Miara na rozmaitości w R^k

Ostatnie poprawiałem ten tekst 23 kwietnia 2015 r.

Zwykła prośba: proszę o informację o zauważonych błędach, poprawię.

Zajmiemy się teraz określeniem miary na rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Rozpoczniemy od przykładu wskazującego na pewną trudność.

Przykład 10.1 Schwarza
Niech W oznacza walec o wysokości 1 i którego podstawa ma promień 1. Wykażemy, że w powierzchnię boczną tego walec można wpisać wielościan, który ma dowolnie dużą powierzchnię i którego *wszystkie* krawędzie są krótkie. Ścianami tego wielościanu będą trójkąty równoramienne, więc pole będziemy w stanie znaleźć bez kłopotu. Podzielimy walec płaszczyznami równoległymi do podstaw na n przystających walców (czyli prowadzimy $n-1$ płaszczyzn). Mamy więc $n+1$ okręgów. W każdy z nich wpisujemy m–kąt foremny w ten sposób, że wierzchołki wielokąta wpisanego w $j+1$–wszy (licząc od dołu) okrąg znajdują się nad środkami łuków j–tego okręgu wyznaczonych przez sąsiednie wierzchołki wielokąta wpisanego w j–ty okrąg. Mamy więc $m(n+1)$ punktów na powierzchni bocznej walca. Rozważamy powierzchnię będącą sumą trójkątów, których dwoma wierzchołkami są sąsiednie punkty jednego okręgu, a trzecim wierzchołek znajdujący się na sąsiednim okręgu nad lub pod środkiem łuku wyznaczonego przez dwa pierwsze. Otrzymujemy więc $2m$ trójkątów „między” sąsiednimi okręgami, w sumie $2mn$ trójkątów. Pole jednego takiego trójkąta równe jest $\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{1}{n^2}+(1-\cos\frac{\pi}{m})^2}$, zatem pole $P_{m,n}$ powierzchni całkowitej wielościanu równe jest $2m\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{1+4n^2\sin^4\frac{\pi}{m}}$. Przyjąwszy $n=m$ otrzymujemy

$$P_{m,n} = 2m\sin\tfrac{\pi}{m}\sqrt{1+4m^2\sin^4\tfrac{\pi}{m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\pi,$$

jest to rezultat zgodny z oczekiwaniami: pole wielościanu którego wszystkie krawędzie są bardzo krótkie i którego wierzchołki leżą na powierzchni bocznej walca w miarę gęsto przybliża pole powierzchni bocznej walca. Przyjmijmy teraz $n=m^2$. Otrzymujemy w tym przypadku

$$P_{m,n} = 2m\sin\tfrac{\pi}{m}\sqrt{1+4m^4\sin^4\tfrac{\pi}{m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2\pi\sqrt{1+4\pi^4},$$

a więc „za dużo”. Niech $n=m^3$. Teraz

$$P_{m,n} = 2m\sin\tfrac{\pi}{m}\sqrt{1+4m^6\sin^4\tfrac{\pi}{m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty.$$

Oznacza to, że próba zdefiniowania pola powierzchni bocznej walca przez przybliżanie polami wielościanów wpisanych w tę powierzchnię skończy się niepowodzeniem, chyba że zwiększymy wymagania wobec nich. Przyczyną tych nieco dziwacznych rezultatów jest to, że rozpatrywane trójkąty mając wierzchołki na powierzchni bocznej walca i krótkie krawędzie nie przybliżały jednak powierzchni bocznej, bo kąt między płaszczyzną trójkąta i powierzchnią boczną (czyli płaszczyzną styczną do powierzchni bocznej) nie dążył w drugim ani w trzecim przypadku do 0 (w pierwszym tak było). Oznacza to, że przy wprowadzaniu definicji należy zadbać również o ten czynnik. ■

Załóżmy, że $\psi\colon V \longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^k$ jest parametryzacją pewnego otwartego podzbioru $U=\psi(V)$ rozmaitości m–wymiarowej M. Zdefiniujemy najpierw miarę borelowską na zbiorze U. Przypomnijmy, że wyznacznikiem Grama wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ nazywamy wyznacznik macierzy $(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j)_{1\le i,j\le m}$. Pełni on rolę kwadratu objętości m–wymiarowego równoległościanu rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Jeśli jest on równy 0, to wektory są liniowo zależne, co jest zgodne z intuicyjnym pojmowaniem objętości.

Zdefiniujmy $g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m) = \det(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j)_{1\le i,j\le m}$ dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^k$. Mamy więc

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m).$$

Jasne jest, że funkcja g jest $2m$–liniowa na $(\mathbb{R}^k)^{2m}$ przy czym jest ona antysymetryczna jako funkcja wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ przy ustalonych wektorach $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$. Jest też antysymetryczna przy ustalonych wektorach $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ jako funkcja wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$. Mamy

$$\begin{aligned}
&g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m + t\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m + t\mathbf{v}_1) = \\
&= g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, t\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) + \\
&\qquad + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, t\mathbf{v}_1) + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, t\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, t\mathbf{v}_1) = \\
&= g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) + 0 + 0 + 0 = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m),
\end{aligned}$$

bo wyznacznik macierzy zawierającej proporcjonalne wiersze jest równy 0. Oczywiście wektor $\mathbf{v}_1$ można zastąpić dowolnym z wektorów $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$. W rezultacie: wartość wyznacznika Grama układu wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ nie zmienia się w wyniku dodania do wektora $\mathbf{v}_m$ dowolnej kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$. Można więc odjąć od $\mathbf{v}_m$ rzut tego wektora na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$ zachowując wartość wyznacznika Grama. Z definicji wynika natychmiast, że jeżeli $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_m$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$, to zachodzi równość

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{m-1})\|\mathbf{v}_m\|^2.$$

To żywo przypomina dosyć znany wzór na objętość równoległościanu: objętość równoległościanu to iloczyn pola podstawy i wysokości. Druga miła okoliczność to niezmienniczość wyznacznika Grama przy izometriach: jeśli $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest izometrią liniową, to $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m) = G(L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \ldots, L\mathbf{v}_m)$. Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^k$ istnieje taka izometria liniowa $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, że

$$L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2, \ldots, L\mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m \times \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-m}\}.$$

Dla wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m$ wyznacznik Grama $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ jest równy kwadratowi wyznacznika macierzy, której kolumnami są wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, czyli kwadratowi m–wymiarowej miary Lebesgue'a równoległościanu rozpiętego przez te wektory. Rozsądnie jest więc przyjąć, że $G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ jest kwadratem miary równoległościanu rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ nie tylko w tym przypadku, ale również, gdy są one położone w przestrzeni wyższego wymiaru (np. równoległobok w $\mathbb{R}^3$ ma jakieś pole).

Jeśli $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest parametryzacją otwartego podzbioru U rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$, $\mathbf{q} \in V$, to różniczka $D\psi(\mathbf{q})\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ odwzorowuje przestrzeń $\mathbb{R}^m$ na $T_{\psi(\mathbf{q})}M$. Jeśli Q jest kostką o środku $\mathbf{q}$, to $D\psi(\mathbf{q})(Q) \subseteq T_{\psi(\mathbf{q})}$ jest m–wymiarowym równoległościanem, którego objętość równa jest $\sqrt{\det\big(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q})\big)} \cdot \ell_m(Q)$. To sugeruje następującą definicję: jeśli $A \subseteq V$, to

$$\ell_M(\psi(A)) = \int_A \sqrt{\det\left(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q})\right)}d\ell_m.$$

Tutaj ℓ_M oznacza miarę na rozmaitości, którą właśnie definiujemy. Nazywać ją będziemy miarą Lebesgue'a–Riemanna na M. Taka definicja wymaga po pierwsze stwierdzenia, że wynik jest zależny jedynie od zbioru $\psi(A)$, a nie od A, ψ itp. Po drugie trzeba wyjaśnić, dla jakich zbiorów określamy miarę, po trzecie trzeba rozszerzyć tę definicję na zbiory, które nie są zawarte w dziedzinie jednej mapy, czyli na taki, których nie można sparametryzować za pomocą jednego przekształcenia ψ.

