mniejszej niż $\frac{\delta}{2}$ od łamanej leżą w jednej lub w drugiej składowej. Dla nieco większych liczb δ jest trudniej, bo nie można na ogół skonstruować odpowiedniej sumy trapezów.

[4] Droga jego środka ma być, po drobnych poprawkach, poszukiwaną łamaną.

[5] z pracy H.Tverberga „A Proof of the Jordan Curve Theorem", Bull. London Math. Soc. (1980)

Dowód. Standardowy argument korzystający ze zwartości zbioru $\overline{D}$ przekonuje nas o istnieniu w D otwartego koła K z punktami $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ na brzegu, dla którego liczba $|a-b|$ jest największa ze wszystkich możliwych. Załóżmy, że $|a-b| < \sqrt{3}$. Niech A oznacza dłuższy jeden z łuków o końcach a, b. Długość łuku A jest większa niż $\frac{4\pi}{3}$. Brzeg D jest rozłączny ze zbiorem $\gamma(A \setminus \{a,b\})$, bo dla każdego $c \in A \setminus \{a,b\}$ zachodzi nierówność $\max(|a-c|, |b-c|) > |a-b|$.

Są trzy możliwości: żaden z punktów $\gamma(a), \gamma(b)$ nie jest wierzchołkiem łamanej $\gamma(S^1)$, jeden jest wierzchołkiem, oba są wierzchołkami.

W pierwszym przypadku boki łamanej są styczne do brzegu koła K. Można znaleźć koło K' styczne do tych samych boków w punktach $\gamma(a')$ i $\gamma(b')$ leżących na łuku A. Przy nieznacznym przesunięciu punktów styczności w głąb $\gamma(a)$ promień koła nieco wzrasta, ale nie na tyle by przestało ono być zawarte w składowej D. W ten sposób powiększamy $|a-b|$ do $|a'-b'|$, wbrew maksymalności $|a-b|$.

W drugim przypadku postępujemy w zasadzie podobnie. Jeśli $\gamma(a)$ leży „wewnątrz” boku, a $\gamma(b)$ jest wierzchołkiem łamanej, to powiększamy koło K tak, by jego brzeg zawierał $\gamma(b)$ i $\gamma(a')$, gdzie a' oznacza punkt wewnętrzny łuku A, leżący blisko końca a. Znów otrzymujemy nierówność $|a'-b| > |a-b|$ sprzeczną z określeniem punktów a, b.

W ostatnim przypadku powiększamy koło K tak, by jego brzeg cały czas zawierał punkty $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ aż do momentu, w którym na brzegu koła znajdzie się jeszcze jeden punkt łuku $\gamma(A)$. Jeśli tym punktem jest $\gamma(c)$, $c \in A \setminus \{a,b\}$ i np. $|a-c| > |a-b|$, to znów punkty a, b nie realizują maksimum. ■

Z twierdzenia dla dowolnej łamanej wywnioskujemy twierdzenie Jordana dla dowolnej krzywej zwykłej zamkniętej, choć jest to dosyć żmudne. Mam nadzieję, że zrozumienie tego, w końcu prostego, dowodu ułatwi zrozumienie rozumowań krótszych, wspartych twierdzeniami z topologii. Rozbudowane struktury często umożliwiają podawanie krótkich dowodów, jednak gdy matematyk wie jak wygląda dowód bez tej całej aparatury, to łatwiej mu zrozumieć rolę rozbudowanej maszynerii. Na razie jednak zajmiemy się twierdzeniem Greena w przypadku obszaru ograniczonego łamaną Jordana.

Twierdzenie 11.16 (o triangulacji)
Obszar ograniczony łamaną zwykłą zamkniętą można przedstawić w postaci sumy skończenie wielu trójkątów o wnętrzach parami rozłącznych, przy czym można je wybrać tak, by część wspólna dowolnych dwóch trójkątów była albo pusta albo jednopunktowa i wtedy wierzchołkiem każdego z tej pary, albo odcinkiem i wtedy bokiem każdego trójkąta z tej pary.

Dowód. Niech $S_1 = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$, $S_2 = [\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3]$, $\ldots$, $S_n = [\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_1]$. Niech $\mathbf{p}$ będzie dowolnym wierzchołkiem łamanej S i niech L będzie prostą dwusieczną kąta między odcinkami łamanej S wychodzącymi z $\mathbf{p}$. Niech L_1 oznacza tę z dwu półprostych, na które dzieli prostą L punkt $\mathbf{p}$, która zawiera odcinek o końcu $\mathbf{p}$ złożony z punktów o indeksie 1 (L_1 wchodzi w obszar ograniczony łamaną S). Niech $\mathbf{q} \in L_1 \cap S$ będzie takim punktem, że odcinek $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ składa się z punktów o indeksie 1 ($\mathbf{q}$ to pierwszy punkt $L_1 \setminus \{\mathbf{p}\}$ leżący na S).

Jeśli $\mathbf{q}$ jest wierzchołkiem łamanej S, to w dalszym ciągu rozważamy dwie łamane: S' złożoną z kolejnych odcinków S począwszy od zaczynającego się w punkcie $\mathbf{p}$ i skończywszy na odcinku kończącym się w punkcie $\mathbf{q}$ oraz z odcinka $[\mathbf{q},\mathbf{p}]$ oraz S'' składającą się z kolejnych odcinków łamanej S począwszy od tego, który zaczyna się w wierzchołku $\mathbf{q}$ i skończywszy na tym, który kończy się w wierzchołku $\mathbf{p}$ oraz z odcinka $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$. Jasne jest, że S' i S'' są łamanyni zwykłymi zamkniętymi.
Jeśli punkt $\mathbf{q}$ nie jest wierzchołkiem łamanej S, to jest punktem wewnętrznym jednego z odcinków, z których składa się S. Niech to będzie odcinek $[\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1}]$. Jeśli oba odcinki $[\mathbf{p},\mathbf{p}_i]$, $[\mathbf{p}_{i+1},\mathbf{p}]$ są zawarte w S, to łamana jest trójkątem i nic do dowodu nie ma. W dalszym ciągu zakładamy, że tak nie jest. Wynika stąd w szczególności, że $n>3$.

Niech n_1 oznacza liczbę odcinków łamanej S począwszy od zaczynającego się w punkcie $\mathbf{p}$ i skończywszy na $[\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1}]$, n_2 — liczbę odcinków łamanej S począwszy od $[\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1}]$ i skończywszy na tym, który kończy się w $\mathbf{p}$. Wynika stąd, że $n_1+n_2-1=n$.

Jeśli każda z liczb n_1+1 i n_2+1 jest mniejsza niż n, to punkty $\mathbf{p},\mathbf{q}$ dzielą łamaną S na dwie łamane. Każdą z nich uzupełniamy odcinkiem $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ do łamanej zwykłej zamkniętej. Otrzymujemy dwie łamane zwykłe zamknięte. Każda z nich ma mniej boków niż S, co pozwala na rozpoczęcie rozumowania indukcyjnego.

Załóżmy teraz, że np. $n_1+1=n$. Stąd wynika, że $n_2=2$, więc $\mathbf{p}=\mathbf{p}_{i+2}$. Wewnątrz trójkąta $\mathbf{pqp}_{i+1}=\mathbf{p}_{i+2}\mathbf{qp}_{i+1}$ nie ma punktów łamanej S. Przesuwamy teraz punkt $\mathbf{q}$ po odcinku $[\mathbf{p}_{i+1},\mathbf{p}_i]$ w kierunku punktu $\mathbf{p}_i$ do momentu, w którym na odcinku $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ pojawi się punkt z S. Ponieważ jest to pierwszy moment, więc na odcinku $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ musi pojawić się wierzchołek $\mathbf{p}'$ łamanej S. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że na odcinku $(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ nie ma wierzchołków łamanej S, zatem ten odcinek leży wewnątrz S lub na S. W pierwszym przypadku uzyskujemy podział łamanej S na dwie łamane o liczbie boków mniejszej niż n i znów możemy podeprzeć się indukcją. W drugim przypadku $\mathbf{p}'=\mathbf{p}_{i+3}$ i na odcinku $(\mathbf{p}_{i+1},\mathbf{p}_{i+3})$ nie ma punktów z S. Wobec tego ten odcinek dzieli łamaną S na dwie łamane o liczbie boków mniejszej niż n. Jeśli w wyniku przesuwania punktu $\mathbf{q}$ odcinek $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ nie natrafia na punkt łamanej S, to wewnątrz trójkąta $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}\mathbf{p}$ nie ma punktów łamanej S. Wobec tego odcinek $\mathbf{pp}_i$ dzieli łamaną S na trójkąt $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}\mathbf{p}$ i łamaną złożoną z pozostałych odcinków, z których zbudowana jest łamana S i odcinka $\mathbf{pp}_i$.

Wykazaliśmy więc, że obszar ograniczony łamaną S możemy podzielić odcinkiem na dwa obszary przy czym każdy z nich jest ograniczony łamaną, która ma mniej boków niż łamana S. Teraz możemy rozumować indukcyjnie. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdej łamanej, która ma mniej boków niż łamana S. Dzielimy obszary powstałe przez jej podział na trójkąty i kończymy dowód. ■

Z tego, co udało nam się udowodnić wynika, że jeśli twierdzenie Greena jest prawdziwe w przypadku trójkąta wynika, to zachodzi ono dla dowolnej łamanej zwykłej zamkniętej. Ta uwaga wynika stąd, że całka Lebesgue'a z jednej funkcji po sumie dwóch zbiorów, których przecięcie jest miary 0 jest równa sumie całek po składnikach. To samo dotyczy całek po krzywych, z których jedna zaczyna się w końcu drugiej. Powstaje problem: łamane, które ograniczają części obszaru mogą mieć wspólny odcinek, więc z punktu widzenia całkowania po krzywych, zbiór „duży”. Jednak z łatwością stwierdzamy, że te niezerowe składniki występują dokładnie w dwu całkach i to z przeciwnymi znakami, więc się „znoszą".

