Całkowanie funkcji dowolnego znaku twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki

Ostatnio poprawiłem 19 marca 2015 r.

Omówiliśmy całkowanie funkcji nieujemnych. W tej części zajmiemy się całkowaniem funkcji dowolnego znaku. Zakładamy wszędzie, że na przestrzeni X zdefiniowana jest miara μ (więc również przeliczalnie addytywne ciało zbiorów mierzalnych) oraz że f jest funkcją mierzalną określoną na X lub mierzalnym podzbiorze X. W drugim przypadku można funkcję f przedłużyć do funkcji mierzalnej na całej przestrzeni definiując jej wartość poza dziedziną jako 0. Sprawdzenie, że rozszerzona w ten sposób funkcja jest mierzalna nie przedstawia najmniejszych trudności (należy skorzystać z definicji i tego, że dopełnienie zbioru mierzalnego jest mierzalne).

Definicja 9.1 (części nieujemnej i niedodatniej funkcji)
Funkcje zdefiniowane równościami $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_- = \max(-f(x), 0)$ nazywamy częścią nieujemną (dodatnią) i niedodatnią (ujemną) funkcji f. ■

Z podstawowych własności funkcji mierzalnych wynika od razu, że funkcje f_+ i f_- są mierzalne. Zachodzą oczywiste wzory

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{oraz} \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Całki z funkcji f_+ i f_- są zdefiniowane, bo te funkcje są nieujemne.

Definicja 9.2 (całki z funkcji mierzalnej)
$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$, jeśli tylko różnica całek jest zdefiniowana, tzn. co najmniej jedna z całek $\int_X f_+ d\mu$, $\int_X f_- d\mu$ jest skończona. Mówimy, że funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_X f d\mu$ jest skończona. ■

Jasne jest, że w przypadku funkcji nieujemnej f mamy $f_+ = f$, więc otrzymujemy tę samą całkę, którą zajmowaliśmy się w przypadku funkcji nieujemnych.

Funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f_+ d\mu + \int_X f_- d\mu < +\infty.$$

Jest więc inaczej niż w przypadku całki Riemanna — funkcja f może nie mieć całki Riemanna, a jej wartość bezwzględna może być całkowalna w sensie Riemanna, np. $f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) = -1$ dla $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$, $f(x) = 0$ dla $x \notin [0,1]$. Wykażemy teraz kilka podstawowych własności całki .

Twierdzenie 9.3 (o elementarnych własnościach całki Lebesgue'a)

0° $\int_X f d\mu$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

1° Jeśli $f \leqslant g$, to $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

2° Jeśli $|f| \leqslant g$ i funkcja g jest całkowalna, to również funkcja f jest całkowalna i zachodzi nierówność $\left|\int_X f d\mu\right| \leqslant \int_X |f| d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

3° Jeśli funkcja f jest ograniczona i $\mu(X) < +\infty$, to funkcja f jest całkowalna na zbiorze X.

4° Jeśli funkcja $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in X$ (tzn. miara zbioru tych $x \in X$, dla których $f(x) \neq 0$, jest równa 0), to $\int_X f d\mu = 0$.

5° Jeśli funkcja f jest całkowalna, to $|f(x)| < +\infty$ dla prawie wszystkich $x \in X$, tzn. miara zbioru tych $x \in X$, dla których $|f(x)| = \infty$, jest równa 0.

6° Jeśli funkcja f jest całkowalna na zbiorze mierzalnym B, $A \subseteq B$ jest zbiorem mierzalnym, to funkcja f jest całkowalna na zbiorze A.

7° Jeśli $\int_X f$ istnieje i $c \in \mathbb{R}$, to funkcja cf jest całkowalna i zachodzi równość $\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu$. (całka jest jednorodna)

8° Jeśli istnieją obie całki $\int_X f d\mu$, $\int_X g d\mu$ oraz zdefiniowana jest ich suma $\int_X f d\mu + \int_X g d\mu$, to istnieje również całka $\int_X (f+g) d\mu$ i zachodzi równość $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$. (całka jest addytywna)

Z własności 7° i 8° wynika, że przyporządkowanie funkcji całkowalnej jej całki jest operacją liniową, przestrzeń liniowa, którą mamy tu na myśli, tj. przestrzeń funkcji całkowalnych na ustalonej przestrzeni X jest na ogół nieskończenie wymiarowa, ale również w takich sytuacjach liniowość jest bardzo istotną własnością.

Dowód. Dowody własności $0° - 4°$ są natychmiastowe.

Gdyby funkcja f przyjmowała wartość $+\infty$ na zbiorze miary dodatniej, to zachodziłaby równość $\int_X f_+ d\mu = +\infty$, więc również $\int_X f d\mu = +\infty$ (całka $\int_X f_- d\mu$ musiałaby w tej sytuacji być skończona!). Analogicznie w przypadku funkcji przyjmującej wartość $-\infty$ na zbiorze miary dodatniej. Własność 5° można uznać za udowodnioną.

Własność 6° wynika z tego, że $\int_A f_+ d\mu \leqslant \int_B f_+ d\mu < \infty$ i $\int_A f_- d\mu \leqslant \int_B f_- d\mu < \infty$.

Własność 7° wynika z takiej samej własności dla funkcji nieujemnej oraz tego, że $(-f)_+ = f_-$ i $(-f)_- = f_+$.

Ostatnia z wypisanych własności całki jest najtrudniejsza do dowodu głównie ze względu na ogólność założeń. Mamy $f + g =$
$= (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f+g)_+ + \big(f_+ + g_+ - (f+g)_+\big) - \Big((f+g)_- + \big(f_- + g_- - (f+g)_-\big)\Big)$.
Zachodzi też wzór $f_+ + g_+ - (f+g)_+ = f_- + g_- - (f+g)_- \geqslant 0$.[1] Wobec tego, że dla funkcji nieujemnych dowodzona teza jest prawdziwa, mamy:

$$\int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu = \int (f_+ + g_+) d\mu = \int (f+g)_+ d\mu + \int \big(f_+ + g_+ - (f+g)_+\big) d\mu \quad \text{oraz}$$
$$\int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int (f_- + g_-) d\mu = \int (f+g)_- d\mu + \int \big(f_- + g_- - (f+g)_-\big) d\mu.$$

Jeśli więc całki $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ są **skończone**, to $\int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu - \int f_- d\mu - \int g_- d\mu = \int (f+g)_+ d\mu - \int (f+g)_- d\mu$. Stąd własność 8° wynika dla funkcji **całkowalnych**.