Zaczniemy od pierwszej kwestii. Dowód odpowiedniego lematu poprzedzimy dosyć ważnym twierdzeniem opisującym strukturę przekształcenia klasy C^r, którego różniczka ma rząd niezależny od punktu.

Twierdzenie 10.2 (o rzędzie)
Jeśli $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest przekształceniem klasy C^r, $r \geq 1$ i dla każdego $\mathbf{x} \in V \subseteq \mathbb{R}^k$ zachodzi równość $r(D\psi)(\mathbf{x}) = m$, to dla każdego punktu $\mathbf{q} \in V$ istnieją otwarte otoczenia $V_1 \ni \mathbf{q}$ oraz $V_2 \ni \psi(\mathbf{q})$ oraz dyfeomorfizmy (na obraz) $f\colon V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g\colon V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^l$ takie, że

$$g \circ \psi \circ f^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{l-m})$$

Dowód. Niech $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_l)$. Niech $\mathbf{q} \in V$. Ponieważ rząd przekształcenia $D\psi(\mathbf{q})$ równy jest m, więc pewien minor wymiaru m macierzy $D\psi(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{q})\right)$ jest różny od 0. Po ewentualnej zmianie numeracji współrzędnych w dziedzinie lub w obrazie można przyjąć, że $\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{q})\right|_{1\leq i,j\leq m} \neq 0$. Niech

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots x_k) = \left(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x}), x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_k\right),$$

oczywiście jeśli $m = k$, to współrzędnych o numerach większych niż $m = k$ nie ma. Przekształcenie f jest oczywiście tej samej klasy co ψ (a przynajmniej nie mniejszej). Mamy

$$Df(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(\mathbf{q}) & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_m}(\mathbf{q}) & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{m+1}}(\mathbf{q}) & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}(\mathbf{q}) & \ldots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_m}(\mathbf{q}) & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_{m+1}}(\mathbf{q}) & \ldots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}(\mathbf{q}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_m}{\partial x_1}(\mathbf{q}) & \ldots & \frac{\partial\psi_m}{\partial x_m}(\mathbf{q}) & \frac{\partial\psi_m}{\partial x_{m+1}}(\mathbf{q}) & \ldots & \frac{\partial\psi_m}{\partial x_k}(\mathbf{q}) \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy równy jest $\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{q})\right|_{1\leq i,j\leq m} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Wynika stąd (twierdzenie o odwracaniu funkcji), że istnieje otoczenie V_1 punktu $\mathbf{q}$, po obcięciu do którego f jest dyfeomorfizmem. Pierwszych m współrzędnych przekształcenia $\psi \circ f^{-1}$ pokrywa się z pierwszymi m współrzędnymi przekształcenia $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$. Niech

$\psi(f^{-1}(\mathbf{x})) = (x_1, \ldots, x_m, \tilde{\psi}_{m+1}(\mathbf{x}), \ldots, \tilde{\psi}_l(\mathbf{x}))$. Bez trudu stwierdzamy, że

$$D(\psi \circ f^{-1})(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_m}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \frac{\partial \tilde{\psi}_{m+1}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_m}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_{m+1}} & \ldots & \frac{\partial \tilde{\psi}_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Złożenie przekształcenia liniowego z izomorfizmem nie zmienia rzędu. Wobec tego rząd $D(\psi \circ f^{-1})(\mathbf{x})$ jest równy m, czyli taki sam jak macierz jednostkowa znajdująca się w lewym górnym rogu macierzy $D(\psi \circ f^{-1})(\mathbf{x})$. Wynika stąd, że $\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0$ dla $i = m+1, \ldots, l$, $j = m+1, \ldots, k$. Oznacza to, że funkcje $\tilde{\psi}_{m+1}, \tilde{\psi}_{m+2}, \ldots, \tilde{\psi}_l$ nie zależą od zmiennych $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_k$, po ewentualnym zmniejszeniu V_1 można przyjąć, że $f(V_1)$ jest k–wymiarowym przedziałem, więc nie mam kłopotu z wywnioskowaniem stałości funkcji, której pochodna jest zerowa. Mamy więc prawo pisać $\tilde{\psi}_j(x_1, \ldots, x_m)$ zamiast $\tilde{\psi}_j(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_k)$ w przypadku $j = m+1, \ldots, l$. Definiujemy teraz $g(y_1, \ldots, y_l) = \big(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1} - \tilde{\psi}_{m+1}(y_1, \ldots, y_m), \ldots, y_l - \tilde{\psi}_l(y_1, \ldots, y_m)\big)$. Można z łatwością przekonać się o tym, że $g \circ \psi \circ f^{-1}(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ oraz że g jest dyfeomorfizmem:

$$g^{-1}(y_1, \ldots, y_l) = \big(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1} + \tilde{\psi}_{m+1}(y_1, \ldots, y_m), \ldots, y_l + \tilde{\psi}_l(y_1, \ldots, y_m)\big).$$

Dowód został zakończony. ■

Lemat 10.3 (o przechodzeniu od jednej mapy do drugiej mapy)
Jeśli $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ i $\tilde{\psi}\colon \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ są homeomorfizmami klasy C^r, $r \geq 1$, których różniczki we wszystkich punktach są różnowartościowe, $\psi(V) = \tilde{\psi}(\tilde{V})$, *to* przekształcenie $\psi^{-1} \circ \tilde{\psi}$ jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Niech $\mathbf{q} \in V$. Zgodnie z twierdzeniem o rzędzie istnieją (lokalnie) dyfeomorfizmy g i f takie, że $g \circ \psi \circ f^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0)$ w pewnym otoczeniu punktu $f(\mathbf{q})$. Przekształcenie $g \circ \psi \circ f^{-1}$ formalnie przekształca pewien podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^m$ w przestrzeń $\mathbb{R}^k$, ale faktycznie — w przestrzeń $\mathbb{R}^m$. Można je więc odwracać, odwrotne jest klasy C^r. Zachodzi równość

$$\psi^{-1} \circ \tilde{\psi} = f^{-1} \circ \big(g \circ \psi \circ f^{-1}\big)^{-1} \circ g \circ \tilde{\psi}.$$

Z niej wynika, że $\psi^{-1} \circ \tilde{\psi}$ klasy C^r, bo jest złożeniem przekształceń takiej klasy (różniczkowalność w punkcie jest własnością lokalną, więc niczemu w dowodzie nie przeszkadza to, że rozważane złożenie jest określone jedynie w dostatecznie małym otoczeniu punktu $f(\mathbf{q})$). Jest to oczywiście prawdą również w przypadku przekształcenia odwrotnego $\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$, zatem jest to dyfeomorfizm. Dowód został zakończony. ■

Lemat 10.4 (o niezależności miary od mapy)
Jeśli $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ i $\tilde{\psi}\colon \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ są homeomorfizmami klasy C^r, $r \geq 1$, których

różniczki we wszystkich punktach są różnowartościowe, $A \subseteq \psi(V) = \tilde{\psi}(\tilde{V})$ jest zbiorem borelowskim, *to*

$$\int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q})\big)} d\ell_m = \int_{\tilde{\psi}^{-1}(A)} \sqrt{\det\big(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})\big)} d\ell_m.$$