Zaczniemy od wykazania następującego stwierdzenia:
jeśli wzór Greena jest prawdziwy dla pewnego obszaru G ograniczonego krzywą γ i φ jest dyfeomorfizmem zachowującym orientację, klasy C^2 otoczenia zbioru $\overline{G}$ na pewien otwarty podzbiór płaszczyzny, to wzór Greena zachodzi również dla zbioru $\varphi(G)$ ograniczonego krzywą $\varphi\circ\gamma$.

Współrzędne w zbiorze $\varphi(G)$ oznaczamy przez x,y, w dziedzinie — przez u,v. Będziemy więc pisać $(x,y)=\varphi(u,v)$ i w związku z tym będziemy pisać $x=x(u,v)$ oraz $y=y(u,v)$. Mamy więc

$$\int_{\varphi\circ\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x+G(x,y)\,\mathrm{d}y \xlongequal[\text{tw. o istnieniu całki krzywoliniowej}]{\text{pochodna złożenia}}$$

$$=\int_\gamma\Big(P(x,y)\big(\tfrac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\tfrac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\big)+Q(x,y)\big(\tfrac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\tfrac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\big)\Big)=$$

$$=\int_\gamma\big(P(x,y)\tfrac{\partial x}{\partial u}+Q(x,y)\tfrac{\partial y}{\partial u}\big)\,\mathrm{d}u+\big(P(x,y)\tfrac{\partial x}{\partial v}+Q(x,y)\tfrac{\partial y}{\partial v}\big)\,\mathrm{d}v \xlongequal[\text{dla obszaru } G]{\text{wzór Greena}}$$

$$=\int_G\Big(\tfrac{\partial}{\partial u}\big(P(x,y)\tfrac{\partial x}{\partial v}+Q(x,y)\tfrac{\partial y}{\partial v}\big)-\tfrac{\partial}{\partial v}\big(P(x,y)\tfrac{\partial x}{\partial u}+Q(x,y)\tfrac{\partial y}{\partial u}\big)\Big)\,\mathrm{d}\ell_2=$$

$$\xlongequal[\text{symetria drugiej różniczki}]{\text{pochodna złożenia}}\int_G\big(\tfrac{\partial Q}{\partial x}-\tfrac{\partial P}{\partial y}\big)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\,\mathrm{d}\ell_2\xlongequal{\text{zam. zmiennych}}\int_{\varphi(G)}\big(\tfrac{\partial Q}{\partial x}-\tfrac{\partial P}{\partial y}\big)\,\mathrm{d}\ell_2.$$

Wiemy, że wzór Greena zachodzi dla niektórych trójkątów, w tym dla trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$. Każdy trójkąt można uzyskać jako obraz tego trójkąta przy przekształceniu afinicznym różnowartościowym, które zachowuje orientację. Możemy teraz sformułować pierwsze uogólnienie wzoru Greena.

Twierdzenie 11.17 (Wzór Greena dla łamanej zwykłej zamkniętej)
Załóżmy, że funkcje klasy $P,Q\in C^1$ są określone w pewnym zbiorze otwartym zawierającym łamaną zwykłą zamkniętą S i jej wnętrze M, czyli ograniczoną składową zbioru $\mathbb{R}^2\setminus S$. Wtedy zachodzi równość

$$\int_S P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_M\big(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\big)\,\mathrm{d}\ell_2(x,y)$$

przy czym S traktujemy jako krzywą kawałkami klasy C^1 sparametryzowaną w taki sposób, że wyznacznik, którego pierwszą kolumną jest wektor styczny do krzywej, a drugą wektor prostopadły do niego skierowany do wewnątrz M, jest dodatni.[6] ■

Lemat 11.18 (o przybliżaniu zanurzeń homeomorficznych S^1 w płaszczyznę zanurzeniami przedziałami liniowymi)
Jeśli funkcja $h\colon S^1\longrightarrow\mathbb{R}^2$ jest ciągła i różnowartościowa, to dla dowolnej liczby $\delta>0$ istnieje taka funkcja $\tilde{h}\colon S^1\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ciągła i różnowartościowa, że dla każdego $\mathbf{z}\in S^1$ zachodzi $\|h(\mathbf{z})-\tilde{h}(\mathbf{z})\|<\delta$, a zbiór $\tilde{h}(S^1)$ jest łamaną zwykłą zamkniętą.

Dowód.[7] Ponieważ funkcja h jest ciągła, a zbiór S^1 — zwarty, więc również funkcja h^{-1} jest ciągła. Z ciągłości h wynika, że istnieje liczba $\eta\in(0,\frac{1}{10})$ taka, że jeśli $\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\|<\eta$, to $\|h(\mathbf{z}_1)-h(\mathbf{z}_2)\|<\frac{\delta}{2}$. Z ciągłości h^{-1} wynika, że istnieje liczba $\hat{\eta}\in\big(0,\frac{\delta}{2}\big)$ taka, że jeśli

[6] Obchodzimy brzeg $S=\partial M$ mając M po „lewej" stronie.
[7] wg. Cz. Kosniowski, A first course in algebraic topology, książeczki bardzo elementarnej

$\|h(\mathbf{z}_1) - h(\mathbf{z}_2)\| < \hat{\eta}$, to $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\| < \eta$. Pokryjmy płaszczyznę „siatką” przystających kwadratów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, których przekątne są krótsze niż $\hat{\eta}$. Jedynie skończenie wiele z tych kwadratów przecina zbiór $h(S^1)$. Oznaczmy je przez Q_1,Q_2,…,Q_n.

Zbiór zwarty $h^{-1}\big(Q_j \cap h(S^1)\big)$ ma średnicę mniejszą niż η, zatem jest zawarty w łuku opartym na cięciwie krótszej niż η. Niech $A_j \subseteq S^1$ oznacza najmniejszy taki łuk. Łuki A_1, A_2,…, A_n pokrywają okrąg S^1. Każdy z nich jest krótszy niż $\frac{1}{10}$. Wybierzmy z nich pokrycie minimalne.

Z minimalności pokrycia i tego, że każdy z rozpatrywanych łuków jest krótszy niż półokrąg, wynika, że żaden z łuków nie jest zawarty w sumie innych łuków oraz że każdy punkt okręgu należy do co najwyżej dwóch łuków — część wspólna dwóch łuków jest pusta albo jednopunktowa, albo jest łukiem.

By nie komplikować oznaczeń oznaczamy nowe łuki przez A_1, A_2,…, A_n zakładając przy okazji, że $A_j \cap A_{j+1} \neq \emptyset$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, $A_{n+1} := A_1$ i zmieńmy też odpowiednio numery kwadratów, które im odpowiadają. Oczywiście $n > 2$ i jeśli $i \neq j$, to $Q_i \neq Q_j$. Niech punkty $b_j, e_j \in S^1$ będą końcami łuku A_j, przy czym $b_j \in A_{j-1}$, $e_j \in A_{j+1}$. Z minimalności pokrycia $\{A_j\}$ wynika, że na okręgu te punkty leżą w kolejności

$$b_1, e_n, b_2, e_1, b_3, e_2, b_4, e_3, \dots, e_{n-2}, b_n, e_{n-1}, b_1.$$

Z definicji łuku A_j wynika, że $h(b_j), h(e_j) \in \mathrm{Bd}(Q_j)$. Ponieważ $h(e_j) \in Q_{j+1}$ i $Q_j \cap \mathrm{int}(Q_{j+1}) = \emptyset$, więc $h(e_j) \in \mathrm{Bd}(Q_j) \cap \mathrm{Bd}(Q_{j+1})$. Analogicznie $h(b_j) \in \mathrm{Bd}(Q_j) \cap \mathrm{Bd}(Q_{j-1})$. Warto też zauważyć, że $e_n \neq b_2$, $e_1 \neq b_3$, … , $e_{n-1} \neq b_1$, ale może zachodzić jedna lub więcej spośród równości $b_1 = e_n$, $b_2 = e_1$, … , $b_n = e_{n-1}$.

Kolejne odcinki łamanej
$[h(e_n), h(e_1)]$, $[h(e_1), h(e_2)]$, $[h(e_2), h(e_3)]$,…, $[h(e_{n-2}), h(e_{n-1})]$, $[h(e_{n-1}), h(e_n)]$ mają rozłączne[8] „wnętrza”, zatem ich suma jest łamaną zwykłą zamkniętą. Odwzorowanie $\tilde{h}$ definiujemy tak, by $h(e_j) = \tilde{h}(e_j)$, dla $j = 1, 2, \dots, n$ oraz by obrazem krótszego z łuków o końcach e_j, e_{j+1} był odcinek $[h(e_j), h(e_{j+1})]$, $j = 1, 2, \dots, n$ $(e_{n+1} := e_1)$. Oczywiście zakładamy, że na wymienionych łukach $\tilde{h}$ jest podobieństwem, jeśli odległość punktów okręgu S^1 to długość krótszego z łuków wyznaczonych przez te punkty.