Załóżmy teraz, że $\int_X f d\mu = \infty$ i $\int_X g\, d\mu > -\infty$. Oznacza to, że $\int_X f_+ d\mu = \infty$, $\int_X f_- d\mu \in \mathbb{R}$, $\int_X g_+ d\mu \geqslant 0$, $\int_X g_- d\mu \in \mathbb{R}$. Mamy więc

$$\int_X (f+g)_- d\mu \leqslant \int_X (f_- + g_-) d\mu = \int_X f_- d\mu + \int_X g_- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Należy więc wykazać, że $\int_X (f+g)_+ = \infty$. Niech $A = \{x\colon \quad f(x) > 0 \text{ i } g(x) \geqslant 0\}$ i niech $B = \{x\colon \quad f(x) > 0 > g(x)\}$. Jeśli $\int_B f d\mu < \infty$, to $\int_A f = \infty$, bowiem prawdziwe są równości:

[1] W punktach, w których obie funkcje przyjmują wartości skończone, więc gdy funkcje są całkowalne, to poza zbiorem miary 0.

$$\infty = \int_X f_+ = \int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu, \text{ więc}$$
$$\int_X (f+g)_+ d\mu \geqslant \int_A (f+g)_+ d\mu = \int_A (f+g) d\mu \geqslant \int_A f d\mu = \infty\,.$$

Teraz założymy, że $\int_B f d\mu = \infty$. Niech (f_n) oznacza niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych, skończonych zbieżny do funkcji f na zbiorze B.
Jeśli $\int_B f_n d\mu < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to na mocy już udowodnionej części twierdzenia mamy

$$\int_B (f+g) \geqslant \int_B (f_n+g) d\mu = \int_B f_n d\mu + \int_B g d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty + \int_B g d\mu = \infty$$

— ostatnie przejście graniczne jest konsekwencją twierdzenia Lebesgue'a–Levi'ego o monotonicznym przechodzeniu do granicy.
Załóżmy teraz, że dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi równość $\int_B f_n d\mu = \infty$. Całka $\int_B f_n d\mu$ jest sumą składników postaci $c\mu(C)$, gdzie $C \subseteq B$. Co najmniej jeden z nich musi być nieskończony. Wtedy $\mu(C) = \infty$ oraz $\infty > c > 0$ (wartościami funkcji f_n są liczby). Definiujemy zbiór $D = \{x \in C\colon \quad |g(x)| \geqslant \frac{c}{2}\}$. Ponieważ $\int_C |g| d\mu < \infty$, więc $\mu(D) < \infty$. Wobec tego, na mocy już wykazanej części twierdzenia, zachodzi równość $\int_D (c+g) d\mu = c\mu(D) + \int_D g d\mu$. Dla $x \in C \setminus D$ zachodzi nierówność $c + g \geqslant \frac{c}{2}$, zatem $\int_{C\setminus D} (c+g) d\mu \geqslant \frac{c}{2} \cdot \mu(C\setminus D) = +\infty$. Wynika stąd, że $\int_C (f_n+g) d\mu = \int_{C\setminus D} (f_n+g) d\mu + \int_D (f_n+g) d\mu = +\infty = \int_C f_n d\mu + \int_C g d\mu$. Wykazaliśmy, że dowodzony wzór ma miejsce na każdym zbiorze, na którym f_n jest stała. Wobec tego, że wszystkie występujące tu nieskończone składniki są równe $+\infty$, wzór zachodzi dla funkcji f_n na zbiorze B. Ponieważ $f + g \geqslant f_n + g$, więc również $\int_B (f+g) d\mu = \infty$. Dowód został wymęczony. ■

Twierdzenie 9.4 (Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej)
Jeśli funkcje $f_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ są mierzalne dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, funkcja $g\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ jest całkowalna i $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ dla prawie wszystkich $x \in X$ oraz $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla prawie wszystkich $x \in X$, to funkcja f jest całkowalna i zachodzi równość

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dowód. Funkcja f jest mierzalna, bo jest granicą ciągu funkcji mierzalnych. Wobec tego funkcja $|f|$ jest również mierzalna oraz $\int_X |f| d\mu \leqslant \int_X g d\mu < \infty$, zatem f jest funkcją całkowalną. Skorzystamy teraz z lematu Fatou. Mamy $|f - f_n| \leqslant 2g$ oraz

$$\begin{aligned} 2\int_X g d\mu &= \int_X \big(2g - \lim_n |f - f_n|\big) d\mu = \int_X \lim_n \big(2g - |f - f_n|\big) d\mu = \\ &= \int_X \liminf_n \big(2g - |f - f_n|\big) \leqslant \liminf_n \int (2g - |f - f_n|) = \\ &= 2\int_X g d\mu - \limsup_n \int_X |f - f_n| d\mu. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\limsup_n \int_X |f - f_n| d\mu \leqslant 0$, więc $\limsup_n \int_X |f - f_n| d\mu = 0$, zatem $\lim_n \int_X |f - f_n| d\mu = 0$, a ponieważ $\left| \int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu \right| \leqslant \int_X |f - f_n| d\mu$, więc możemy napisać $\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 9.5
Bez założenia istnienia majoranty twierdzenie 9.4 nie jest prawdziwe: z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in X$ **nie** wynika wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ nawet wtedy, gdy wszystkie rozważane funkcje są całkowalne. Niech $f_n(x) = 0$ dla $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ a dla $x \in [0, \frac{1}{n}]$ niech $f_n(x) = 4nx\big(\frac{1}{2n} - |x - \frac{1}{2n}|\big)$. Zachodzą wzory $f_n(x) \geqslant 0$, $\int_{[0,1]} f_n d\ell_1 = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. ■

Twierdzenie 9.6 (o całkowalności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna) Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to jest również całkowalna w sensie Lebesgue i obie całki są równe.

Dowód. Ponieważ zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miarę 0, więc funkcja ta jest mierzalna. Jest też ograniczona, zatem jest całkowalna na podzbiorach miary skończonej przedziału $[a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na n przedziałów równej długości

$$P_{n,1} = \big[a, a+\tfrac{b-a}{n}\big],\ P_{n,2} = \big[a+\tfrac{b-a}{n}, a+2\tfrac{b-a}{n}\big], \ldots, P_{n,n} = \big[a+(n-1)\tfrac{b-a}{n}, b\big].$$

Niech $y_{n,j} = f\big(a+(j-1)\frac{b-a}{n}\big)$, $f_n = \sum_j y_{n,j}\chi_{P_{n,j}}$. Jasne jest, że jeśli p jest punktem ciągłości funkcji f, to $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (majorantą jest funkcja stała) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n d\ell_1 = \int_{[a,b]} f d\ell_1$. Z drugiej strony zachodzi równość $\int_{[a,b]} f_n d\ell_1 = \sum_j y_{n,j}\cdot\frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, zatem $\int_{[a,b]} f d\ell_1 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Z twierdzenia tego wynika, że całki z funkcji jednej zmiennej, np. „zdefiniowanych wzorami" możemy obliczać za pomocą reguł poznanych do tej pory. Funkcje *nieujemne* na nieograniczonych przedziałach lub nieograniczone, których niewłaściwa całka Riemanna jest skończona, są całkowalne w sensie Lebesgue'a. Podkreślić należy, że funkcja przyjmująca zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, której niewłaściwa całka Riemanna jest skończona, może być niecałkowalna w sensie Lebesgue'a. Przykładem jest funkcja $\sin(x^2)$ na $[0,\infty)$, co Czytelnicy zechcą samodzielnie sprawdzić — łatwe.