Dowód. Skorzystamy z tego, że przekształcenie $\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$ jest dyfeomorfizmem (poprzedni lemat). Z twierdzenia o zamianie zmiennych wynika, że $\Big($we wzorach poniżej przyjmujemy, że $\mathbf{q} = \big(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi\big)(\mathbf{x})\Big)$

$$\int_{\tilde{\psi}^{-1}(A)} \sqrt{\det\big(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})\big)}\, \mathrm{d}\ell_m(\mathbf{q}) =$$
$$= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})\big)} \cdot \big|\det D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})\big|\, \mathrm{d}\ell_m(\mathbf{x}) =$$
$$= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})\big) \cdot \big(\det D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})\big)^2}\, \mathrm{d}\ell_m(\mathbf{x}) =$$
$$= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big(D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})\big)^T \cdot \det\big(D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T D\tilde{\psi}(\mathbf{q})\big) \cdot \det D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\ell_m(\mathbf{x}) =$$
$$= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big[\big(D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})\big)^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q})^T \cdot D\tilde{\psi}(\mathbf{q}) \cdot D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})\big]}\, \mathrm{d}\ell_m(\mathbf{x}) =$$
$$= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big[\big(D\tilde{\psi}(\mathbf{q}) \cdot D(\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x})\big)^T D\big(\tilde{\psi} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \psi\big)(\mathbf{x})\big]}\, \mathrm{d}\ell_m(\mathbf{x}) =$$
$$= \int_{\psi^{-1}(A)} \sqrt{\det\big[\big(D\psi(\mathbf{x})\big)^T D\psi(\mathbf{x})\big]} d\ell_m(\mathbf{x}).$$

W tym rozumowaniu korzystaliśmy z tego, że wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników macierzy oraz, że w mnożenie liczb jest przemienne (mnożenie macierzy niestety przemienne nie jest). ■

Teraz można już zdefiniować miarę na rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Istnieje na każdej z nich atlas złożony z nie więcej niż przeliczalnej liczby map φ_1, φ_2, …. Załóżmy, że ich dziedzinami są zbiory U_1, U_2, … Jeśli $A \subseteq M$ jest zbiorem borelowskim, to każdy ze zbiorów $V_1 := A \cap U_1$, $V_2 := A \cap U_2 \setminus U_1$, $V_3 := A \cap U_3 \setminus (U_1 \cup U_2)$, … jest borelowski, są one parami rozłączne, więc można miarę określić wzorem

$$\ell_M(A) = \sum_n \ell_M(V_n), \text{ gdzie } \ell_M(V_n) = \int_{\varphi_n(V_n)} \sqrt{\det\big(D\varphi^{-1}(\mathbf{x})^T D\varphi^{-1}(\mathbf{x})\big)} d\ell_m(\mathbf{x}).$$

Wykazaliśmy, że wynik nie zależy od wyboru mapy. Jest jasne, że jest on również niezależny od sposobu rozbicia zbioru A na rozłączne podzbiory mieszczące się w dziedzinach map z jednego atlasu (na dziedzinie jednej mapy ℓ_m jest miarą, więc mając dwa rozbicia przeliczalne rozbicia $\{V_n\}$ i $\{W_m\}$ zbioru A możemy rozważyć rozbicie przeliczalne $\{V_n \cap W_m\}$ zbioru A). Miarę określiliśmy na zbiorach borelowskich. Można ją uzupełnić (np. korzystając z twierdzenia Caratéodory'go) dołączając do σ–ciała podzbiory zbiorów miary 0. Można też od razu przyjąć, że zbiór A jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(A \cap U)$ jest mierzalny dla dowolnej mapy φ określonej na zbiorze U, otwartym w M. Rozumowanie nie ulega zmianie, bo dyfeomorfizmy przekształcają zbiory mierzalne na zbiory mierzalne.

Przykład 10.5 (sfera)

Znajdziemy miarę sfery k–wymiarowej $S^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$. Miara zbiory skończonego jest oczywiście równa 0. Rzut stereograficzny przekształca sferę bez jednego punktu na całą przestrzeń $\mathbb{R}^k$. Wystarczy więc znaleźć całkę $\int_{\mathbb{R}^k} \sqrt{\det\big(D\psi(\mathbf{q})^T \cdot D\psi(\mathbf{q})\big)}\, \mathrm{d}\ell_k$, gdzie $\psi(\mathbf{x}) = \big(\frac{2\mathbf{x}}{1+\|\mathbf{x}\|^2}, \frac{\|\mathbf{x}\|^2-1}{\|\mathbf{x}\|^2+1}\big)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Zaczniemy od znalezienia $D\psi(\mathbf{x})$.

Korzystając ze standardowych praw różniczkowania otrzymujemy:

$$D\psi(\mathbf{x})\mathbf{h} = \left(\tfrac{2\mathbf{h}}{1+\|\mathbf{x}\|^2} - 2\mathbf{x}\tfrac{2\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^2}, \tfrac{-4\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^2}\right).$$

Mamy więc $\left\|D\psi(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\|^2 = \frac{4\|\mathbf{h}\|^2}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^2} - \frac{16(\mathbf{x}\cdot\mathbf{h})^2}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^3} + \frac{16\|\mathbf{x}\|^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{h})^2}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^4} + \frac{16(\mathbf{x}\cdot\mathbf{h})^2}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^4} = \frac{4\|\mathbf{h}\|^2}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)^2}$. Wykazaliśmy więc, że przekształcenie liniowe $D\psi(\mathbf{x})$ przekształca wektor $\mathbf{h}$ na wektor o długości $\frac{2\|\mathbf{h}\|}{1+\|\mathbf{x}\|^2}$. Jest więc podobieństwem w skali $\frac{2}{1+\|\mathbf{x}\|^2}$. Oznacza to, że kolumny macierzy $D\psi(\mathbf{x})$ są wzajemnie prostopadłymi wektorami o długości $\frac{2}{1+\|\mathbf{x}\|^2}$, a stąd wynika, że $\det\big(D\psi(\mathbf{q})^T\cdot D\psi(\mathbf{q})\big) = \left(\frac{2}{1+\|\mathbf{x}\|^2}\right)^k$. Miara sfery S^k jest więc równa $\int_{\mathbb{R}^k}\left(\frac{2}{1+\|\mathbf{x}\|^2}\right)^k \mathrm{d}\ell_k$. Dla obliczenia tej całki zastosujemy współrzędne sferyczne (biegunowe). Przyjmujemy więc jak w części dziewiątej, gdy obliczaliśmy miarę kuli k–wymiarowej, że

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\dots\cdot\cos\theta_{k-2}\cos\theta_{k-1}\\
x_2 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\dots\cdot\cos\theta_{k-2}\sin\theta_{k-1}\\
x_3 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\dots\cdot\sin\theta_{k-2}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .\\
x_{k-2} &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\\
x_{k-1} &= \varrho\cos\theta_1\sin\theta_2\\
x_k &= \varrho\sin\theta_1
\end{aligned}$$