Ponieważ przekątne kwadratów $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ są krótsze niż $\frac{\delta}{2}$, więc dla każdego $z \in S^1$ mamy $|h(z) - \tilde{h}(z)| < \delta$. Dowód został zakończony. ■

Teraz wykażemy, że dopełnienie krzywej Jordana składa się z co najwyżej dwu składowych.

Twierdzenie 11.19 (Jordana, pierwsza część)
Jeśli $S \subset \mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana, to zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ma co najwyżej dwie składowe spójne.

Dowód[9]
Załóżmy, że zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ma co najmniej trzy składowe spójne. Niech punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ leżą w różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Niech $\varepsilon > 0$ oznacza liczbę mniejszą od odległości każdej z liczb $\mathrm{dist}(\mathbf{p}, S)$, $\mathrm{dist}(\mathbf{q}, S)$, $\mathrm{dist}(\mathbf{r}, S)$ od łamanej S. Niech (γ_n) będzie ciągiem

[8] Punkty $h(e_n)$ i $h(e_n)$ mogą leżeć na jednym boku kwadratu Q_1, ale wtedy $h(e_2)$ nie może leżeć między nimi — dlaczego?
[9] wg. wspomnianej poprzednio książeczki Cz. Kosniowskiego

homeomorfizmów jednostajnie zbieżnym do homeomorfizmu $\gamma\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takim, że dla każdego $n = 1, 2\ldots$ zbiór $\gamma_n(S^1) = S_n$ jest łamaną Jordana zaś $\gamma(S^1) = S$. Dla dostatecznie dużych n mamy $|\gamma_n(z) - \gamma(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $z \in S^1$. Wnioskujemy stąd, że $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, S_n) > \frac{\varepsilon}{2}$, $\operatorname{dist}(\mathbf{q}, S_n) > \frac{\varepsilon}{2}$, $\operatorname{dist}(\mathbf{r}, S_n) > \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus S_n$ ma dwie składowe spójne, więc dwa spośród trzech punktów $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ muszą leżeć w jednej jego składowej. Można przyjąć, po ewentualnym przejściu do podciągu i zmianie oznaczeń, że punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ leżą w jednej składowej C_n zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S_n$.

Załóżmy, że istnieje taka liczba $\delta \in (0, \varepsilon)$, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n istnieje odwzorowanie $g_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, którego obraz jest łamaną łączącą punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$, zawartą w C_n taką, że $\operatorname{dist}(g_n(t), S_n) \geqslant \delta$ dla każdego $t \in [0,1]$. Wtedy $\operatorname{dist}(g_n(t), S) > \frac{\delta}{2}$ dla każdego $t \in [0,1]$. Oznacza to, że punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ leżą w jednej składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S$, wbrew uczynionemu założeniu.

Wobec tego takiej liczby δ nie ma. Stąd i ze stwierdzenia 13.14 o rozcinaniu krótkimi cięciwami wynika, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n istnieją punkty $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in S_n$ takie, że $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \cap S_n = \emptyset$, $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| \longrightarrow 0$ zaś punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ leżą w różnych składowych zbioru $C_n \setminus [\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n]$, tu znów przeszliśmy do podciągu nie zmieniając oznaczeń. Odcinek $[\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n]$ dzieli obszar C_n na dwie składowe (tw. Jordana dla obszaru ograniczonego łamaną). Z jednostajnej zbieżności odwzorowań γ_n do γ wynika, że długość jednego z łuków okręgu, na które jest on podzielony punktami $\gamma_n^{-1}(\mathbf{x}_n)$, $\gamma_n^{-1}(\mathbf{y}_n)$ dąży do 0. Stąd wynika, że średnica jednej ze składowych zbioru $C_n \setminus [\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n]$ też dąży do 0. Jeśli np. dla nieskończenie wielu n punkt $\mathbf{p}$ znajduje się w „małej" składowej, to dla nieskończenie wielu dostatecznie dużych n mamy $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\| < \varepsilon$ wbrew temu, że $\operatorname{dist}(\mathbf{p}, S) > \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 11.20 (Jordana, druga część)
Jeśli $S \subset \mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana, to zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ma co najmniej dwie składowe spójne.

Dowód. Jako dopełnienie zbioru ograniczonego na pewno ma jedną składową nieograniczoną (zewnętrze koła jest spójne). Niech $\gamma_n\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie ciągiem jednostajnie zbieżnym do $\gamma\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, przy czym $\gamma(S^1) = S$, $S_n = \gamma_n(S^1)$ jest łamaną Jordana. Na mocy stwierdzenia 13.15 o sporych kołach ograniczanych łamaną istnieją koła $K_n = B(\mathbf{p}_n r_n)$ a na ich brzegach takie punkty $\gamma_n(a_n) \in S_n, \gamma_n(b_n) \in S_n$, że $|a_n - b_n| \geqslant \sqrt{3}$. Po ewentualnym przejściu do podciągów możemy zakładać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in S^1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in S^1$ i oczywiście $|a - b| \geqslant \sqrt{3}$, więc $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Można też zakładać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r > 0$ — promienie kół nie mogą dążyć do 0, bo punkty $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ są różne i leżą na brzegu granicznego koła. Jasne jest, że dla dostatecznie dużych n odległość punktu $\mathbf{p}$ od łamanej S_n jest większa niż $\frac{r}{2}$, a odległość punktów $\mathbf{p}_n$ i $\mathbf{p}$ jest mniejsza niż $\frac{r}{2}$. Stąd wynika, że punkt $\mathbf{p}$ znajduje się w ograniczonej składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S_n$. Załóżmy, że punkt $\mathbf{p}$ leży w nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Istnieje wtedy łamana L łącząca go z punktem $\mathbf{q}$ leżącym na zewnątrz koła $B(\mathbf{0}, \varrho)$ zawierającego w swym wnętrzu wszystkie łamane S_1, S_2, $\ldots$, rozłączna z S. Istnieje liczba $\eta > 0$ mniejsza od odległości wszystkich punktów $x \in L$ od punktów $\mathbf{y} \in S$ Łamana L_n będąca sumą L i odcinka $[\mathbf{p}_n, \mathbf{p}]$ łączy punkt $\mathbf{q}$ z punktem $\mathbf{p}_n$ i jest rozłączna z S. Jednak L_n musi przecinać S_n. Niech $\mathbf{z}_n \in L_n \cap S_n$. Odległość

$\mathbf{z}_n$ od S dąży oczywiście do 0 a jednocześnie dla dostatecznie dużych n jest większa niż $\min(\frac{r}{2},\frac{\eta}{2})$. Oznacza to, że punkt $\mathbf{p}$ nie może znaleźć się w nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{R}^2\setminus S$, a to oznacza, że ten zbiór musi mieć też składową ograniczoną. ■

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 11.21 (Jordana)
Jeśli $\gamma\colon S^1\longrightarrow\mathbb{R}^2$ jest ciągłe i różnowartościowe, to zbiór $\mathbb{R}^2\setminus\gamma(S^1)$ ma dokładnie dwie składowe spójne. ■

Definicja 11.22 (przyrostu kąta (argumentu) wzdłuż krzywej)
Przyrostem argumentu $A=A(\gamma,\mathbf{p})$ wzdłuż krzywej prostowalnej $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ względem punktu $\mathbf{p}=(\alpha,\beta)\notin\gamma([a,b])$ nazywamy liczbę
$$\int_\gamma\Big(\tfrac{-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\,\mathrm{d}x+\tfrac{(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\,\mathrm{d}y\Big).\ ■$$

Twierdzenie 11.23
Jeśli γ jest klasy C^1, to
$$A(\gamma,\mathbf{p})=\int_\gamma\Big(\tfrac{-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\,\mathrm{d}x+\tfrac{(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\,\mathrm{d}y\Big)=$$
$$=\int_a^b\Big(\tfrac{-(y(t)-\beta)}{(x(t)-\alpha)^2+(y(t)-\beta)^2}x'(t)\,\mathrm{d}t+\tfrac{(x(t)-\alpha)}{(x(t)-\alpha)^2+(y(t)-\beta)^2}y'(t)\,\mathrm{d}t\Big)=$$
$$=\int_a^b\Big(\operatorname{arctg}\tfrac{y(t)-\beta}{x(t)-\alpha}\Big)'\,\mathrm{d}t$$
— całkując pochodną kąta otrzymujemy przyrost tego kąta. ■

Stwierdzenie 11.24
Przyrost kąta wzdłuż łamanej Jordana względem punktu leżącego w **nie**ograniczonej składowej dopełnienia tej łamanej równy jest 0.

Dowód. Wynika to od razu z twierdzenia Greena dla łamanej zwykłej zamkniętej i tego, że
$$-\tfrac{\partial}{\partial y}\Big(\tfrac{-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\Big)+\tfrac{\partial}{\partial x}\Big(\tfrac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\Big)=0.\ ■$$

Stwierdzenie 11.25
Przyrost kąta wzdłuż łamanej Jordana względem punktu leżącego w ograniczonej składowej dopełnienia tej łamanej równy jest $\pm2\pi$.