Często obliczanie całek ułatwia zamiana zmiennych. Umożliwia ją

Twierdzenie 9.7 (o całkowaniu przez podstawienie, czyli o zamianie zmiennych) Niech $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^k$ będzie dyfeomorfizmem zbioru otwartego $G \subseteq \mathbb{R}^k$ na jego obraz $\varphi(G)$. Niech $f\colon \varphi(G) \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ będzie funkcją mierzalną i nieujemną lub całkowalną. Wtedy funkcja $f\circ\varphi\cdot|\det D\varphi|$ jest mierzalna i nieujemna lub całkowalna i zachodzi równość

$$\int_{\varphi(G)} f d\ell_k = \int_G f\circ\varphi\cdot|\det D\varphi| d\ell_k.$$

Lemat 9.8
Załóżmy, że $Q \subseteq G$ jest kostką domkniętą (czyli k–wymiarowym przedziałem domkniętym o równych krawędziach). Dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli $R \subseteq Q$ jest kostką o środku $\mathbf{p}$ i krawędzi mniejszej niż 2δ, to $\varphi(R) \subseteq \varphi(\mathbf{p}) + (1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})(R-\mathbf{p})$.

Można tezę lematu wzmocnić i napisać, że dla dostatecznie małych liczb $\delta > 0$ zachodzi

$$\varphi(\mathbf{p}) + (1-\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})(R-\mathbf{p}) \subseteq \varphi(R) \subseteq \varphi(\mathbf{p}) + (1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})(R-\mathbf{p}),$$

co lepiej oddawałoby treść lematu. Chodzi o to, że ponieważ przekształcenie φ jest klasy C^1, więc obraz dostatecznie małej kostki mało różni się od obrazu tejże kostki przez przekształcenie afiniczne przybliżające φ. Byłoby to nieco trudniejsze w dowodzie, więc ograniczymy się nierówności, która znalazła się w sformułowaniu lematu i tylko z niej będziemy później korzystać.

Dowód. Kostka Q jest zbiorem zwartym, odwzorowanie $D\varphi\colon Q \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^k)$ jest ciągłe, jego wartości są izomorfizmami $\mathbb{R}^k$. Istnieje więc taka liczba $M>0$, że dla każdego $\mathbf{x}\in Q$ zachodzi $\big\|\big(D\varphi(\mathbf{x})\big)^{-1}\big\| \leqslant M$. Z jednostajnej ciągłości $D\varphi$ wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\eta>0$, że jeśli $\mathbf{x},\mathbf{y}\in Q$ i $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<\eta$, to $\|D\varphi(\mathbf{x})-D\varphi(\mathbf{y})\|<\frac{\varepsilon}{M\sqrt{k}}$. Stąd wynika, że jeżeli $R\subseteq Q$ jest kostką o krawędzi $2a<2\delta:=\frac{2\eta}{\sqrt{k}}$ i środku $\mathbf{p}$ (więc zawartej w kuli $B(\mathbf{p},\eta)$), $\mathbf{x}\in R$, to $\mathbf{x}-\mathbf{p}\in R-\mathbf{p}$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\leqslant a\sqrt{k}<\delta\sqrt{k}=\eta$ oraz

$$\big\|\big(D\varphi(\mathbf{p})\big)^{-1}\big(\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})\big)-(\mathbf{x}-\mathbf{p})\big\| \leqslant \big\|\big(D\varphi(\mathbf{p})\big)^{-1}\big[\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})-D\varphi(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p})\big]\big\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[0,1]}\big\|\big(D\varphi(\mathbf{p})\big)^{-1}\big[D\varphi(\mathbf{p}+t(\mathbf{x}-\mathbf{p}))-D\varphi(\mathbf{p})\big]\big\|\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M\sqrt{k}}\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\leqslant \varepsilon a$$

— zastosowaliśmy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Z otrzymanej nierówności wynika, że punkt $(D\varphi(\mathbf{p}))^{-1}\big(\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})\big)$ znajduje się w kostce o środku $\mathbf{0}$ i krawędzi $2(1+\varepsilon)\delta$, czyli w kostce $(1+\varepsilon)(R-\mathbf{p})$, zatem punkt $\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{p})$ znajduje się w równoległościanie $(1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})\big(R-\mathbf{p}\big)$, więc punkt $\varphi(\mathbf{x})$ leży w równoległościanie $\varphi(\mathbf{p})+(1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p})\big(R-\mathbf{p}\big)$, a to właśnie mieliśmy wykazać. ■

Kostka R o krawędzi $2a$ i środku $\mathbf{p}$ to $\{\mathbf{x}:\ |x_j-p_j|\leqslant a,\ j=1,2,\ldots,k\}$. Jeśli $\mathbf{x}\in R$, $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\leqslant\varepsilon a$, to dla $j=1,2,\ldots,k$ mamy $|y_j-x_j|\leqslant\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\leqslant\varepsilon a$, więc $|y_j-p_j|\leqslant|y_j-x_j|+|x_j-p_j|\leqslant(1+\varepsilon)a$, tzn. $\mathbf{y}\in\mathbf{p}+(1+\varepsilon)(R-\mathbf{p})$, czyli $\mathbf{y}$ znajduje się w kostce o środku $\mathbf{p}$ i krawędzi $2(1+\varepsilon)a$, tj. w obrazie kostki R w jednokładności o środku $\mathbf{p}$ w skali $1+\varepsilon$. Należy zrobić rysunek w dwóch wymiarach ($k=2$).

Dowód twierdzenia o zamianie zmiennych

Zbiór otwarty można przedstawić jako sumę kostek o wnętrzach parami rozłącznych (opisaliśmy to w dowodzie twierdzenia o jednoznaczności miary Lebesgue'a). Niech Q oznacza jedną z tych (przeliczalnie wielu) kostek, a niech oznacza jej krawędź. Wobec tego $\ell_k(Q)=a^k$. Podzielmy kostkę Q na 2^{kn} kostek $Q_1,Q_2,\ldots,Q_{2^{kn}}$ kostek o krawędziach równych $\frac{a}{2^n}$. Jeśli n jest dostatecznie duże, to $\frac{a}{2^n}<\delta$, liczba $\delta>0$ została dobrana do liczby $\varepsilon>0$ zgodnie z tezą lematu. Niech $\mathbf{p}_j$ oznacza środek kostki Q_j. Z lematu wynika, że

$$\varphi(Q)=\bigcup_j\varphi(Q_j)\subseteq\bigcup_j\big[\varphi(\mathbf{p}_j)+(1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p}_j)(Q_j-\mathbf{p}_j)\big].$$

Ponieważ $\ell_k\big((1+\varepsilon)D\varphi(\mathbf{p}_j)(Q_j-\mathbf{p}_j)\big)=(1+\varepsilon)^k\cdot\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\cdot\ell_k(Q_j)$, więc zachodzi nierówność

$$\ell_k(\varphi(Q))\leqslant(1+\varepsilon)^k\sum_j\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\ell_k(Q_j).$$