Niech $H = \{(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{k-2},\theta_{k-1})\colon\quad |\theta_1| < \frac{\pi}{2}, |\theta_2| < \frac{\pi}{2},\dots,|\theta_{k-2}| < \frac{\pi}{2}, |\theta_{k-1}| < \pi\}$. Z twierdzenia o zamianie zmiennych wynika, że (nie przejmujemy się zbiorami miary 0)

$$\ell_{S^k}(S^k) = \int_{\mathbb{R}^k}\left(\tfrac{2}{1+\|\mathbf{x}\|^2}\right)^k \mathrm{d}\ell_k =$$

$$= \int_{(0,\infty)\times H}\left(\tfrac{2}{1+\varrho^2}\right)^k\Big(\varrho^{k-1}\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\dots\cos\theta_{k-2}\Big)d\ell_k \overset{Fubini}{=\!=\!=}$$

$$= \int_{(0,\infty)}\left(\tfrac{2}{1+\varrho^2}\right)^k\varrho^{k-1}d\varrho\cdot\int_H\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\dots\cos\theta_{k-2}d\ell_{k-1} =$$

$$= \int_0^\infty\left(\tfrac{2}{1+\varrho^2}\right)^k\varrho^{k-1}d\varrho\cdot k\ell_k(B(\mathbf{0},1)) \xrightarrow[d\varrho=(1+\mathrm{tg}^2 t)]{\varrho=\mathrm{tg}\, t} 2\int_0^{\pi/2}\left(\tfrac{2\,\mathrm{tg}\, t}{1+\mathrm{tg}^2 t}\right)^{k-1}dt\cdot k\ell_k(B(\mathbf{0},1)) =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sin^{k-1}2tdt\cdot k\ell_k(B(\mathbf{0},1)) = \int_0^\pi\sin^{k-1}\tau d\tau\cdot k\ell_k(B(\mathbf{0},1)) =$$

$$= \begin{cases}\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k-4}{k-3}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot k\ell_k(B(\mathbf{0},1)), & \text{jeśli } k>1 \text{ jest nieparzyste;}\\ \frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k-4}{k-3}\cdot\dots\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot k\ell_k(B(\mathbf{0},1)), & \text{jeśli } k>2 \text{ jest parzyste.}\end{cases}$$

Możemy więc napisać $\ell_{S^k}(S^k) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}\cdot\sqrt{\pi}\cdot k\cdot\ell_k(B(\mathbf{0},1))$, przy czym ten ostatni wzór zachodzi dla $k=1,2,\dots$ do sprawdzenia jego prawdziwości zachęcam studentów: przy okazji można przypomnieć sobie czym jest jest funkcja Γ. Na wszelki wypadek : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla $x>0$. ■

Otrzymaliśmy więc wzór ma miarę sfery wielowymiarowej o promieniu 1. Jasne jest, że z tego wzoru bez trudu można otrzymać wzór na miarę sfery k–wymiarowej o promieniu $r>0$.

Zadanie 10.1 Wykazać, że jeśli S_r jest k–wymiarową sferą o promieniu r, to

$$\ell_{S_r}(S_r) = r^k\ell_{S^k}(S^k) = r^k\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}\cdot\sqrt{\pi}\cdot k\cdot\ell_k(B(\mathbf{0},1)).\ ■$$

Zadanie 10.2 Wykazać, że liczba $\int_0^R\ell_{S_r}(S_r)dr$ jest miarą $k+1$–wymiarowej kuli o promieniu $R>0$. ■

Drugie zadanie jest ważne. Należy spróbować zrozumieć dlaczego to twierdzenie jest prawdziwe. Ono obejmuje wzory, które wszyscy kończący licea znają, ale nieliczni je zauważają:

$$\left(\pi r^2\right)' = 2\pi r, \qquad \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2.$$

W zasadzie niewiele zostało tu do zrobienia, wystarczy się uważnie przyjrzeć temu, co zrobiliśmy.

W części dziewiątej zdefiniowaliśmy środek ciężkości zbioru borelowskiego $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Pojęcie to możemy teraz stosować do rozmaitości. Można też wykazać twierdzenie Pappusa—Guldina dla powierzchni obrotowych.

Twierdzenie 10.6 (Pappusa–Guldina)[1]
Jeśli $A \subseteq \tilde{M} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \quad x_2 = 0 < x_1\}$ jest zbiorem, który ma środek ciężkości względem miary $\ell_{\tilde{M}}$, $\tilde{M}$ jest rozmaitością, B jest zbiorem, który powstaje w wyniku obrotu zbioru A o kąt 2π wokół prostej $x_1 = x_2 = 0$, to $\ell_M(B) = 2\pi r \ell_{\tilde{M}}(A)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości zbioru A od osi obrotu, $M \subseteq \mathbb{R}^3$ jest rozmaitością powstałą w wyniku obrotu rozmaitości $\tilde{M}$ wokół prostej $x_1 = x_2 = 0$.

Dowód. Zaczniemy oczywiście od wykazania, że M jest rozmaitością zakładając, że $\tilde{M}$ jest rozmaitością *jednowymiarową*. Przypadek dwuwymiarowej rozmaitości $\tilde{M}$ jest objęty poprzednią wersją tego twierdzenia, rozmaitości wymiaru 0 nie są przesadnie interesujące: są to przestrzenie dyskretne. Niech $\tilde{U}$ będzie dziedziną mapy $\tilde{\varphi}$ i niech $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}^{-1}$, $\tilde{V} = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Niech $\tilde{\psi}(x) = (\psi_1(x), 0, \psi_3(x))$. Definiujemy

$$\psi(x,t) = \big(\psi_1(x)\cos t,\ \psi_1(x)\sin t,\ \psi_3(x)\big).$$

Jeśli liczby t wybierane są z przedziału (α, β) o długości mniejszej niż 2π, to przekształcenie ψ jest ciągłe i różnowartościowe. Różnowartościowość wynika natychmiast z różnowartościowości $\tilde{\psi}$ i różnowartościowości przekształcenia $t \longrightarrow (\cos t, \sin t)$ na przedziale długości $< 2\pi$. Przekształcenie ψ jest homeomorfizmem:
jeśli $\psi(x_n, t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(y, s)$, to $\psi_3(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(y)$ oraz $\psi_1(x_n) =$

$$= \sqrt{\big(\psi_1(x_n)\cos t_n\big)^2 + \big(\psi_1(x_n)\sin t_n\big)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\big(\psi_1(y)\cos s\big)^2 + \big(\psi_1(y)\sin s\big)^2} = \psi_1(y).$$

Stąd i z ciągłości φ wynika, że $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Co najmniej jedna z liczb $|\cos s|$, $|\sin s|$ jest różna od 1. Dla ustalenia uwagi niech $-1 < \cos s < 1$. Wtedy w pewnym otoczeniu liczby s funkcja cos jest homeomorfizmem. Wobec tego z równości $\lim\limits_{n\to\infty} \cos t_n = \cos s$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$. Mamy

$$D\psi(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_1'(x)\cos t & -\psi_1(x)\sin t \\ \psi_1'(x)\sin t & \psi_1(x)\cos t \\ \psi_3'(x) & 0 \\ \end{pmatrix}.$$

Mamy więc

$$D\psi(x,t)^T D\psi(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_1'(x)^2 + \psi_3'(x)^2 & 0 \\ 0 & \psi_1^2 \end{pmatrix}.$$

Wobec tego $\det\big(D\psi(x,t)^T D\psi(x,t)\big) = \big(\psi_1'(x)^2 + \psi_3'(x)^2\big)\psi_1(x)^2 > 0$, bo $D\tilde{\psi}(x)$ jest