Dowód. By uprościć oznaczenia założymy, że $\mathbf{p}=(0,0)$. Załóżmy najpierw, że łamana jest kwadratem o wierzchołkach $(a,-a)$, (a,a), $(-a,a)$, $(-a,-a)$, gdzie $a>0$. Niech
$$\gamma(t)=\begin{cases}\big(a,\ -a+2ta\big)\mathrm{dla}t\in[0,1],\\ \big(a-2(t-1)a,\ a\big)\mathrm{dla}t\in[1,2],\\ \big(-a,\ a-2(t-2)a\big)\mathrm{dla}t\in[2,3],\\ \big(-a+2(t-3)a,\ -a\big)\mathrm{dla}t\in[3,4].\end{cases}$$
Mamy więc
$$A=\int_0^1\Big(\tfrac{a-2ta}{a^2+(-a+2ta)^2}(a)'+\tfrac{a}{a^2+(-a+2ta)^2}(-a+2ta)'\Big)\,\mathrm{d}t+$$
$$+\int_1^2\Big(\tfrac{-a}{(a-2(t-1)a)^2+a^2}\big(a-2(t-1)a\big)'+\tfrac{a-2(t-1)a}{(a-2(t-1)a)^2+a^2}(a)'\Big)\,\mathrm{d}t+$$

$+\int_2^3\Big(\frac{-a+2(t-2)a}{(-a)^2+(a-2(t-2)a)^2}(-a)'+\frac{-a}{(-a)^2+(a-2(t-2)a)^2}\big(a-2(t-2)a\big)'\Big)\,\mathrm{d}t+$
$+\int_3^4\Big(\frac{a}{(-a+2(t-3)a)^2+a^2}\big(-a+2(t-3)a\big)'+\frac{-a+2(t-3)a}{(-a+2(t-3)a)^2+(-a)^2}(-a)'\Big)\,\mathrm{d}t=$
$=\int_0^1\frac{2}{1+(-1+2t)^2}\,dt+\int_1^2\frac{2}{[1-2(t-1)]^2+1}\,dt+\int_2^3\frac{2}{1+[1-2(t-2)]^2}\,dt+\int_3^4\frac{2}{[-1+2(t-3)]^2+1}\,dt=$
$=4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi.$

Wykazaliśmy więc tezę w przypadku szczególnym. Oczywiście przy obchodzeniu kwadratu w przeciwnym kierunku przyrost kąta zmieni znak — to ogólna własność całki krzywoliniowej.

Niech teraz γ oznacza dowolna łamaną Jordana zawierającą punkt $\mathbf{0}=(0,0)$[10]. Niech a będzie tak małą liczbą dodatnią, że kwadrat o wierzchołkach $(a,-a)$, (a,a), $(-a,a)$, $(-a,-a)$ znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą γ. Wyprowadzamy z punktu $\mathbf{0}$ dwie dowolne półproste.[11] Pierwsza z nich przecina po raz pierwszy łamaną γ w punkcie $\mathbf{p}_1$ a rozważany kwadrat w punkcie $\mathbf{q}_1$, druga odpowiednio w punktach $\mathbf{p}_2$ i $\mathbf{q}_2$. Następnie rozważamy łamaną γ_1: idziemy wzdłuż łamanej γ od punktu $\mathbf{p}_1$ do punktu $\mathbf{p}_2$, potem po odcinku $[\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_2]$, potem wzdłuż brzegu kwadratu od $\mathbf{q}_2$ do $\mathbf{q}_1$ i wreszcie wzdłuż odcinka $[\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1]$, przy czym fragment brzegu kwadratu wybieramy tak, by powstała łamana Jordana nie zawierała wewnątrz punktu $\mathbf{0}$. Analogicznie określamy łamaną γ_2: idziemy wzdłuż łamanej γ od punktu $\mathbf{p}_2$ do punktu $\mathbf{p}_1$, potem po odcinku $[\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1]$, potem wzdłuż brzegu kwadratu od $\mathbf{q}_1$ do $\mathbf{q}_2$ i wreszcie wzdłuż odcinka $[\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2]$, przy czym fragment brzegu kwadratu wybieramy tak, by powstała łamana Jordana nie zawierała wewnątrz punktu $\mathbf{0}$. Można łatwo zauważyć, że suma obszarów ograniczonych łamanymi γ_1 i γ_2 uzupełniona odcinkami $(\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1)$ i $(\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_2)$ to obszar ograniczony łamaną γ brzegiem kwadratu. Przy obchodzeniu łamanych γ_1 i γ_2 odcinki $[\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1]$, $[\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_2]$ przebiegane są w przeciwnych kierunkach, zatem całki po nich mają te same wartości bezwzględne, natomiast ich znaki są różne. Wynika stąd, że suma przyrostów kąta wzdłuż γ_1 i wzdłuż γ_2 jest równa sumie przyrostów kąta wzdłuż γ i wzdłuż brzegu kwadratu. Z drugiej strony przyrosty kąta wzdłuż γ_1 i wzdłuż γ_2 są równe 0, bo wnętrza tych krzywych nie zawierają punktu $\mathbf{0}$. Wynika stąd, że suma przyrostów kąta wzdłuż γ i wzdłuż brzegu kwadratu równa jest 0, a stąd i z tego, że przyrost kąta wzdłuż brzegu kwadratu równy jest $\pm 2\pi$ wynika teza. ■

Załóżmy teraz, że dwie łamane (bez samoprzecięć) S_1 i S_2 zaczynają się w punkcie $\mathbf{p}$ i kończą się w punkcie $\mathbf{q}$, mogą mieć wspólne odcinki. Niech $\mathbf{x}',\mathbf{x}''$ będą takimi punktami wspólnymi tych łamanych, że między nimi ani na łamanej S_1 ani na łamanej S_2 nie ma innych punktów wspólnych obu tych łamanych. Wtedy suma $S(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ fragmentów łamanych o końcach $\mathbf{x}',\mathbf{x}''$ jest krzywą zwykłą zamkniętą. Załóżmy, że punktu $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ nie leży w obszarze ograniczonym łamaną $S(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. Może się oczywiście zdarzyć, że punkty $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ można wybrać na wiele sposobów. W tej sytuacji zakładamy, że punkt $\mathbf{b}$ znajduje się poza wszystkimi obszarami typu $S(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. W tej sytuacji zachodzi więc równość $A(S_1,\mathbf{b})=A(S_2,\mathbf{b})$. Z tej opowieści wynika następujące

[10] tzn. punkt $(0,0)$ znajduje się w ograniczonej składowej dopełnienia krzywej.
[11] Dzielimy obszar ograniczony krzywą γ na dwa obszary.

Stwierdzenie 11.26 (o niezależności przyrostu kąta)
Przyrosty kąta wzdłuż każdej z dwu łamanych łączących punkt $\mathbf{p}$ z punktem $\mathbf{q}$ są równe przy założeniu, że punkt $\mathbf{b}$ względem, którego przyrosty są mierzone nie leży w żadnym obszarze ograniczonym częściowo jedną łamaną, a częściowo — drugą. ■

Stąd bez trudu wnioskujemy, że jeśli punkt $\mathbf{b}$ nie leży na krzywej ciągłej γ, to przyrosty argumentu wzdłuż dowolnych łamanych dostatecznie dobrze przybliżających krzywą γ są równe. Wynika stąd od razu, że można rozszerzyć pojęcie przyrostu kąta wzdłuż krzywej na dowolne krzywe ciągłe.

Definicja 11.27 (przyrostu kąta wzdłuż krzywej ciągłej)
Przyrostem kąta wzdłuż krzywej ciągłej $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ względem punktu $\mathbf{b}\notin\gamma([\alpha,\beta])$ nazywamy przyrost kąta wzdłuż dowolnej łamanej dostatecznie dobrze przybliżającej krzywą γ, która łączy punkt $\gamma(\alpha)$ z punktem $\gamma(\beta)$. ■

Definicja 11.28 (indeksu punktu względem krzywej zwykłej zamkniętej)
Indeksem $\iota_\gamma(\mathbf{b})$ punktu $\mathbf{b}$ względem krzywej zwykłej zamkniętej γ nazywamy liczbę $\frac{1}{2\pi}|A(\gamma,\mathbf{b})|$. ■

Zajmiemy się teraz twierdzeniem Greena dla dowolnej krzywych zwykłych zamkniętych *prostowalnych.*

Lemat 11.29 (o mierze krzywej prostowalnej)
Jeśli $\gamma\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^k$, jest krzywą prostowalną, $k\geq 2$, to $\ell_k\big(\gamma([a,b])\big)=0$

Dowód. Niech $\varepsilon<1$ oznacza liczbę dodatnią. Podzielmy przedział $[a,b]$ na przedzialiki, których obrazy A_1, A_2, … A_n są łukami o długościach mniejszych niż ε. Niech $\mathbf{p}_j$ oznacza środek łuku A_j a r_j połowę jego długości. Oczywiście $A_j\subseteq\overline{B}(\mathbf{p}_j,r_j)$. Niech $\ell=\frac12\mathrm{dł}(\gamma)=\sum_j r_j$. Mamy

$$\sum_j r_j^k=\sum_j r_j\cdot r_j^{k-1}\leq\sum_j r_j\cdot\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}\leq\tfrac{\varepsilon}{2}\sum_j r_j=\tfrac{\varepsilon\ell}{4}.$$

Teza lematu wynika z tego, że ε jest dowolną liczbą dodatnią i tego, że k-wymiarowa miara kuli k–wymiarowej o promieniu r równa jest r^k z dokładnością do multyplikatywnej stałej (miary kuli o promieniu 1). ■

Udowodniony właśnie lemat wraz z lematem o przybliżaniu zanurzeń homeomorficznych zanurzeniami przedziałami liniowymi dowodzi, że przybliżając prostowalną krzywą Jordana łamanymi Jordana przybliżamy jednocześnie obie strony wzoru Greena — miary obszarów ograniczonych łamanymi zamkniętymi dążą do miary obszaru ograniczonego krzywą, którą przybliżamy, długości też. Wobec tego, że wzór Greena jest prawdziwy w przypadku łamanych Jordana, jest on również prawdziwy w przypadku łamanych zwykłych zamkniętych prostowalnych. W ten sposób zakończony został dowód wzoru Greena w postaci na tyle ogólnej, że wystarczy to zdecydowanej większości studentów we wszystkich przypadkach, w których trzeba będzie z niego skorzystać. Nieco ogólniejszej wersji można się dopatrzeć w polecanym podręczniku A.Birkholca oraz w monografii Federera „Geometric measure theory".