Niech $f_n(\mathbf{x})=\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|$ dla $\mathbf{x}\in\operatorname{int}(Q_j)$, czyli $f_n=\sum_j\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\chi_{int(Q_j)}$. Funkcja $\mathbf{x}\mapsto\big|\det(D\varphi(\mathbf{x}))\big|$ jest ciągła na kostce Q, która jest zbiorem zwartym, zatem funkcja $\mathbf{x}\mapsto\big|\det(D\varphi(\mathbf{x}))\big|$ jest jednostajnie ciągła na Q. Wynika stąd jednostajna zbieżność ciągu (f_n) do $\big|\det(D\varphi)\big|$ na zbiorze $\bigcap_n\big(\bigcup_j\operatorname{int}(Q_j)\big)\subseteq Q$, więc na zbiorze miary $\ell_k(Q)$ (miara podprzestrzeni afinicznej właściwej jest równa 0, więc suma miar brzegów wszystkich rozważanych kostek równa jest 0), zatem zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\int_Q f_n d\ell_k=\int_Q\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k$, a ponieważ

$$\int_Q f_n d\ell_k=\sum_j\big|\det(D\varphi(\mathbf{p}_j))\big|\,\ell_k(Q_j),$$

więc $\ell_k(\varphi(Q))\leqslant(1+\varepsilon)^k\int_Q\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k$. Ostatnia nierówność zachodzi dla każdej liczby $\varepsilon>0$, zatem

$$\ell_k(\varphi(Q))\leqslant\int_Q\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k.$$

Stąd wynika od razu, że dla $\ell_k(\varphi(G))\leqslant\int_G\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k$. Można to rozumowanie zastosować do dowolnego zbioru otwartego $U\subseteq G$. W rezultacie nierówność $\ell_k(\varphi(U))\leqslant\int_U\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k$ zachodzi dla każdego zbioru otwartego $U\subseteq G$.

Jeśli $A\subseteq G$ jest zbiorem mierzalnym miary *skończonej*, to istnieją takie pod-zbiory $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ otwarte w zbiorze G, że $\ell_k(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$, $U_n \supseteq A$. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_k(U_n) = \ell_k(A)$. Niech $U = \bigcap_n U_n$. Oczywiście $U \supseteq A$, $\ell_k(U \setminus A) = 0$. Ponieważ zbiór $\varphi(U_n)$ jest mierzalny (bo jest otwarty jako obraz *dyfeomorficzny* zbioru otwartego), więc

$$\ell_k^*\big(\varphi(A)\big) \leqslant \ell_k\big(\varphi(U_n)\big) \leqslant \int_{U_n} \big|\det(D\varphi)\big| = \int_{U_1} \chi_{U_n} \big|\det(D\varphi)\big|.$$

Stąd i z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika, że

$$\ell_k^*\big(\varphi(A)\big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \ell_k\big(\varphi(U_n)\big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{U_1} \chi_{U_n} \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k = \int_{U_1} \lim_{n\to\infty} \chi_{U_n} \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k =$$
$$= \int_{U_1} \chi_U \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k = \int_{U_1} \chi_A \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k = \int_A \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k$$

Stąd w szczególności wynika, że jeśli $\ell_k(A) = 0$, to $\ell_k^*(\varphi(A)) = 0$, więc zbiór $\varphi(A)$ jest mierzalny. Dyfeomorfizm φ jest homeomorfizmem, więc obrazy zbiorów borelowskich są zbiorami borelowskimi, więc mierzalnymi. Każdy zbiór mierzalny A można przedstawić jako sumę zbioru F typu F_σ, więc borelowskiego i zbioru B miary zero. Wobec tego zbiór $\varphi(A) = \varphi(F) \cup \varphi(B)$ jest mierzalny. Możemy więc już pisać $\ell_k\big(\varphi(A)\big)$ zamiast $\ell_k^*\big(\varphi(A)\big)$. Zauważmy jeszcze, że zbiór A jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(A)$ jest mierzalny, bo φ^{-1} również jest dyfeomorfizmem!

Każdy zbiór mierzalny $A \subseteq G$ może być przedstawiony jako suma przeliczalnej rodziny parami rozłącznych zbiorów mierzalnych $\{A_n\}$ miary skończonej. Dla każdego z nich zachodzi nierówność $\ell_k\big(\varphi(A_n)\big) \leqslant \int_{A_n} \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k$. Sumując te nierówności otrzymujemy

$$\ell_k\big(\varphi(A)\big) \leqslant \int_A \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k,$$

co można zapisać tak:

$$\int_{\varphi(G)} \chi_{\varphi(A)} d\ell_k \leqslant \int_G \chi_{\varphi(A)} \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k.$$

Z addytywności obu stron tej nierówności wynika, że jeśli f jest nieujemną funkcją prostą, to

$$\int_{\varphi(G)} f d\ell_k \leqslant \int_G f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k.$$

Jeśli teraz f jest nieujemną funkcją mierzalną na zbiorze $\varphi(G)$, to istnieje niemalejący ciąg (f_n) nieujemnych funkcji prostych zbieżny do φ. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} f_n \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| = f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big|,$$

zatem funkcja $f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big|$ jest mierzalna i na mocy twierdzenia Lebesgue'a–Levi'ego zachodzi

$$\int_{\varphi(G)} f d\ell_k = \lim_{n\to\infty} \int_{\varphi(G)} f_n d\ell_k \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_G f_n \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k =$$
$$= \int_G f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k.$$

Wiemy więc, że nierówność $\int_{\varphi(G)} f d\ell_k \leqslant \int_G f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k$ zachodzi dla każdego dyfeomorfizmu φ, każdego zbioru otwartego G i każdej nieujemnej funkcji mierzalnej. Możemy więc zastosować ją do funkcji $f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big|$, zbioru $\varphi(G)$ i dyfeomorfizmu φ^{-1}. Mamy $\varphi^{-1}\big(\varphi(G)\big) = G$ oraz

$$\Big(f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big|\Big) \circ \varphi^{-1} \cdot \big|\det(D\varphi^{-1})\big| =$$
$$= f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \cdot \big|\det(D\varphi)\big| \circ \varphi^{-1} \cdot \big|\det(D\varphi^{-1})\big| = f \cdot \big|\det D(\varphi \circ \varphi^{-1})\big| = f,$$

zatem

$$\int_G f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big| d\ell_k \leqslant \int_{\varphi(G)} \Big(f \circ \varphi \cdot \big|\det(D\varphi)\big|\Big) \circ \varphi^{-1} \cdot \big|\det(D\varphi^{-1})\big| d\ell_k = \int_{\varphi(G)} f d\ell_k.$$

W połączeniu z poprzednią nierównością mamy

$\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k \leqslant \int_{\varphi(G)} f d\ell_k \leqslant \int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k,$ czyli

$$\int_G f\circ\varphi\cdot\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k = \int_{\varphi(G)} f d\ell_k\,,$$

a to właśnie mieliśmy udowodnić.

Pozostały jeszcze funkcje całkowalne. To jednak nie stanowi żadnego problemu, bo każda funkcja całkowalna może być przedstawiona jako różnica dwu funkcji nieujemnych, a do każdej z nich twierdzenie już można zastosować, potem odjąć otrzymane równości stronami. ∎

Wykażemy teraz twierdzenie, które pozwala sprowadzić obliczanie całek względem miary ℓ_k do obliczania całek względem miar na przestrzeniach niższego wymiaru.