[1] Pappus (290–350), Guldin(1577–1643)

różnowartościowe, zatem $D\psi(x,t)$ również jest różnowartościowe (rząd tego przekształcenia liniowego jest równy 2). Wskazaliśmy więc atlas dla M. Możemy teraz znaleźć miarę zbioru $\psi(\varphi(A)\times(0,2\pi))$. Jest ona na mocy definicji równa
$\int_{\varphi(A)\times(0,2\pi)}\sqrt{\big(\psi_1'(x)^2+\psi_3'(x)^2\big)\psi_1(x)^2}\,\mathrm{d}\ell_2 \overset{Fubini}{=\!=\!=}$
$= 2\pi\int_{\varphi(A)}\psi_1(x)\sqrt{\psi_1'(x)^2+\psi_3'(x)^2}\,\mathrm{d}\ell_1(x) =$
$= 2\pi\int_A x_1\,\mathrm{d}\ell_{\tilde M}(x) = 2\pi\ell_{\tilde M}(A)\cdot\frac{1}{\ell_{\tilde M}(A)}\int_A x_1\,\mathrm{d}\ell_{\tilde M}(x)$.
Liczba $\frac{1}{\ell_{\tilde M}(A)}\int_A x_1 d\ell_{\tilde M}(x)$ to pierwsza współrzędna środka ciężkości zbioru A względem miary $\ell_{\tilde M}$, zatem jest to odległość od prostej $x_1=0=x_2$, czyli od osi obrotu, jest więc równa r. ■

Widać więc, że jest to taki sam dowód, jak poprzedniej wersji tego twierdzenia. Z tego twierdzenia łatwo można wyprowadzić wzory na pole powierzchni bocznej stożka, lub ogólniej stożka ściętego — wystarczy stwierdzić, że środkiem ciężkości odcinka jest jego środek. Można znaleźć wzór na pole powierzchni torusa, jeśli tylko zdołamy wykazać, że środkiem ciężkości okręgu (nie koła!) jest jego środek. Wzór jest użyteczny i łatwy w dowodzie. W zasadzie to szczególny przypadek twierdzenia Fubiniego.

Warto dodać jeszcze, że jeśli $f\colon M\longrightarrow[0,\infty]$ jest funkcją mierzalną a zbiór $A\subseteq M$ jest zawarty w obrazie parametryzacji $\psi\colon V\longrightarrow M\subseteq\mathbb{R}^k$, to

$$\int_A f d\ell_M = \int_{\psi^{-1}(A)} f\circ\psi\sqrt{D\psi(\mathbf{x})^T D\psi(\mathbf{x})}d\ell_m(\mathbf{x}).$$

Ten wzór pozwala w wielu przypadkach na całkowanie funkcji określonych na rozmaitościach. Oczywiście funkcję nieujemna można zastąpić funkcją całkowalną lub taką, która ma całkę, niekoniecznie skończoną.

Teraz podamy jeszcze jedno twierdzenie, różnie nazywane przez różnych matematyków, które na jeszcze jeden sposób uzasadnia, że przyjęta wcześniej definicja miary na rozmaitości ma sens. Przydaje się ono czasem w różnych rozumowaniach. Poprzedzimy je bardzo ważnym twierdzeniem opisującym strukturę otoczenia rozmaitości..

Twierdzenie 10.7 (o otoczeniu kołnierzykowym)[2]
Niech $M\subseteq\mathbb{R}^k$ będzie m–wymiarową rozmaitością zwartą klasy C^2. Niech $N_{\mathbf{p}}(\delta)$ oznacza zbiór wszystkich takich punktów $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$, że wektor $\mathbf{x}-\mathbf{p}$ jest prostopadły do $T_{\mathbf{p}}M$ i jego długość jest mniejsza od δ, tzn. $\mathbf{x}\in N_{\mathbf{p}}(\delta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|<\delta$ i dla każdego $\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}M$ zachodzi równość $(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{w}=0$. Istnieje wtedy taka liczba $r>0$, że jeśli $\mathbf{p}_1\neq\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\in M$, to $N_{\mathbf{p}_1}(\delta)\cap N_{\mathbf{p}_2}(\delta)=\emptyset$ a zbiór $\cup_{\mathbf{p}\in M}N_{\mathbf{p}}(\delta)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^k$.

Dowód. Niech $\mathbf{p}\in M$. Niech $U\subseteq M$ będzie takim otoczeniem punktu $\mathbf{p}$, które jest dziedziną pewnej mapy φ^{-1} klasy C^2 i niech $\varphi^{-1}(U)=V$, $\varphi^{-1}(\mathbf{p})=\mathbf{q}$. W tej sytuacji wektory $\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\mathbf{q})$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\mathbf{q})$, ..., $\frac{\partial\varphi}{\partial t_m}(\mathbf{q})$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $T_{\mathbf{p}}M$. Niech $\mathbf{w}_{m+1}$, $\mathbf{w}_{m+2}$, ..., $\mathbf{w}_k$ będą takimi wektorami, że układ

$$\mathbf{w}_1:=\tfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\mathbf{q}),\ \ \mathbf{w}_2:=\tfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\mathbf{q}),\ \dots,\ \mathbf{w}_m:=\tfrac{\partial\varphi}{\partial t_m}(\mathbf{q}),\ \mathbf{w}_{m+1},\ \ \mathbf{w}_{m+2},\ \dots,\ \mathbf{w}_k$$

jest bazą w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Zastąpimy te wektory wzajemnie prostopadłymi wektorami (ortogonalizacja Grama – Schmidta) $\mathfrak{n}_1(\mathbf{p})=\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathfrak{n}_2(\mathbf{p}):=\frac{\mathbf{w}_2-(\mathbf{w}_2\cdot\mathfrak{n}_1(\mathbf{p}))\mathfrak{n}_1(\mathbf{p})}{\|\mathbf{w}_2-(\mathbf{w}_2\cdot\mathfrak{n}_1(\mathbf{p}))\mathfrak{n}_1(\mathbf{p})(\mathbf{p})\|}$,

[2] ang: tubular neighbourhood; jak widać polski termin, do którego mnie kiedyś przyzwyczajono, nie jest dosłownym tłumaczeniem z angielskiego.

$\mathfrak{n}_3(\mathbf{p}) := \frac{\mathbf{w}_3-(\mathbf{w}_3\cdot\mathfrak{n}_1(\mathbf{p}))\mathfrak{n}_1(\mathbf{p})-(\mathbf{w}_3\cdot\mathfrak{n}_2(\mathbf{p}))\mathfrak{n}_2(\mathbf{p})}{\|\mathbf{w}_3-(\mathbf{w}_3\cdot\mathfrak{n}_1(\mathbf{p}))\mathfrak{n}_1(\mathbf{p})-(\mathbf{w}_3\cdot\mathfrak{n}_2(\mathbf{p}))\mathfrak{n}_2(\mathbf{p})\|}, \ldots$
W ten sposób skonstruowaliśmy bazę złożoną z wzajemnie prostopadłych wektorów o długości 1. Jasne jest, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_j$ rozpinają tę samą przestrzeń liniową, co wektory $\mathfrak{n}_1(\mathbf{p}), \mathfrak{n}_2(\mathbf{p}), \ldots, \mathfrak{n}_j(\mathbf{p})$ dla każdego $j = 1, 2, \ldots, k$. Wobec tego wektory $\mathfrak{n}_1(\mathbf{p}), \mathfrak{n}_2(\mathbf{p}), \ldots, \mathfrak{n}_m(\mathbf{p})$ są styczne w punkcie $\mathbf{p}$ do rozmaitości M, a pozostałe wektory $\mathbf{w}_{m+1}(\mathbf{p}), \mathbf{w}_{m+2}(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{w}_k(\mathbf{p})$ są prostopadłe do rozmaitości M (czyli do $T_{\mathbf{p}}M$) w punkcie $\mathbf{p}$.