Przy okazji badania przyrostu kąta wzdłuż krzywej względem punktu nie leżącego na tej krzywej okazało się, że w pewnych sytuacjach przyrost ten zależy właściwie jedynie od końców krzywej, a w każdym razie można było krzywą (w szczególnym przypadku łamaną) istotnie zmienić nie zmieniając przyrostu kąta wzdłuż tej krzywej. Pytanie, które się nasuwa to:

dla jakich funkcji P, Q całka $\int_\gamma \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big)$ ma taką samą własność?

Okazuje się, że na to pytanie można dać w miarę prostą odpowiedź. Zakładać będziemy aż do odwołania, że funkcje P, Q określone są w obszarze $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i że są to funkcje klasy C^1.

Twierdzenie 11.30 (o niezależności całki od drogi)
Dla dowolnych punktów $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ i dowolnych krzywych prostowalnych γ_1, γ_2 zaczynających się w punkcie $\mathbf{p}$ i kończących się w punkcie $\mathbf{q}$ zachodzi równość

$$\int_{\gamma_1} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = \int_{\gamma_2} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big)$$ [12]

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krzywej zwykłej zamkniętej prostowalnej γ zachodzi równość

$$\int_\gamma \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = 0.$$ [13]

Dowód. $\Rightarrow$ Wystarczy oczywiście wykazać tezę w przypadku łamanych. Z założenia wynika od razu, że całka po każdej łamanej zwykłej zamkniętej równa jest 0 — wystarczy wybrać dwa punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ na łamanej i zauważyć, że całki od $\mathbf{p}$ do $\mathbf{q}$ po obu częściach tej łamanej są równe, zastępując jedną z nich całką od $\mathbf{q}$ do $\mathbf{p}$, czyli zmieniając orientację tego fragmentu łamanej zmieniamy jedynie znak tej całki, a całka po krzywej zamkniętej to po prostu całka od $\mathbf{p}$ do $\mathbf{q}$ po jednej części plus całka od $\mathbf{q}$ do $\mathbf{p}$ po drugiej.

$\Leftarrow$ Oczywiście możemy ograniczyć się do łamanych. Dowodzimy tak jak w przypadku przyrostu kąta: jeśli między dwoma punktami wspólnymi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ łamanych γ_1, γ_2 nie ma innych punktów wspólnych tych łamanych, to całki po częściach krzywych zaczynających się w $\mathbf{x}_1$ i kończących się w $\mathbf{x}_2$ są równe, bo całka po krzywej zamkniętej złożonej z części obu krzywych jest równa 0. Dzięki temu, że mamy do czynienia z łamanymi takich „pętelek” jest skończenie wiele, poza nimi są ewentualnie odcinki wspólne, po których całki są równe. ■

Podane twierdzenie jest jak widać oczywiste, w istocie rzeczy dowód działa nie tylko w wymiarze 2, ale w dowolnym. Ma ono jednak sporą wadę. Po obu stronach równoważności występują warunki trudno sprawdzalne, formalnie rzecz biorąc trzeba dokonywać kontinuum sprawdzeń, co może nie być wykonalne ze względu na ograniczoność ludzkiego żywota. Przydałoby się więc jakieś twierdzenie, którego założenia byłyby łatwiej sprawdzalne.

Twierdzenie 11.31 (Warunek konieczny na niezależność całki od drogi)
Jeśli $\int_\gamma \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big)$ nie zależy od drogi w obszarze U, to dla każdego punktu $(x,y) \in U$ zachodzi równość $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

[12] Mówimy wtedy, że całka nie zależy od drogi.

[13] Zakładamy oczywiście, że obrazy wszystkich rozpatrywanych krzywych są zawarte w zbiorze U, choć ich „wnętrza” niekoniecznie.

Dowód. Na mocy poprzedniego twierdzenia całka po każdej krzywej zwykłej zamkniętej równa jest 0. w szczególności po brzegu każdego przedziału dwuwymiarowego zawartego w U. Na mocy twierdzenia Greena dla każdego przedziału dwuwymiarowego $P \subset U$ mamy

$$0 = \int_{\partial P} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \big) = = \int_P \big(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \tfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) \big)\,\mathrm{d}\ell_2,$$

ale skoro całka po każdym przedziale z funkcji ciągłej równa jest 0, to ta funkcja musi być równa 0, bo inaczej funkcja ta byłaby np. dodatnia w pewnym punkcie, zatem dodatnia w pewnym jego otoczeniu ...[14] ■

Twierdzenie odwrotne niestety prawdziwe nie jest. Potrzebny jest przykład. Jeżeli $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, to $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ dla każdego $(x,y) \in U$, ale jeśli $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$, to

$$\int_\gamma \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \big) = 2\pi,$$

więc w tym przypadku całka *zależy* od drogi. Okazuje się, że natura problemu jest topologiczna. Przypominamy, że poprzednio wykazaliśmy, że jeśli γ_1, γ_2 są dwiema łamanymi o wspólnym początku i o wspólnym końcu i punkt $\mathbf{b}$ nie znajduje się w obszarze ograniczonym którąkolwiek z „pętelek” utworzonych ze spójnych fragmentów jednej i drugiej łamanej, to przyrost kąta wzdłuż krzywej γ_1 jest taki sam jak przyrost kąta wzdłuż krzywej γ_2. W rozumowaniu uzasadniającym to stwierdzenie korzystaliśmy jedynie z równości $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, wobec tego taki wniosek można wysnuć w przypadku dowolnych funkcji P, Q, dla których spełniony jest ten warunek. Prawdziwe jest więc

Twierdzenie 11.32 (o równości całek po różnych łamanych)
Jeśli $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ w obszarze U, γ_1, γ_2 są łamanymi o wspólnym początku i wspólnym końcu i każdy obszar ograniczony „pętelką” utworzoną ze spójnych fragmentów obu łamanych jest zawarty w U, to

$$\int_{\gamma_1} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \big) = \int_{\gamma_2} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \big). \ \blacksquare$$

Twierdzenie to można poprawić używając języka topologii. Łatwo można stwierdzić, że łamane opisane w twierdzeniu są homotopijne[15] i odwrotnie, jeśli łamane są homotopijne, to spełniają warunek opisany w twierdzeniu. Jasne jest więc, że twierdzenie o równości całek po różnych łamanych można nieco uogólnić:

Twierdzenie 11.33 (o równości całek po różnych drogach)
Jeśli $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ w obszarze U, γ_1, γ_2 są krzywymi homotopijnymi o wspólnym początku i wspólnym końcu, to

$$\int_{\gamma_1} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \big) = \int_{\gamma_2} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \big). \ \blacksquare$$

Oczywiście jeśli obszar U jest jednospójny, to każde dwie drogi o wspólnych końcach są homotopijne, zatem warunek jest topologiczny. Sformułujemy ostatnie twierdzenie z tego cyklu.

[14] Student powinien umieć wykazać, że jeśli całka z funkcji mierzalnej po **każdym** przedziale jest 0, to funkcja jest równa 0 prawie wszędzie.
[15] Tu i daje chodzi oczywiście o homotopię, której wszystkie wartości znajdują się w zbiorze U! Dodatkowo zakładamy, że końce krzywych nie poruszają się.

Twierdzenie 11.34 (o istnieniu funkcji pierwotnej)
Jeśli dwie funkcje P, Q klasy C^1 są określone w obszarze jednospójnym U i dla każdego punktu $(x,y) \in U$ zachodzi równość $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, to istnieje funkcja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 taka, że $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ dla każdego $(x,y) \in U$.

Dowód. Niech $\mathbf{p} \in U$ będzie ustalonym punktem. Definiujemy

$$f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{z}} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big),$$

przy czym $\int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{z}}$ oznacza całkę po jakiejkolwiek krzywej zaczynającej się w punkcie $\mathbf{p}$ i kończącej się w punkcie $\mathbf{z}$. Z założeń o funkcjach P, Q wynika, że wybór krzywej nie ma wpływu na wartość tej całki. Wobec tego definicja funkcji f jest poprawna. Znajdziemy jej pochodną cząstkową względem zmiennej x. Mamy (punkty $\mathbf{z}$ i $\mathbf{z} + h\mathbf{e}_1$ są połączone odcinkiem, bo krzywą możemy dowolnie wybrać)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{z}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(\mathbf{z} + h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{z})\big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{z}}^{\mathbf{z}+h\mathbf{e}_1} \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \big(P(z_1 + t, z_2)\,\mathrm{d}(z_1 + t) + Q(z_1 + t, z_2)\,\mathrm{d}(z_2)\big) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h P(z_1 + t, z_2)\,\mathrm{d}t = P(z_1, z_2).$$

Wykazaliśmy więc, że $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ w całym zbiorze U. Analogicznie sprawdzamy, że $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Funkcja ma więc w obszarze U ciągłe pochodne cząstkowe, więc jest klasy C^1. Ponieważ pochodne są klasy C^1, więc jest ona w rzeczywistości funkcją klasy C^2. Dowód został zakończony. ■

Zauważmy jeszcze, że jeśli dla pewnych funkcji P, Q istnieje funkcja f taka, że $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ i jednocześnie $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$, to niezależnie od tego, czy obszar jest jednospójny, czy nie, całka jest od drogi niezależna, bo

$$\int_\gamma \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)),$$

gdzie α, β oznaczają końce przedziału, na którym określona jest krzywa γ. Wtedy rozpatrywane wcześniej pochodne funkcji P i Q są pochodnymi mieszanymi drugiego rzędu funkcji f, są więc równe. Oznacza to, że $\int_\gamma \big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big)$ **nie zależy od γ, lecz jedynie od końców tej krzywej, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja f, że $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.**

Twierdzenie 11.35 (o wygładzaniu homotopii krzywych gładkich)
Załóżmy, że funkcje $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ są klasy C^r, $r \geq 1$ $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ oraz że istnieje ciągła homotopia $h\colon [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$, zachowująca końce krzywych γ_0, γ_1, czyli

(i) $h(x,0) = \gamma_0(x)$ i $h(x,1) = \gamma_1(x)$ dla $x \in [a,b]$

(ii) $h(a,t) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $h(b,t) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ dla $t \in [0,1]$.