Twierdzenie 9.9 (Fubini'ego dla miary Lebesgue'a)
Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l \longrightarrow [-\infty,\infty]$ jest funkcją mierzalną nieujemną lub całkowalną. Niech $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Wtedy dla prawie każdego $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ i dla prawie każdego $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^l$ funkcje $f_{\mathbf{x}}$ i $f^{\mathbf{y}}$ są mierzalne, funkcje $\mathbf{y}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^k} f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})d\ell_k$ i $\mathbf{x}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^l} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})d\ell_l$ są mierzalne i zachodzą równości

$$\int_{\mathbb{R}^l}\Big(\int_{\mathbb{R}^k} f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})d\ell_k\Big)d\ell_l = \int_{\mathbb{R}^{k+l}} f d\ell_{k+l} = \int_{\mathbb{R}^k}\Big(\int_{\mathbb{R}^l} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})d\ell_l\Big)d\ell_k.$$

Dowód. Podobnie jak w przypadku twierdzenia o zamianie zmiennych wystarczy wykazać to twierdzenie jedynie w przypadku funkcji nieujemnych, więc w dalszym ciągu rozpatrywane będą jedynie funkcje mierzalne nieujemne. Wykażemy najpierw tezę dla funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych.

Dla każdego zbioru $A\subseteq\mathbb{R}^{k+l}$ definiujemy $A_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^l\colon\quad (\mathbf{x},\mathbf{y})\in A\}$ — przekroje pionowe i przekroje poziome $A^{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k\colon\quad (\mathbf{x},\mathbf{y})\in A\}$. Jasne jest, że prawdziwe są wzory

$$\big(\textstyle\bigcup_n A_n\big)_{\mathbf{x}} = \bigcup_n\big(A_n\big)_{\mathbf{x}},\ \big(\bigcap_n A_n\big)_{\mathbf{x}} = \bigcap_n\big(A_n\big)_{\mathbf{x}} \text{ oraz } \big(\mathbb{R}^{k+l}\setminus A\big)_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^l\setminus A_{\mathbf{x}}.$$

Wynika stąd, że rodzina $\mathcal{M}$ zbiorów $A\subseteq\mathbb{R}^{k+l}$, dla których oba zbiory $A_{\mathbf{x}}$ i $A^{\mathbf{y}}$ są mierzalne dla wszystkich $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ i dla wszystkich $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^l$ jest przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów zawiera ona wszystkie zbiory otwarte, bo jeśli zbiór A jest otwarty w $\mathbb{R}^{k+l}$, to oba zbiory $A_{\mathbf{x}}$ i $A^{\mathbf{y}}$ są otwarte w $\mathbb{R}^k$ i odpowiednio w $\mathbb{R}^l$. Wobec tego $\mathcal{M}\supseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$.

Niech $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^l}\ell_k(A^{\mathbf{y}})d\ell_l$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja μ jest miarą na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+l})$. Jeśli $A = B\times C$, B jest k–wymiarowym przedziałem, C – przedziałem l–wymiarowym, to zachodzi wzór $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^l}\ell_k(B)d\ell_l = \ell_k(B)\ell_l(C)$. Wobec tego: jeśli A jest zbiorem ograniczonym, to $\mu(A) < +\infty$, bo zbiór A jest zawarty w pewnym przedziale, jeśli A jest zbiorem otwartym, to $\mu(A) > 0$, bo każdy zbiór otwarty zawiera pewien (niezdegenerowany) przedział. Jeśli zbiór A przesuwamy o wektor $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x,\mathbf{v}_y)$, to zbiory $A^{\mathbf{y}}$ są przesuwane o wektor $\mathbf{v}_x$, zaś zbiory $A_{\mathbf{x}}$ — o wektor $\mathbf{v}_{\mathbf{y}}$. Prawdziwa jest równość $\ell_k(A^{\mathbf{y}}+\mathbf{v}_x) = \ell_k(A^{\mathbf{y}})$ (i $\ell_l(A_{\mathbf{x}}+\mathbf{v}_y) = \ell_k(A_{\mathbf{x}})$), zatem $\mu(A+\mathbf{v}) = \mu(A)$. Stąd i z twierdzenia o jednoznaczności miary Lebesgue'a wynika, że $\mu = \ell_{k+l}$, przypominamy, że obie miary przyjmują te same wartości na przedziałach $k+l$–wymiarowych.

Stąd wynika, że lewy z dowodzonych wzorów zachodzi w przypadku funkcji charakterystycznej zbioru borelowskiego. Analogicznie dowodzimy, że prawy wzór jest prawdziwy w tym przypadku.

Jeśli $\ell_{k+l}(A) = 0$, to istnieje zbiór borelowski B (nawet typu G_δ) taki, że $\ell_{k+l}(B) = 0$ i $A \subseteq B$. Wynika stąd dla każdego $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ zachodzi nierówność $\ell_k^*(A^\mathbf{y}) \leqslant \ell_k(B^\mathbf{y})$. Mamy też $\int_{\mathbb{R}^l} \ell_k(B^\mathbf{y})d\ell_l = 0$, zatem dla prawie wszystkich $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ zachodzi równość $\ell_k(B^\mathbf{y}) = 0$, więc również $\ell_k(A^\mathbf{y}) = 0$. Wynika stąd, że funkcja $\mathbf{y} \longrightarrow \ell_k(A^\mathbf{y})$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, bo jest równa 0 prawie wszędzie oraz że rodzina $\mathcal{M}$ zawiera również zbiory miary 0. Zachodzi też wzór $\int_{\mathbb{R}^l} \ell_k(A^\mathbf{y})d\ell_l = 0$. Przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów $\mathbb{R}^{k+l}$, które zawiera zbiory borelowskie i zbiory miary 0, zawiera wszystkie zbiory mierzalne. Dowodzony wzór zachodzi w przypadku każdego zbioru mierzalnego, bo każdy zbiór mierzalny możemy przedstawić w postaci sumy dwóch rozłącznych zbiorów: borelowskiego i zbioru miary 0.

Stąd już teza twierdzenia wynika w standardowy sposób: ponieważ zachodzi dla funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych, więc zachodzi dla funkcji prostych. Potem korzystamy z tego, że każda nieujemna funkcja mierzalna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych i stosujemy twierdzenie Lebesgue'a–Levi'ego. Dowód został zakończony. ■

Definicja 9.10 (przestrzeni funkcji całkowalnych)
Załóżmy, że μ jest dowolną miarą na przestrzeni X. Przez $L^1(\mu)$ oznaczamy zbiór funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a względem miary μ, przy czym utożsamiamy funkcje różniące się jedna od drugiej jedynie na zbiorze miary 0, tzn.

$$f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu < \infty$$

$$\text{i jeśli } f, g \in L^1(\mu), \text{ to } f = g \Leftrightarrow \mu\big(\{x \in X: \quad f(x) \neq g(x)\}\big) = 0. \;■$$

Jest jasne, że $L^1(\mu)$ jest przestrzenią liniową: jeśli f i $\tilde{f}$ różnią się na zbiorze miary 0 oraz g i $\tilde{g}$ różnią się na zbiorze miary 0, to również $f+g$ oraz $\tilde{f}+\tilde{g}$ różnią się na zbiorze miary zero (suma dwóch zbiorów miary 0 jest zbiorem miary 0). Ta sama uwaga dotyczy mnożenia przez liczbę. Wobec tego wyniki działań nie zależą od wyboru reprezentanta z klasy abstrakcji rozpatrywanej relacji równoważności. Elementy przestrzeni $L^1(\mu)$, to formalnie rzecz biorąc klasy abstrakcji relacji równoważności, ale nazywane są funkcjami. Nie prowadzi to do nieporozumień.