Ponieważ liniowa niezależność wektorów

$$\mathbf{w}_1 = \tfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\mathbf{q}),\ \mathbf{w}_2 = \tfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\mathbf{q}),\ \ldots,\ \mathbf{w}_m = \tfrac{\partial\varphi}{\partial t_m}(\mathbf{q}),\ \mathbf{w}_{m+1},\ \mathbf{w}_{m+2},\ \ldots,\ \mathbf{w}_k$$

równoważna jest niezerowaniu się wyznacznika macierzy z nich utworzonej, więc istnieje taka liczba $\eta > 0$, że jeśli $\|\mathbf{t} - \mathbf{q}\| < \eta$, to wektory $\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\mathbf{t})$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\mathbf{t})$,..., $\frac{\partial\varphi}{\partial t_m}(\mathbf{t})$, $\mathbf{w}_{m+1}$, $\mathbf{w}_{m+2}$, $\mathbf{w}_k$ są liniowo niezależne (wektory $\mathbf{w}_{m+1}, \mathbf{w}_{m+2}, \ldots, \mathbf{w}_k$ nie zależą od $\mathbf{t}$). Niech $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t})$. Zastępujemy te wektory bazą ortonormalną $\mathfrak{n}_1(\mathbf{x})$, $\mathfrak{n}_2(\mathbf{x})$, ..., $\mathfrak{n}_m(\mathbf{x})$, $\mathfrak{n}_{m+1}(\mathbf{x})$, ..., $\mathfrak{n}_k(\mathbf{x})$ skonstruowaną w sposób wyżej opisany.

Zdefiniowaliśmy więc w pewnym otoczeniu $\widetilde{U}_{\mathbf{p}} \subseteq U \subseteq M$ punktu $\mathbf{p}$ funkcje $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, ..., $\mathfrak{n}_m$, $\mathfrak{n}_{m+1}$, ...,$\mathfrak{n}_k$. Funkcje $\mathfrak{n}_j \circ \varphi$ są klasy C^1, bowiem φ jest klasy C^2, a wobec tego funkcje $\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}$ są klasy C^1 — dodając, odejmując, mnożąc skalarnie i dzieląc funkcje klasy C^1 otrzymujemy funkcję klasy C^1.

Niech

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_k) = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) + t_{m+1}\mathfrak{n}_{m+1}\big(\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\big) + \\ + t_{m+2}\mathfrak{n}_{m+2}\big(\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\big) + \cdots + t_k\mathfrak{n}_k\big(\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\big).$$

Dla $j = 1, 2, \ldots, m$ zachodzą równości:

$$\tfrac{\partial\Phi}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_k) = \tfrac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m) + \sum_{i=m+1}^{k} t_i \tfrac{\partial(\mathfrak{n}_i\circ\varphi)}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m),$$

a dla $j = m+1, m+2, \ldots, k$ prawdziwe są wzory:

$$\tfrac{\partial\Phi}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_k) = \mathfrak{n}_j\big(\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\big).$$

Wobec tego mamy równości

$$\tfrac{\partial\Phi}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots, 0) = \tfrac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m) \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, m \text{ oraz}$$

$$\tfrac{\partial\Phi}{\partial t_j}(t_1, t_2, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots, 0) = \mathfrak{n}_j\big(\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)\big) \text{ dla } j = m+1, m+2, \ldots, k.$$

Wynika stąd, że kolumny macierzy $D\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_m, 0, 0, \ldots, 0)$ są liniowo niezależne, więc jest to macierz izomorfizmu. Z twierdzenia o odwracaniu funkcji wynika, że istnieje takie otoczenie $U_{\mathbf{p}} \subseteq \widetilde{U}_{\mathbf{p}}$ i liczba $\varepsilon_{\mathbf{p}}$, że na zbiorze $\varphi^{-1}(U_{\mathbf{p}}) \times B_{k-m}(\mathbf{0}, \varepsilon_{\mathbf{p}})$ przekształcenie Φ jest dyfeomorfizmem, $B_{k-m}(\mathbf{0}, \varepsilon_{\mathbf{p}})$ oznacza tu kulę w $\mathbb{R}^{k-m}$ o środku w punkcie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k-m}$ i promieniu $\varepsilon_{\mathbf{p}}$. Bez trudu można też zauważyć, że ma miejsce wzór $\Phi\big(\{\varphi^{-1}(\mathbf{x})\} \times B_{k-m}(\mathbf{0}, \varepsilon_{\mathbf{p}})\big) = N_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{p}})$. Ponieważ Φ jest różnowartościowe, więc jeśli $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ i $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_{\mathbf{p}}$, to $N_{\mathbf{x}_1}(\varepsilon_{\mathbf{p}}) \cap N_{\mathbf{x}_2}(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = \emptyset$. Ponieważ Φ jest homeomorfizmem, więc $\bigcup_{\mathbf{x}\in U_{\mathbf{p}}} N_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = \Phi\big(\varphi^{-1}(U_{\mathbf{p}}) \times B_{k-m}(\mathbf{0}, \varepsilon_{\mathbf{p}})\big)$ jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

Rodzina $\{U_{\mathbf{p}}\colon\ \mathbf{p} \in M\}$ stanowi otwarte pokrycie rozmaitości zwartej M, więc istnieją takie punkty $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, ..., $\mathbf{p}_n$, że $U_{\mathbf{p}_1} \cup U_{\mathbf{p}_2} \cup \cdots \cup U_{\mathbf{p}_n} = M$. Przyjmijmy $\varepsilon = \min(\varepsilon_{\mathbf{p}_1}, \varepsilon_{\mathbf{p}_2}, \ldots, \varepsilon_{\mathbf{p}_n})$ i niech $\lambda > 0$ będzie taką liczbą, że jeśli $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \lambda$, to istnieje taki numer $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, że $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in U_{\mathbf{p}_j}$ (λ to liczba Lebesgue'a tego pokrycia otwartego). Niech $r \le \min(\varepsilon, \frac{1}{2}\lambda)$.

Jeśli $0 < \delta \le r$, to zbiór $\bigcup_{\mathbf{x}\in M} N_{\mathbf{x}}(\delta)$ jest otwarty jako suma (skończonej liczby) zbiorów otwartych. Zbiory $N_{\mathbf{x}}(\delta)$ są parami rozłączne, bo jeśli $N_{\mathbf{x}_1}(\delta)\cap N_{\mathbf{x}_2}(\delta) \ne \emptyset$, to $\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\| < 2\delta \le \lambda$, więc istnieje takie $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, że $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in U_{\mathbf{p}_j}$, a z tego wynika, że $N_{\mathbf{x}_1}(\delta)\cap N_{\mathbf{x}_2}(\delta) = \emptyset$, wbrew temu, co założyliśmy przed chwilą. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 10.8 (o istotności założeń tw. o otoczeniu kołnierzykowym)
(a) Udowodnić, że jeśli $M = \big\{(x,y)\colon \ \big(\sqrt[3]{y^4}-1\big)^2 + x^2 = 1\big\}$, to M jest zwartą rozmaitością klasy C^1, która nie jest rozmaitością klasy C^2. Wykazać, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieją takie punkty $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2 \in M$, że $N_{\mathbf{p}_1}(\delta)\cap N_{\mathbf{p}_2}(\delta) \ne \emptyset$ i $\|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\| < \delta$.
(b) Niech $M = \big\{(e^t\cos t, e^t \sin t)\colon \quad t\in\mathbb{R}\big\}$. Wykazać, że M jest rozmaitością klasy C^∞, ale niezwartą. Wykazać, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieją takie punkty $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2 \in M$, że $N_{\mathbf{p}_1}(\delta)\cap N_{\mathbf{p}_2}(\delta) \ne \emptyset$ i $\|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\| < \delta$. ■

Wykazane twierdzenie mówi coś na temat wyglądu małych otoczeń rozmaitości zwartej zanurzonej w $\mathbb{R}^k$. **Nie** mówi ono jednak, jak przekonamy się niebawem, że dostatecznie małe i dostatecznie dobrze wybrane otoczenie rozmaitości zwartej $M \subseteq \mathbb{R}^k$ jest dyfeomorficzne, albo chociaż homeomorficzne z produktem $M\times\mathbb{R}^{k-m}$. Następne twierdzenie również tego **nie** mówi, choć też sugeruje, że tak być powinno, a przynajmniej mogłoby.