Istnieje wtedy homotopia $H\colon [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$ klasy C^r spełniająca oba warunki (i) oraz (ii).[16]

Dowód. Funkcje γ_0, γ_1 można przedłużyć na pewien przedział otwarty zawierający przedział $[a,b]$ do funkcji klasy C^r (gdy $r < \aleph_0$ — łatwe, gdy $r = \infty$ trudniejsze, a dla funkcji analitycznych w ogóle nieprawda). W dalszym ciągu zakładamy, że funkcje f_0, γ_1 są określone na pewnym przedziale otwartym.

[16] Różniczkowalność funkcji, która jest określona na prostokącie domkniętym oznacza, że można ją przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na pewnym nadzbiorze otwartym.

Funkcja h jest ciągła na zbiorze zwartym $P=[a,b]\times[0,1]$, więc istnieje taka liczba ε, że $B\big(h(x,t),\varepsilon\big)\subset U$.

Niech $\tilde{h}(x,t)=(1-t)\gamma_0(x)+t\gamma_1(x)$. Funkcja $\tilde{h}$ jest klasy C^r na pewnym otwartym zbiorze, który zawiera prostokąt $P=[a,b]\times[0,1]$, ale nie można twierdzić, że jej wartości znajdują się w zbiorze U (jeśli zbiór U jest wypukły, to $\tilde{h}(x,t)\in U$ dla każdego $(x,t)\in P=[a,b]\times[0,1]$). Z definicji $\tilde{h}$ i własności krzywych γ_0,γ_1 wynika, że $\tilde{h}_{|\partial P}=h_{|\partial P}$, zatem $\tilde{h}(\partial P)\subset U$, a ponieważ zbiór ∂P jest zwarty, więc istnieje taka liczba δ, że jeśli punkt (x,t) jest odległy od brzegu ∂P prostokąta P o mniej niż δ, to $\|\tilde{h}(x,t)-h(x,t)\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Prostokąt P jest zwarty, więc istnieje takie przekształcenie $\tilde{\tilde{h}}$ klasy C^∞, że dla każdego $(x,t)\in P$ spełnione jest nierówność $\|h(x,t)-\tilde{\tilde{h}}(x,t)\|<\frac{\varepsilon}{2}$ — wynika to np. z twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami na zbiorze zwartym.

Istnieją takie funkcje analityczne $\eta_0,\eta_1\colon\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$, że

$$\eta_0(x)=1=\eta_1(t)\text{ dla }(x,t)\in\left[a+\tfrac{\delta}{2},b-\tfrac{\delta}{2}\right]\times\left[\tfrac{\delta}{2},1-\tfrac{\delta}{2}\right]\text{ oraz}$$
$$\eta_0(x)=0=\eta_1(t)\text{ dla }(x,t)\notin\left[a+\tfrac{\delta}{4},b-\tfrac{\delta}{4}\right]\times\left[\tfrac{\delta}{4},1-\tfrac{\delta}{4}\right].$$

Niech $\eta(x,t)=\eta_0(x)\cdot\eta_1(t)$ i niech $H(x,t)=\big(1-\eta(x,t)\big)\cdot\tilde{h}(x,t)+\eta(x,t)\cdot\tilde{\tilde{h}}(x,t)$.

Bez trudu stwierdzamy, że funkcja H jest klasy C^r, w wąskim otoczeniu brzegu ∂P prostokąta P pokrywa się ona z funkcją $\tilde{h}$, a poza dwukrotnie szerszym otoczeniem brzegu pokrywa się z funkcją $\tilde{\tilde{h}}$. W szczególności $\|H(x,t)-h(x,t)\|<\varepsilon$ dla każdego punktu $(x,t)\in P$ i wobec tego $H(x,t)\in U$. ∎

Dzięki wykonanej pracy możemy bez żadnych problemów przenieść rezultaty dotyczące niezależności całki od krzywej łączącej dwa punkty na całki krzywoliniowe w przestrzeni k–wymiarowej. Zacznijmy od łatwego stwierdzenia, które pełni rolę twierdzenia o zamianie zmiennych (założenia są nieco za mocne, ale chcemy pokazać ideę). Jego nietrudny przy podanych założeniach dowód student przeprowadzi samodzielnie.

Twierdzenie 11.36 (o zamianie zmiennych w całce krzywoliniowej)
Załóżmy, że funkcje $P_1,P_2,\ldots,P_k$ są klasy C^1 w zbiorze otwartym $U\subseteq\mathbb{R}^k$. Funkcja $g\colon V\longrightarrow U$ jest również klasy C^1. Niech $Q_j(x)=\sum_i P_i\big(g(\mathbf{x})\big)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$. Wtedy dla dowolnej krzywej $\gamma\colon[\alpha,\beta]\longrightarrow V$ klasy C^1 zachodzi równość

$$\int_\gamma\Big(\sum_j Q_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_j\Big)=\int_{g\circ\gamma}\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i.\ \blacksquare$$

Wyrażenie $\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i$ nazywamy jednoformą różniczkową określoną w zbiorze U. Jednoformę $\sum_j Q_j\,\mathrm{d}x_j=\sum_{i,j}P_i\big(g(\mathbf{x})\big)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_j$ nazywamy cofnięciem jednoformy $\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i$ do zbioru V. Często piszemy $g^*\big(\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i\big)=\sum_j Q_j(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_j$.

Stosując twierdzenie o zamianie zmiennych w całce krzywoliniowej i twierdzenia wykazane w przypadku $k=2$ bez trudu możemy wykazać, że jeśli wszystkie funkcje $P_1,P_2,\ldots,P_k$ są klasy C^1 w obszarze U, to prawdziwe są następujące stwierdzenia.

1° Jeśli całka $\int_\gamma\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i$ nie zależy od krzywej γ a tylko od jej końców, to dla dowolnych wskaźników i,j i dowolnego punktu $\mathbf{y}\in U$ zachodzi równość $\frac{\partial P_i}{\partial y_j}=\frac{\partial P_j}{\partial y_i}$.

2° Całka $\int_\gamma\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i$ nie zależy od krzywej γ a tylko od jej końców wtedy i tylko wtedy, gdy całka po dowolnej krzywej zamkniętej zawartej w U równa jest 0.

3° Całka $\int_\gamma \sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i$ nie zależy od krzywej γ a tylko od jej końców wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego i oraz dowolnego $\mathbf{y}\in U$ zachodzi równość $\frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = P_i(\mathbf{y})$. Mówimy w tym przypadku, że funkcja f jest funkcją pierwotną jednoformy $\sum_i P_i\,\mathrm{d}y_i$.

4° Jeśli obszar U jest jednospójny i dla dowolnych wskaźników i,j i dowolnego punktu $\mathbf{y}\in U$ zachodzi równość $\frac{\partial P_i}{\partial y_j} = \frac{\partial P_j}{\partial y_i}$, to istnieje funkcja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego i oraz dowolnego $\mathbf{y}\in U$ zachodzi równość $\frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = P_i(\mathbf{y})$.