Definicja 9.11 (normy w $L^1(\mu)$)
Jeśli $f \in L^1(\mu)$, to $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$. ■

Z własności całki wynika od razu, że jeśli f i $\tilde{f}$ różnią się na zbiorze miary 0, to zachodzi równość $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = \int_X |\tilde{f}| d\mu = \|\tilde{f}\|_1$, czyli wartość normy nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy abstrakcji rozpatrywanej relacji równoważności. Jasne jest, że $\|f+g\|_1 \leqslant \|f|_1 + \|g|_1$ oraz $\|tf\|_1 = |t| \cdot \|f\|_1$ – użycie słowa norma jest więc usprawiedliwione.

Udowodnimy teraz bardzo ważne

Twierdzenie 9.12 (o zupełności przestrzeni $L^1(\mu)$)
Przestrzeń funkcji całkowalnych jest przestrzenią metryczną zupełną: jeśli ciąg (f_n)

spełnia warunek Cauchy'ego, czyli jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{m,n\geqslant n_\varepsilon}\|f_n-f_m\|_1<\varepsilon$, to jest zbieżny w $L^1(\mu)$, czyli istnieje funkcja $f\in L^1(\mu)$ taka, że $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$.

Dowód. Załóżmy, że ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego w $L^1(\mu)$. Niech $\big(f_{n_m}\big)$ będzie takim podciągiem, że $\frac{1}{4^{m+1}}>\|f_{n_m}-f_{n_{m+1}}\|_1=\int_X|f_{n_m}-f_{n_{m+1}}|d\mu$, łatwy dowód istnienia takiego ciągu pomijamy.

Niech $A_m=\{x\in X\colon\quad |f_{n_m}(x)-f_{n_{m+1}}(x)|\geqslant\frac{1}{2^m}\}$. Mamy $\mu(A_m)<\frac{1}{2^{m+2}}$. Niech $B_m=\bigcup_{n\geqslant m}A_n$. $\mu(B_m)<\frac{1}{2^{m+2}}+\frac{1}{2^{m+3}}+\dots=\frac{1}{2^{m+1}}$ i $B=\bigcap_m B_m$.Oczywiście $\mu(B)=0$. Jeśli $x\notin B$, to $x\notin B_m$ dla dostatecznie dużych m (bowiem $B_1\supseteq B_2\supset\dots$) i wobec tego $x\notin A_n$ dla $n\geqslant m$. Stąd wynika, że dla każdego $j\geqslant m$ zachodzi nierówność $|f_{n_j}(x)-f_{n_{j+1}}(x)|<\frac{1}{2^j}$, a stąd wynika, że szereg $\sum_j|f_{n_j}(x)-f_{n_{j+1}}(x)|$ jest zbieżny.

Niech $g(x)=\big|f_{n_1}(x)\big|+\sum\limits_{j=1}^{\infty}|f_{n_j}(x)-f_{n_{j+1}}(x)|$. Z nierówności trójkąta wynika, że dla każdego numeru i zachodzi nierówność $g(x)\geqslant\ |f_{n_i}(x)|$. Zachodzi również nierówność $\int_X g d\mu<\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^{j+1}}<\infty$, tzn. funkcja g jest całkowalna.

Dla każdego $x\notin B$ ciąg $\big(f_{n_j}(x)\big)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny. Niech $f(x)=\lim\limits_{j\to\infty}f_{n_j}(x)$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję f poza zbiorem B, którego miara jest równa 0. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (majorantą jest funkcja g) wnioskujemy, że $\int_X f_{n_j}d\mu\xrightarrow[j\to\infty]{}\int_X f d\mu$ i, co więcej, $\|f_{n_j}-f\|_1=$ $=\int_X|f_{n_j}-f|d\mu\xrightarrow[j\to\infty]{}0$, zatem $\lim\limits_{j\to\infty}f_{n_j}=f$ w L^1. ■

Przykład 9.13 Niech $f\binom{x}{y}=e^{-x^2-y^2}$. Obliczymy całkę $\int_{\mathbb{R}^2}f d\ell_2$.
Niech $\varphi\binom{r}{\theta}=\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$. Niech $G=\Big\{\binom{r}{\theta}\colon\quad r>0,|\theta|<\pi\Big\}$. Wtedy $\varphi(G)=\mathbb{R}^2\setminus\big\{\binom{x}{0}\colon\quad x\leqslant 0\big\}$, $\det\big(D\varphi\binom{r}{\theta}\big)=r$, a to oznacza, że φ przekształca dyfeomorficznie zbiór G na zbiór $\varphi(G)$. Zbiór $\big\{\binom{x}{0}\colon\quad x\leqslant 0\big\}$ ma miarę 0, bo jest zawarty w prostej (czyli podprzestrzeni liniowej właściwej). Mamy więc
$\int_{\mathbb{R}^2}f d\ell_2=\int_{\varphi(G)}f d\ell_2\overset{podst.}{=\!=\!=}\int_G f\circ\varphi\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_2\overset{Fubini}{=\!=\!=}$
$=\int_0^\infty\big(\int_{-\pi}^{\pi}e^{-r^2}rd\theta\big)dr=\int_0^\infty\big(e^{-r^2}r\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\big)dr=\int_0^\infty\big(2\pi e^{-r^2}r\big)dr=-\pi e^{-r^2}\Big|_0^\infty=\pi$. Z drugiej strony zachodzi równość
$\int_{\mathbb{R}^2}f d\ell_2\overset{Fubini}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y=$
$$=\big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\big)\big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\big)=\big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\big)^2.$$
Wynika stąd, że $\big(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\big)^2=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}d\ell_2=\pi$, zatem $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$. Znaleźliśmy wartość całki z funkcji wykorzystywanej np. w statystyce. Ten sposób jest o wiele prostszy od poznanego na I roku. ■

Przykład 9.14 Znajdziemy miarę k–wymiarowej kuli o promieniu $r > 0$. Niech

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\dots\cdot\cos\theta_{k-2}\cos\theta_{k-1}\\
x_2 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\dots\cdot\cos\theta_{k-2}\sin\theta_{k-1}\\
x_3 &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\dots\cdot\sin\theta_{k-2}\\
\dots\dots &\ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{k-2} &= \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\\
x_{k-1} &= \varrho\cos\theta_1\sin\theta_2\\
x_k &= \varrho\sin\theta_1\, r
\end{aligned}$$