Twierdzenie 10.9 (o mierze kołnierzyka[3])
Jeśli M jest zwartą rozmaitością klasy C^2 i $N_M(\delta) = \bigcup_{\mathbf{p}\in M} N_{\mathbf{p}}(\delta)$, to

$$\lim_{\delta\to 0} \tfrac{\ell_k(N_{\mathbf{P}}(\delta))}{\delta^{k-m}} = \ell_{k-m}\big(B_{k-m}(\mathbf{0},1)\big)\cdot \ell_M(M)\,.$$

Dowód. Będziemy stosować oznaczenia użyte w dowodzie poprzedniego twierdzenia. Niech $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ Zajmiemy się najpierw zbiorem $\bigcup_{\mathbf{x}\in U_{\mathbf{p}_j}} N_{\mathbf{x}}(\delta)$ zakładając, że $0<\delta\le r$. Niech φ_j^{-1} będzie mapą klasy C^2 określoną na zbiorze $U_{\mathbf{p}_j}$ i niech $\varphi_j^{-1}\big(U_{\mathbf{p}_j}\big) = V_j$. Niech $\Phi_j\colon V_j\times B_{k-m}(\mathbf{0},1) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem zdefiniowanym za pomocą równości

$$\Phi(t_1,t_2,\ldots,t_k) = \varphi_j(t_1,t_2,\ldots,t_m) + \delta \sum_{i=m+1}^{k} t_i \mathfrak{n}_i\big(\varphi_j(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big).$$

Z dowodu poprzedniego twierdzenia wynika, że Φ_j jest dyfemomorfizmem oraz że kolumnami macierzy $D\Phi(t_1,t_2,\ldots,t_m,0,0,\ldots,0)$ są wektory:
$\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, $\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_2}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, $\ldots$, $\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_m}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$,
$\delta\mathfrak{n}_{m+1}\big(\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)$, $\delta\mathfrak{n}_{m+2}\big(\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)$, $\ldots$, $\delta\mathfrak{n}_k\big(\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)$.
Ponieważ każdy wektor z grupy złożonej z pierwszych m wektorów jest prostopadły do każdego wektora z grupy złożonej z $k-m$ pozostałych wektorów, więc macierz Grama tego układu wektorów, czyli $(D\Phi(\mathbf{t}))^T\cdot D\Phi(\mathbf{t})$ składa się z macierzy kwadratowej wymiaru $m\times m$ („lewy górny róg”), macierzy kwadratowej wymiaru $k-m\times k-m$ („prawy dolny róg”) oraz dwu macierzy prostokątnych złożonych z samych zer, więc

[3] A może to nie kołnierzyk tylko rurka?

jej wyznacznik równy jest iloczynowi wyznaczników tych macierzy kwadratowych:
$$\det\big(D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)^T\cdot D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)\cdot\det\big(\delta^2\cdot I_{k-m}\big)=$$
$$=\delta^{2(k-m)}\det\big(D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)^T\cdot D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big).$$
Bez straty ogólności rozważań możemy zakładać, że mapa φ_j^{-1} jest określona na pewnym otoczeniu zbioru zwartego $\overline{U}_{\mathbf{p}_j}$. Mamy więc równość
$$\delta^{-(k-m)}\cdot\ell_k\big(N_{U_{\mathbf{p}_j}}(\delta)\big)=\int_{V_j\times B_{k-m}(\mathbf{0},1)}\delta^{-(k-m)}\cdot\sqrt{\det\big((D\Phi(\mathbf{t}))^T\cdot D\Phi(\mathbf{t})\big)}\,d\ell_k(\mathbf{t}).$$
Funkcja podcałkowa dąży i to jednostajnie, dzięki temu, że mapa jest określona na pewnym otoczeniu zbioru zwartego $\overline{U}_{\mathbf{p}_j}$, do funkcji
$$\sqrt{\det\big(D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)^T\cdot D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)}.$$
Z twierdzenia o zamianie zmiennych wynika więc, że $\lim\limits_{\delta\to 0}\delta^{-(k-m)}\cdot\ell_k\big(N_{U_{\mathbf{p}_j}}(\delta)\big)=$
$$=\int_{V_j\times B_{k-m}(\mathbf{0},1)}\sqrt{\det\big(D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)^T\cdot D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)}\,d\ell_k(\mathbf{t})\overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=}$$
$$=\ell_{k-m}\big(B_{k-m}\big)\cdot\int_{V_j}\sqrt{\det\big(D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)^T\cdot D\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m)\big)}\,d\ell_{k-m}(\mathbf{t})=$$
$$=\ell_{k-m}\big(B_{k-m}\big)\cdot\ell_M(U_{\mathbf{p}_j}).$$
To prawie wszystko. Pozostaje stwierdzić, że zbiór $U_{\mathbf{p}_j}$ można w tych rozważaniach zastąpić jego dowolnym mierzalnym podzbiorem, co pozwala na przedstawienie zbioru $N_M(\delta)$ w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów:
$$N_{U_{\mathbf{p}_1}}(\delta),\ N_{U_{\mathbf{p}_2}\setminus U_{\mathbf{p}_1}}(\delta),\ N_{U_{\mathbf{p}_3}\setminus(U_{\mathbf{p}_1}\cup U_{\mathbf{p}_2})}(\delta),\ \ldots\ ,\ N_{U_{\mathbf{p}_n}\setminus(U_{\mathbf{p}_1}\cup U_{\mathbf{p}_2}\cup\cdots\cup U_{\mathbf{p}_{n-1}})}(\delta)$$
i powołać się na addytywność miary. ■

Kilka zadań

Zadanie 10.3 Wykazać, że jeśli $M \subset \mathbb{R}^k$ jest rozmaitością klasy C^∞ wymiaru $m < k$, to istnieje zbiór otwarty $U \supset M$ i funkcja $\pi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ klasy C^∞ taka, że $\pi(U) = M$, dla każdego $\mathbf{p} \in M$ różniczka $D\pi(\mathbf{p})$ przekształca izmorficznie przestrzeń $T_\mathbf{p}M$ na siebie.

Zadanie 10.4 Wykazać, że nie istnieje funkcja ciągła $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ przekształcająca wstęgę Möbiusa M tak, że $f(\mathbf{x}) \perp T_\mathbf{x}M$ dla każdego $\mathbf{x} \in M$.

Zadanie 10.5 Znaleźć środek ciężkości półkuli trój– i k–wymiarowej.

Zadanie 10.6 Niech $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$ będzie jednorodną kulą materialną (tzn. masa fragmentu kuli $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$ równa jest jego mierze Lebesgue'a). Wykazać, że kula przyciąga punkt materialny $\mathbf{q}$ tak, jak przyciąga $\mathbf{q}$ punkt materialny położony w odległości $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ od $\mathbf{q}$, w którym skupiona jest masa równa masie kuli.