Niech $V\subseteq\mathbb{R}^2$ będzie obszarem, czyli zbiorem otwartym i spójnym. Przyjrzyjmy się jeszcze wzorowi Greena zakładając, że przekształcenie $g\colon V\longrightarrow U$ jest homeomorfizmem klasy C^2, oraz że funkcje $P_1,\ldots,P_k\colon U\longrightarrow\mathbb{R}$ są klasy C^1. Załóżmy jeszcze, że dla każdego $\mathbf{x}\in V$ różniczka $Dg(\mathbf{x})$ jest włożeniem (monomorfizmem). Jeśli $\gamma\colon S^1\longrightarrow V$ jest krzywą zwykłą zamkniętą, to $g\circ\gamma\colon S^1\longrightarrow U$ też jest krzywą zwykłą zamkniętą. W dalszym ciągu $\mathrm{int}(\gamma)$ oznacza obszar ograniczony krzywą γ, czyli składową ograniczoną zbioru $\mathbb{R}^2\setminus\gamma(S^1)$. Z twierdzenia Greena wynika, że

$$
\begin{aligned}
&\int_{g\circ\gamma}\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i = \int_\gamma g^*\Big(\sum_i P_i(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y_i\Big) =\\
&=\int_\gamma\Big(\big(\sum_i P_i\big(g(\mathbf{x})\big)\tfrac{\partial g_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}x_1 + \big(\sum_i P_i\big(g(\mathbf{x})\big)\tfrac{\partial g_i}{\partial x_2}(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}x_2\Big) \xlongequal[\textit{Greena}]{\textit{twierdzenie}}\\
&=\int_{\mathrm{int}(\gamma)}\Big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\big[\sum_i P_i\big(g(\mathbf{x})\big)\tfrac{\partial g_i}{\partial x_2}(\mathbf{x})\big] - \tfrac{\partial}{\partial x_2}\big[\sum_i P_i\big(g(\mathbf{x})\big)\tfrac{\partial g_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})\big]\Big)\,\mathrm{d}\ell_2 \xlongequal{\textit{symetria } D^2g(\mathbf{x})}\\
&=\int_{\mathrm{int}(\gamma)}\Big(\sum_{i,j}\tfrac{\partial P_i}{\partial y_j}\big(g(\mathbf{x})\big)\tfrac{\partial g_j}{\partial x_1}(\mathbf{x})\tfrac{\partial g_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \sum_{i,j}\tfrac{\partial P_i}{\partial y_j}\big(g(\mathbf{x})\big)\tfrac{\partial g_j}{\partial x_2}(\mathbf{x})\tfrac{\partial g_i}{\partial x_1}(\mathbf{x})\Big)\,\mathrm{d}\ell_2 =\\
&=\int_{\mathrm{int}(\gamma)}\left(\sum_{i,j}\tfrac{\partial P_i}{\partial y_j}\big(g(\mathbf{x})\big)\begin{vmatrix}\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_j}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}\ell_2 =\\
&=\int_{\mathrm{int}(\gamma)}\left(\sum_{i>j}\Big(\tfrac{\partial P_i}{\partial y_j}\big(g(\mathbf{x})\big) - \tfrac{\partial P_j}{\partial y_i}\big(g(\mathbf{x})\big)\Big)\begin{vmatrix}\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_j}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\right)\mathrm{d}\ell_2
\end{aligned}
$$

Widać więc wyraźnie, że twierdzenie Greena można przenieść w wyższe wymiary w następującym sensie: można rozpatrywać dwuwymiarową rozmaitość w przestrzeni $\mathbb{R}^k$, której „brzegiem” jest krzywa przedziałami gładka. Wtedy całka z jednoformy $\sum_i P(\mathbf{x}_i)\,\mathrm{d}x_i$ po „brzegu” tej rozmaitości równa jest całce z czegoś dziwnie wyglądającego względem dwuwymiarowej miary Lebesgue'a. Przyjrzyjmy się temu czemuś dokładniej w przypadku $k=3$. Pod całką występuje długie wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\tfrac{\partial P_2}{\partial y_1}\big(g(\mathbf{x})\big) - \tfrac{\partial P_1}{\partial y_2}\big(g(\mathbf{x})\big)\Big)\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix} +\\
&\qquad + \Big(\tfrac{\partial P_3}{\partial y_2}\big(g(\mathbf{x})\big) - \tfrac{\partial P_2}{\partial y_3}\big(g(\mathbf{x})\big)\Big)\begin{vmatrix}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix} +\\
&\qquad\qquad + \Big(\tfrac{\partial P_1}{\partial y_3}\big(g(\mathbf{x})\big) - \tfrac{\partial P_3}{\partial y_1}\big(g(\mathbf{x})\big)\Big)\begin{vmatrix}\frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Możemy stwierdzić, że całkowane wyrażenie to iloczyn skalarny dwóch wektorów. Pierwszy z nich, to

$$\Big[\tfrac{\partial P_3}{\partial y_2}\big(g(\mathbf{x})\big)-\tfrac{\partial P_2}{\partial y_3}\big(g(\mathbf{x})\big),\ \tfrac{\partial P_1}{\partial y_3}\big(g(\mathbf{x})\big)-\tfrac{\partial P_3}{\partial y_1}\big(g(\mathbf{x})\big),\ \tfrac{\partial P_2}{\partial y_1}\big(g(\mathbf{x})\big)-\tfrac{\partial P_1}{\partial y_2}\big(g(\mathbf{x})\big)\Big],$$

a drugi to

$$\left[\begin{vmatrix}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\right].$$

Bez trudu można zauważyć, że

$$\left[\begin{vmatrix}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix}\right]=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(\mathbf{x})\end{pmatrix}\right]\times\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_3}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{pmatrix}\right].$$

Długość iloczynu wektorowego $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x})\times\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x})$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez te wektory, czyli pierwiastkowi kwadratowemu z ich wyznacznika Gramma. W dalszym ciągu

$$\mathbf{n}(\mathbf{x})=\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x})\times\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x})}{\|\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x})\times\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x})\|}.$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ jest wektorem o długości 1; normalnym do powierzchni $g(V)\subseteq\mathbb{R}^3$, czyli wektor prostopadłym do wektorów $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x})$ i $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x})$; jego zwrot został tak wybrany, że wyznacznik macierzy, której pierwszą kolumną jest $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, drugą — $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x})$, a trzecią — $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x})$ jest dodatni.

Jeśli potraktujemy pochodną cząstkową $\frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ jako formalny iloczyn wielkości $\frac{\partial}{\partial x_i}$ i P_j, zdefiniujemy formalny wektor $\nabla=[\frac{\partial}{\partial y_1},\ \frac{\partial}{\partial y_2},\ \frac{\partial}{\partial y_3}]$, to otrzymamy

$$\nabla\times[P_1,P_2,P_3]=\Big[\frac{\partial P_3}{\partial y_2}-\frac{\partial P_2}{\partial y_3},\ \frac{\partial P_1}{\partial y_3}-\frac{\partial P_3}{\partial y_1},\ \frac{\partial P_2}{\partial y_1}-\frac{\partial P_1}{\partial y_2}\Big].$$

Ten ostatni wektor oznaczany jest symbolem $\mathrm{rot}(P)$, rzadziej $\mathrm{curl}(P)$ i nazywany jest rotacją pola wektorowego.[17] Otrzymany wzór można więc zapisać jako

$$\int_{g\circ\gamma}P_1\,\mathrm{d}y_1+P_2\,\mathrm{d}y_2+P_3\,\mathrm{d}y_3=\int_{g(\mathrm{int}(\gamma))}\mathrm{rot}(P)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\ell_{g(\mathrm{int}(\gamma))}.$$

W tej wersji wzoru w zasadzie nie występuje parametryzacja g, tylko jako ozdobnik: po lewej stronie jest całka po krzywej, którą można sparametryzować inaczej, po prawej całka po dwuwymiarowej powierzchni, więc wielkość niezależna od parametryzacji. Niestety przedstawione podejście zależy wyraźnie od wymiaru. Nie ma jak zdefiniować iloczynu wektorowego dwóch wektorów w przestrzeni cztero– lub więcejwymiarowej. Można jednak postąpić inaczej i wtedy wszystko się dobrze uda. Wyrażenie $\sum_i P_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i$ traktujemy jako funkcjonał liniowy przypisujący „wektorowi $\mathbf{v}$ stycznemu do $\mathbb{R}^k$ w punkcie $\mathbf{x}$" liczbę $\sum_i P_i(\mathbf{x})v_i$.

W wyrażeniu

$$\sum_{i>j}\Big(\tfrac{\partial P_i}{\partial y_j}\big(g(\mathbf{x})\big)-\tfrac{\partial P_j}{\partial y_i}\big(g(\mathbf{x})\big)\Big)\begin{vmatrix}\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_j}{\partial x_2}(\mathbf{x})\\ \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(\mathbf{x})\end{vmatrix}$$

zastąpimy $\frac{\partial P_i}{\partial y_j}\big(g(\mathbf{x})\big)-\frac{\partial P_j}{\partial y_i}$ przez $Q_{j,i}(\mathbf{y})$, zamiast $\frac{\partial g_j}{\partial x_1}$ będziemy pisać u_j, a zamiast $\frac{\partial g_j}{\partial x_2}$ — v_j. Wtedy wyrażenie $\sum_{i>j}Q_{j,i}(\mathbf{y})\begin{vmatrix}u_j & v_j\\ u_i & v_i\end{vmatrix}$ możemy potraktować jako wartość

[17] Termin pochodzi od Maxwella.

funkcjonału dwuliniowego antysymetrycznego w punkcie $(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{y}$ jest ustalone! Czytelnik bez trudu, po chwili zastanowienia, stwierdzi, że funkcjonały m–liniowe antysymetryczne tworzą przestrzeń liniową wymiaru $\binom{k}{m}$.

Jeśli dla każdego $\mathbf{y}$ z pewnego obszaru U zadany jest taki funkcjonał, to mówimy, że zdefiniowana została m–liniowa forma zewnętrzna w obszarze U. Jeśli $j<i$, to przyjmujemy, że $(\mathrm{d}y_j\wedge \mathrm{d}y_i)(\mathbf{u},\mathbf{v})=\begin{vmatrix} u_j & v_j\\ u_i & v_i\end{vmatrix}$ — to przykład dwuformy zewnętrznej, a właściwie $\binom{k}{2}$ przykładów. Te formy (w ustalonym punkcie) stanowią bazę przestrzeni dwuform. Jeśli w obszarze U zadana jest dwuforma, której współczynniki względem podanej bazy są ciągłe, to nazywamy ja formą ciągłą, jeśli współczynniki są klasy C^r to mówimy, że forma jest klasy C^r. Tak samo definiujemy trzyformy oraz p–formy dla dowolnego $p\ge 1$. Przyjmuje się zwykle, że funkcje to 0–formy.