Niech $\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{k-2},\theta_{k-1}) = (x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_k)$. Niech

$$G = \{(\varrho,\theta_1,\dots,\theta_{k-2},\theta_{k-1})\colon\quad 0<\varrho<r, |\theta_1|<\tfrac{\pi}{2},\dots,|\theta_{k-2}|<\tfrac{\pi}{2}, |\theta_{k-1}|<\pi\}.$$

Przekształcenie φ odwzorowuje zbiór otwarty G w kulę otwartą o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu r. Zobaczymy jakie punkty kuli są jego wartościami. Oznaczamy $\varrho = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_k^2}$. Jeżeli $|x_k| < \varrho$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba $\theta_1 \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, że $x_k = \varrho\sin\theta_1$. Wtedy oczywiście $\varrho\cos\theta_1 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_{k-1}^2}$. Jeżeli zachodzi nierówność $|x_{k-1}| < \varrho\cos\theta_1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba $\theta_2 \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, że $x_{k-1} = \varrho\cos\theta_1\sin\theta_2$. Kontynuując to postępowanie definiujemy kolejno liczby $\theta_3,\theta_4,\dots,\theta_{k-2}$. W ostatnim kroku mamy zdefiniować θ_{k-1} wiedząc, że ma być spełniona równość $x_1^2+x_2^2 = \varrho^2\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\dots\cos^2\theta_{k-2}$. Jest to możliwe, jeżeli $x_1 > -\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{k-2}$ przy czym jednoznaczności wyboru nie gwarantuje wartość x_2, ale wartości obu współrzędnych x_1,x_2 już tak. Łatwo można zauważyć, że z każdej z równości

$$|x_k| = \varrho,\ \ |x_{k-1}| = \varrho\cos\theta_1,\ \ \dots,\ \ |x_3| = \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{k-3}$$

wynika, że $x_2 = 0$. Również z tego, że $x_1 = -\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{k-2}$ wynika, że $x_2 = 0$. Wobec tego, jeśli $\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},r)\setminus\varphi(G)$, to $x_2=0$, zatem $\ell_k\big(B(\mathbf{0},r)\setminus\varphi(G)\big)=0$ (równanie $x_2=0$ definiuje podprzestrzeń $k-1$–wymiarową przestrzeni $\mathbb{R}^k$). Miarę 0 ma również sfera będąca brzegiem kuli $B(\mathbf{0},r)$, czyli zbiór $\overline{B}(\mathbf{0},r)\setminus B(\mathbf{0},r)$, bo jest zawarta w sumie dwóch wykresów funkcji $k-1$ zmiennych. Wobec tego $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big) = \ell_k\big(B(\mathbf{0},r)\big) = \ell_k\big(\varphi(G)\big)$. Macierz różniczki przekształcenia φ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{k-1} & -\varrho\sin\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{k-1} & \dots & -\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\sin\theta_{k-1}\\
\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\sin\theta_{k-1} & -\varrho\sin\theta_1\cos\theta_2\dots\sin\theta_{k-1} & \dots & \varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{k-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\varrho\sin\theta_1\sin\theta_2 & \dots & 0\\
\sin\theta_1 & \varrho\cos\theta_1 & \dots & 0
\end{pmatrix}.$$

.

Bez trudu sprawdzamy, że kolumny tej macierzy są k–wymiarowymi wektorami wzajemnie prostopadłymi (w przypadku $k=3$ jest to fakt powszechnie znany: promień sfery jest do niej prostopadły, więc jest prostopadły do południków i równoleżników, które też są wzajemnie prostopadłe — wektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$ wskazuje kierunek promienia, wektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}$ — kierunek południka, wektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2}$ — kierunek równoleżnika). Macierz $D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{k-1})$ jest więc ortogonalna. Wobec tego macierz

$$\big(D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})\big)^T\cdot D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$$
jest przekątniowa. Na jej głównej przekątnej znajdują się kwadraty skalarne kolumn macierzy $D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$. Liczba $\big|\det\big(D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})\big)\big|$ równa jest więc iloczynowi długości kolumn macierzy $D\varphi(\varrho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{k-1})$, czyli
$1\cdot\varrho\cdot(\varrho\cos\theta_1)\cdot(\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2)\cdot\cdots\cdot(\varrho\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2})=$
$$=\varrho^{k-1}\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}.$$
Możemy obliczyć: $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=\ell_k\big(\varphi(G)\big)=\int_{\varphi(G)}d\ell_k=$
$\overset{podst.}{=\!=\!=}\int_G\big|\det(D\varphi)\big|d\ell_k=\int_G\Big(\varrho^{k-1}\cos^{k-2}\theta_1\cos^{k-3}\theta_2\ldots\cos\theta_{k-2}\Big)d\ell_k\overset{Fubini}{=\!=\!=\!=}$
$$=\int_0^r\varrho^{k-1}d\varrho\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k-2}\theta_1d\theta_1\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k-3}\theta_2d\theta_2\cdot\cdots\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta_{k-2}d\theta_{k-2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_{k-1}.$$
Oczywiście $\displaystyle\int_0^r\varrho^{k-1}d\varrho=\frac1k r^k$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_{k-1}=2\pi$. Na pierwszym roku wykazaliśmy też, że jeśli $j\geqslant 2$, to $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\theta d\theta=\frac{j-1}{j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{j-2}\theta d\theta$. Z tego wzoru wnioskujemy, że jeśli j jest liczbą parzystą, to $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\theta d\theta=\frac{j-1}{j}\cdot\frac{j-3}{j-2}\cdot\cdots\cdot\frac34\cdot\frac12\pi$, jeśli j jest nieparzyste, to $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^j\theta d\theta=\frac{j-1}{j}\cdot\frac{j-3}{j-2}\cdot\cdots\cdot\frac45\cdot\frac23\cdot 2$. Podstawiając, skracając i upraszczając otrzymujemy $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=r^k\pi^{k/2}\frac{1}{(k/2)!}$ dla k parzystego oraz $\ell_k\big(\overline{B}(\mathbf{0},r)\big)=2\cdot r^k\cdot\frac1k\cdot\frac{1}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac13\cdot(2\pi)^{(k-1)/2}$ dla nieparzystego k. ■

Zadanko.
Zapisać otrzymany wynik za pomocą funkcji Γ bez rozróżniania przypadków. ■

Definicja 9.15 (stożka)
Stożkiem $C(P,\mathbf{v})$ o podstawie $P\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k-1})$ i wierzchołku $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$, $v_k>0$ nazywamy sumę wszystkich odcinków łączących punkt $\mathbf{v}$ z punktami zbioru $P\times\{0\}$, mamy więc $C(P,\mathbf{v})=\big\{t(\mathbf{x},0)+(1-t)\mathbf{v}\colon\quad \mathbf{x}\in P,\ t\in[0,1]\big\}$. ■

Przykład 9.16 Wykażemy, że $\ell_k\big(C(P,\mathbf{v})\big)=\frac1k v_k\ell_{k-1}(P)$. Wzór ten obejmuje między innymi wzór na pole trójkąta ($k=2$), wzór na objętość ostrosłupa ($k=3$, P — wielokąt) oraz wzór na objętość stożka ($k=3$, P — koło).