Zadanie 10.7 Czy stwierdzenie z poprzedniego zadania pozostanie prawdziwe, jeśli zastąpimy kulę jednorodną sferą?

Zadanie 10.8 Wykazać, że jeśli punkt materialny znajduje się wewnątrz jednorodnej sfery materialnej, to sfera nie oddziałuje na niego grawitacyjnie.

Zadanie 10.9 Jeśli $\varrho(\mathbf{x})$ jest gęstością masy w punkcie $\mathbf{x}$, tzn. nieujemną funkcją mierzalną, to moment bezwładności ciała $K \subseteq \mathbb{R}^3$ względem prostej L równy jest $\int_K \varrho(\mathbf{x}) r(\mathbf{x})^2 \, d\ell_3(\mathbf{x})$, gdzie $r(\mathbf{x})$ oznacza odległość punktu $\mathbf{x}$ od prostej L. Analogicznie definiujemy moment bezwładności ciała M będącego rozmaitościa dwu– lub jednowymiarową, zastępując miarę Lebesgue'a miarą Lebesgue'a–Riemanna na rozmaitości M. Obliczyć moment bezwładności kuli względem prostej L znajdującej się w odległości R od środka kuli.

Zadanie 10.10 Niech $W = \{(x, y, z) \colon \quad x^2 + y^2 \le a^2,\ |z| \le h\}$. Znaleźć moment bezwładności jednorodnego walca W względem prostej $x = y = z$.

Zadanie 10.11 Znaleźć masę miseczki parabolicznej $2z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, której gęstość masy równa jest $\varrho(x, y, z) = z$.

Zadanie 10.12 Znaleźć moment bezwładności jednorodnej sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ względem osi z.

Zadanie 10.13 Niech $C = \{(x, y, z) \colon \quad 4x^2 + 4y^2 = z^2,\ 0 \le z \le 1\}$. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej powierzchni stożka względem:
(a) prostej zawierającej jego tworzącą,
(b) względem jego osi obrotu.

Zadanie 10.14 Znaleźć moment bezwładności torusa względem jego osi obrotu.

Zadanie 10.15 Znaleźć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu:

a. łuku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, |y| \le 4$ wokół osi OX;

b. krzywej $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ wokół osi OX.

Zadanie 10.16 Wykazać, że długość elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jest liczbą z otwartego przedziału $\left(\pi(a+b), \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)$.

Zadanie 10.17 Niech F oznacza brzeg kostki

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\colon \quad 0 \le x_i \le 1 \ \text{ dla } \ i = 1,2,3,4\}.$$

Znaleźć $\int_F x_1x_2x_3x_3 \, d\ell_F$.

Zadanie 10.18 Znaleźć całkę $\int_M |xyz| \, d\ell_M$, gdzie $M = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2 = z < 1\}$.

Zadanie 10.19 Znaleźć całkę $\int_M z \, d\ell_M$, gdzie

$$M = \{(x,y,z)\colon \quad x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = v, \ 0 < u < a, \ 0 < v < 2\pi\}.$$

Zadanie 10.20 Znaleźć całkę $\int_M (xy + yz + zx) \, d\ell_M$, gdzie M oznacza część powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ wyciętą przez powierzchnię o równaniu $x^2+y^2 = 2ax$.

Zadanie 10.21 Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej powierzchni M określonej w poprzednim zadaniu.

Zadanie 10.22 Niech $M = \{(x,y,z)\colon \quad e^x + e^{-x} = z - \sqrt{3}\,y\,, \ 0 < y < x < 1\}$. Obliczyć pole powierzchni M.

Zadanie 10.23 Niech $M = \{(x,y,z)\colon \quad 2z = x^2+y^2 < \sqrt{x}\}$. Obliczyć następującą całkę $\iint_M \sqrt{\frac{z}{1+2z}} \, d\ell_S$.

Zadanie 10.24 Niech $A = \{(x,y)\colon \ 0 < y < x < 1\}$, $f(x,y) = \frac{y}{x}$. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie wykresem funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$. Obliczyć całkę $\iint_M y \, d\ell_S$.

Zadanie 10.25 Każdy punkt krzywej $E = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2 = 1, \ x+z = 1\}$ łączymy odcinkiem z punktem $(0,0,0)$. Suma tych odcinków (bez końców) tworzy powierzchnię M. Obliczyć całkę $\iint_M |y| \, d\ell_S$.

Zadanie 10.26 Dla ustalonej liczby $a \in (0,1)$ rozważamy część sfery trójwymiarowej: $M = \{(w,x,y,z)\colon \ w^2+x^2+y^2+z^2 = 1, \ \ w > a\}$. Obliczyć jej miarę $\ell_M(M)$.

Zadanie 10.27 Powierzchnia o równaniu $z = xy$ przecina powierzchnię o równaniu $y = 2x^2$ wzdłuż pewnej krzywej. Każdy punkt łuku tej krzywej, zawartego w obszarze $0 < z < 1$, łączymy odcinkiem z punktem $(0,0,0)$. Suma tych odcinków (bez końców) tworzy powierzchnię M. Uzasadnić, że M jest rozmaitością i obliczyć jej pole.

Zadanie 10.28 Niech M będzie powierzchnią powstałą przez pełny obrót łuku okręgu $x^2+z^2=2x$, $0<x<1$, $0<z<1$, wokół osi Oz. Na tej powierzchni leży zbiór A (mierzalny względem miary ℓ_M), $\ell_M(A)=1$. Dla każdej liczby $t\in(0,1)$ określamy: $A_t=\{(x,y,z)\in A\colon\ z<t\}$, $f(t)=\ell_M(A_t)$. Dowieść, że całka $\int_0^1 f(t)\,dt$ jest równa odległości środka ciężkości zbioru A od płaszczyzny $z=1$.

Zadanie 10.29 Punkt P obiega okrąg $x^2+y^2=1$, $z=1$ w kierunku „dodatnim" (tj. przeciwnie niż wskazówki zegarka, gdy patrzymy z punktu $(0,0,2013)$), startując z punktu $(1,0,1)$. Punkt Q obiega okrąg $x^2+y^2=1$, $z=0$ w tym samym kierunku, z tą samą prędkością kątową, startując w tym samym momencie z punktu $(0,1,0)$. Niech M oznacza sumę wszystkich odcinków (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach, uzyskanych przy jednym pełnym obiegu tych okręgów. Uzasadnić, że M jest rozmaitością dwuwymiarową. Obliczyć całkę $\iint_M |2z-1|\,d\ell_M$.

Zadanie 10.30 Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego drutu w kształcie łuku krzywej (zwanej kardioidą) o równaniu $r=\frac{1}{2}(1+\cos t)$, gdzie $t\in[0,\pi]$ oraz $x_1=r\cos t$, $x_2=r\sin t$.

Zadanie 10.31 Niech M będzie powierzchnią, która powstała w wyniku obrotu krzywej $(x-2)^2+z^2=1$, $y=0$, $x\geq 2$, $z\geq 0$ wokół prostej $x=0=y$ o kąt $\frac{\pi}{4}$. Znaleźć pole tej powierzchni oraz jej środek ciężkości (zakładając, że jest ona jednorodna).

Zadanie 10.32 Traktrysę $\left\{\left(t-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,,\,\frac{2}{e^t+e^{-t}}\,,0\right)\colon\quad t>0\right\}$ obracamy o kąt pełny wokół osi OX otrzymując trochoidę T. Znaleźć wszystkie liczby $a>0$, dla których funkcja $(x,y,z)\mapsto a^x$ jest całkowalna na powierzchni T.