Przykład 11.37 Suma $\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y-\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$ jest 1–formą klasy C^∞ w zbiorze $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. ■

Przykład 11.38 Suma $x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ jest 2–formą klasy C^∞ w całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. ■

Przykład 11.39 Suma $\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,)^3}\big(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big)$ jest 2–formą klasy C^∞ na zbiorze $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. ■

Kilka zadań

Zadanie 11.1 Obliczyć $\mathrm{rot}[-y,x,0]$, $\mathrm{rot}[x,y,0]$,

Zadanie 11.2 Obliczyć $\mathrm{rot}[x,y,z]$, $\mathrm{rot}\big[\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{y}\big]$.

Zadanie 11.3 Znaleźć $\mathrm{rot}\big[f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big)\mathbf{v}\big]$, gdzie f jest funkcją klasy C^1, zaś $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ oznacza ustalony wektor.

Zadanie 11.4 Obliczyć $\mathrm{rot}\big[\mathbf{v}\times\big(f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\big)[x,y,z]\big)\big]$, gdzie f jest funkcją klasy C^1, zaś $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ oznacza ustalony wektor.

Zadanie 11.5 Obliczyć całkę $\int_K(2x+y)\,dx+(x-2y)\,dy$ wzdłuż następującej krzywej $K=\{(x,y)\colon\ x^4+y^3=1;\ \ x\leqslant 0\leqslant y\}$, zorientowanej tak, że jej początkiem jest punkt $(0,1)$, a końcem punkt $(-1,0)$.

Zadanie 11.6 Niech $K=\{(x,y)\colon\ 4x^2+y=5,\ \ y\geqslant 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x. Obliczyć całkę $\int_K\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ wzdłuż krzywej K.

Zadanie 11.7 Zbadać, czy forma $\omega=|x+y|\,dx+|x+y|\,dy$ ma w obszarze $G=\mathbb{R}^2$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $\mathbf{x},\mathbf{z}\in G$ i dla każdej krzywej $\gamma\colon[a,b]\longrightarrow G$, o początku $\mathbf{x}=\gamma(a)$ i końcu $\mathbf{z}=\gamma(b)$, wartość $\int_\gamma\omega$ jest taka sama).

Zadanie 11.8 Zbadać, czy forma $\omega = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+xy+y^2}$ ma w obszarze $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in G$ i dla każdej krzywej $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow G$, o początku $\mathbf{x} = \gamma(a)$ i końcu $\mathbf{z} = \gamma(b)$, wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).

Zadanie 11.9 Niech $\omega = f\,dx + g\,dy$ będzie formą klasy C^1 w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, zamkniętą ($\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$). Udowodnić, że istnieje liczba $c \in \mathbb{R}$ oraz funkcja (klasy C^2) $u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ takie, że $\omega = c\cdot\omega_0 + du$, gdzie $\omega_0 = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

Zadanie 11.10 Obliczyć całkę $\displaystyle\int_C \frac{(\sinh x)\,dy - (\sin y)\,dx}{\cosh x - \cos y}$ po okręgu jednostkowym $C = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1\}$, zorientowanym dodatnio („przeciwnie niż zegarek”).

Zadanie 11.11 Niech $\gamma(t) = (t^3-3t,\, t^4-2t^2)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ rozcina płaszczyznę na kilka obszarów, z których jeden jest ograniczony. Obliczyć jego miarę płaską.

Zadanie 11.12 Niech $\omega = \dfrac{y^2dx - 2xy\,dy}{x^2+y^4}$. Obliczyć całkę tej formy wzdłuż półokręgu $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1,\ \ y \geqslant 0\}$ o początku $(1,0)$ i końcu $(-1,0)$.

Zadanie 11.13 Niech $G \subseteq \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcja $f\colon G \to \mathbb{C}$ ma *pochodną zespoloną* w punkcie $z_0 \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (skończona) granica $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Utożsamiajmy liczby $z \in \mathbb{C}$ z punktami $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(z = x+iy)$. Niech $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $(u,v\colon G \longrightarrow \mathbb{R})$.
Dowieść, że jeśli f ma pochodną zespoloną w punkcie $z_0 = x_0+iy_0 \in G$, to funkcje u, v są w punkcie (x_0,y_0) różniczkowalne oraz spełniają w tym punkcie obydwie równości $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Zadanie 11.14 Niech $\gamma\colon S^1 \longrightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ będzie krzywą Jordana kawałkami klasy C^1, gdzie G jest obszarem , zawierającym $\gamma(S^1)$ wraz z ograniczoną składową zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$. Załóżmy, że funkcja $f\colon G \to \mathbb{C}$ ma ciągła pochodną zespoloną w każdym punkcie zbioru G. Obliczyć $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ (czyli $\int_C (u+i\,v)(\,\mathrm{d}x + i\ \mathrm{d}y)$.

Uwaga 11.40 W tym zadaniu założenie ciągłości f' jest zbędne, dodaliśmy, bo inaczej należałoby to stwierdzenie udowodnić, a nie o to w tym zadaniu chodzi.

Zadanie 11.15 Korzystając z twierdzenia z poprzedniego zadania, obliczyć całki niewłaściwe $\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$. [Można rozważyć funkcję $f(z) = e^{iz^2}$; i krzywą Jordana złożoną z odcinka osi rzeczywistej, łuku okręgu oraz odcinka prostej $x = y$.]

Zadanie 11.16 Niech C oznacza brzeg obszaru $D = \{(x,y)\colon\quad 0 < y < x\ln\frac{1}{x}\}$. Obliczyć $\int_C (x+y)\d{x} - x\d{y}$.

Zadanie 11.17 Sfera $x^2+y^2+z^2=9$ w przecięciu z płaszczyzną $x+y+z=3$ tworzy okrąg. Niech γ będzie krzywą opisującą łuk tego okręgu o początku $(2,2,-1)$ i końcu (0,3,0), zawarty w półprzestrzeni $\{(x,y,z)\colon \quad y>0\}$. Obliczyć $\int_\gamma \frac{yz\,\mathrm{d}x - zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z}{y^2}$.

Zadanie 11.18 Niech $\gamma(t)=(t,\, t(1-\cos t),\, t\sin t)$ dla $t\in[0,\,2\pi]$. Obliczyć

$$\int_\gamma \big((y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z)\big).$$

Zadanie 11.19 Niech $C=\{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2=1 \ \text{ i } \ z=xy\}$. Wykazać, że C jest zwartą i spójną rozmaitością jednowymiarową.
Niech $\omega(x,y,z)=ydx+zdy+xdz$ i niech wektor $(0,1,1)$ styczny do C w punkcie $(1,0,0)$ wyznacza orientację rozmaitości C. Obliczyć $\int_C \omega$.

Zadanie 11.20 Niech $\omega(x,y,z)=\dfrac{1}{z^3}\,dx+\dfrac{2y}{z^3}\,dy-\dfrac{3(x+y^2)}{z^4}\,dz$, $\mathbf{p}=(1,-1,6)$, $\mathbf{q}=(2,5,3)$. Niech C oznacza krótszy z łuków koła wielkiego sfery $x^2+y^2+z^2=38$ o początku $\mathbf{p}$ i końcu $\mathbf{q}$. Znaleźć całkę $\int_C \omega$.

Zadanie 11.21 Obliczyć całkę formy różniczkowej $\omega=\frac{2xy\ \mathrm{d}x-(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y}{y^2}$ wzdłuż łuku krzywej określonej równaniem $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{6}\sqrt{x^2+y^2}$, mającego początek $(\frac12\sqrt3,\frac12)$ i koniec $(1,\sqrt3)$, położonego w ćwiartce $\{(x,y)\colon \quad x,y>0\}$.

Zadanie 11.22 Niech $C_1=\{(x,y)\colon \quad (x-1)^2+y^2=\frac14\}$, $C_2=\{(x,y)\colon \quad x^2+y^2=4\}$ oraz $C_3=\{(x,y)\colon \quad (x+1)^2+y^2=\frac14\}$ będą okręgami zorientowanymi „przeciwnie do ruchu wskazówek zegara". Niech

$$\omega(x,y)=\frac{x(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,\mathrm{d}y-\frac{y(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Obliczyć całki: $\int_{C_1}\omega$, $\int_{C_2}\omega$ i $\int_{C_3}\omega$.

Zadanie 11.23 Niech $\omega=\frac{1}{\sqrt{x+y}}\big((3x+2y)\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y\big)$. Obliczyć całkę $\int_C\omega$ wzdłuż łuku okręgu $C=\{(x,y)\colon \quad x^2+y^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ o początku $(1,0)$ i końcu $(0,1)$.

Zadanie 11.24 Niech K będzie zorientowanym łukiem o początku $(\pi,-1)$ i końcu $(3\pi,1)$. Obliczyć całkę $\int_K (e^y+e^{-y})\cos x\,\mathrm{d}x+(e^y-e^{-y})\sin x\,\mathrm{d}y$ i wyjaśnić, jak zależy od wybranej drogi łączące wskazane punkty.

Zadanie 11.25 Niech $K=\{(x,y,z)\colon \quad x^2-2x+z=0,\ y^2-2y-z=-1,\ x\geqslant 1\}$ będzie zorientowanym łukiem o początku $(1,0,1)$ i końcu $(1,2,1)$.

Obliczyć całkę $\displaystyle\int_K \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.