Definiujemy $\varphi\colon\mathbb{R}^{k-1}\times(0,1)\to\mathbb{R}^k$ wzorem $\varphi(\mathbf{x},t)=t(\mathbf{x},0)+(1-t)\mathbf{v}$. Macierz różniczki φ wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_1-v_1\\ 0 & t & 0 & \ldots & 0 & x_2-v_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t & x_{k-1}-v_{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -v_k\end{pmatrix}$$

Wobec tego $\big|\det\big(D\varphi(\mathbf{x},t)\big)\big|=t^{k-1}\mathbf{v}_k$. Łatwo można sprawdzić, że φ jest różnowartościowe. Ponieważ jego różniczka w dowolnym punkcie dziedziny jest izomorfizmem, więc φ jest dyfeomorfizmem zbioru otwartego $G=\mathbb{R}^{k-1}\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^k$ na jego obraz zawarty w $\mathbb{R}^k$. Cały stożek *z wyjątkiem podstawy i wierzchołka, więc punktów zbioru miary* 0, jest zawarty w tym obrazie. Niech $C = C(P,\mathbf{v})$. Mamy więc $\ell_k(C) = \int_{\varphi(G)} \chi_C d\ell_k \overset{podst.}{=\!=\!=} \int_G \chi_{P\times(0,1)} t^{k-1} v_k d\ell_k \overset{Fubini}{=\!=\!=}$

$$= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \chi_P d\ell_{k-1} \cdot \int_0^1 t^{k-1} v_k \,\mathrm{d}t = \ell_{k-1}(P) \cdot \tfrac{1}{k} v_k.$$

Wzór został udowodniony. ■

Definicja 9.17 (środka ciężkości)
Jeśli μ jest pewną miarą określoną na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, zbiór A jest mierzalny, $0 < \mu(A) < \infty$, funkcje x_1, x_2, …,x_k są całkowalne na zbiorze A, to środkiem ciężkości zbioru A nazywamy punkt $c(A) = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ zdefiniowany wzorami $c_j = \frac{1}{\mu(A)} \int_A x_j d\mu$, co można zapisać również tak $c(A) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \mathbf{x} d\mu$, przyjąwszy, że funkcję o wartościach wektorowych całkujemy obliczając całki z jej współrzędnych. ■

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli zbiory A i B maja środki ciężkości i są rozłączne, to również zbiór $A \cup B$ ma środek ciężkości i zachodzi równość

$$c(A\cup B) = \tfrac{\mu(A)}{\mu(A)+\mu(B)} c(A) + \tfrac{\mu(B)}{\mu(A)+\mu(B)} c(B).$$

Z liniowości całki i twierdzenia o podstawianiu wynika, że jeśli L jest liniowym izomorfizmem $\mathbb{R}^k$ na siebie, $\mu = \ell_k$, A ma środek ciężkości, to również zbiór $L(A)$ ma środek ciężkości i zachodzi równość $c(L(A)) = L(c(A))$:

$$c(L(A)) = \tfrac{1}{\ell_k(L(A))} \int_{L(A)} \mathbf{x} d\ell_k \overset{podst.}{=\!=\!=} \tfrac{1}{\ell_k(L(A))} \int_A L(\mathbf{y}) |\det(L)| d\ell_k =$$

$$= \tfrac{1}{\ell_k(A)} L\Big(\int_A \mathbf{y} d\ell_k \Big) = L(c(A)).$$

Twierdzenie 9.18 (Pappusa–Guldina[2])
Jeśli A jest zbiorem zawartym w $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 0 < x_1\}$, który ma środek ciężkości, B jest zbiorem, który powstaje w wyniku obrotu zbioru A o kąt 2π wokół prostej $x_1 = x_2 = 0$, to $\ell_3(B) = 2\pi r \ell_2(A)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości zbioru A od osi obrotu.

Dowód. Niech $G = \{(x_1, x_3, t) : \quad x_1 > 0, \ 0 < t < 2\pi\}$. Definiujemy przekształcenie $\varphi(x_1,x_3,t) = (x_1\cos t, x_1 \sin t, x_3)$, Jasne jest, że $\varphi(G)$ zawiera prawie wszystkie punkty zbioru B: wszystkie z wyjątkiem leżących w półpłaszczyźnie $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 > 0 = x_2\}$, której miara jest równa 0. Mamy

$$D\varphi(x_1,x_3,t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -x_1 \sin t \\ \sin t & 0 & x_1 \cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wobec tego $|\det(D\varphi(x_1,x_3,t))| = x_1$. Możemy więc napisać:
$\ell_3(B) = \int_{\varphi(G)} \chi_B d\ell_3 \overset{podst.}{=\!=\!=} \int_G \chi_B \circ \varphi \cdot x_1 d\ell_3 = \int_{A\times(0,2\pi)} x_1 d\ell_3 \overset{Fubini}{=\!=\!=}$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \cdot \int_A x_1 d\ell_2 = 2\pi \ell_2(A) \cdot \tfrac{1}{\ell_2(A)} \int_A x_1 d\ell_2. \ ■$$

W ostatnio omówionych przykładach okazywało się, że po ewentualnej zmianie układu współrzędnych (czyli przekształceniu za pomocą dyfeomorfizmu) i usunięciu zbioru miary 0 mieliśmy już do czynienia z iloczynem kartezjańskim dwóch lub większej

[2] Pappus (290–350), Guldin(1577–1643)

liczby zbiorów, co pozwalało na skorzystanie z twierdzenia Fubini'ego. Dowód twierdzenia Pappusa–Guldina to jeszcze jedna ilustracja tej metody.

Na zakończenie zajmiemy się twierdzeniami pozwalającymi przybliżać funkcje całkowalne funkcjami o jeszcze lepszych własnościach. Zaczniemy od najprostszego.

Twierdzenie 9.19 (o gęstości funkcji ciągłych w L^1)
Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i każdej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, tzn. funkcji całkowalnej względem k–wymiarowej miary Lebesgue'a, istnieje taka funkcja ciągła $g\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, że

$$\|f-g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^k} |f-g|d\ell_k < \varepsilon.$$

Dowód. Niech A będzie zbiorem mierzalnym miary skończonej. Istnieją wtedy zbiory $F \subseteq A$ i $G \supset A$ takie, że $\ell_k(G \setminus F) < \varepsilon$. Z twierdzenia Tietzego (a nawet z lematu Urysohna) wynika, że istnieje taka funkcja ciągła $g\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,1]$, że $g(x) = 0$ dla $x \notin G$ oraz $g(x) = 1$ dla $\mathbf{x} \in F$. Wobec tego

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\chi_A - g|d\ell_k \leqslant \int_{G\setminus F} |\chi_A - g|d\ell_k \leqslant 1 \cdot \ell_k(G \setminus F).$$

Teza twierdzenia zachodzi więc w przypadku funkcji charakterystycznej zbioru miary skończonej. Wobec tego zachodzi dla kombinacji liniowej takich funkcji, czyli dla dowolnej funkcji prostej: jeśli $\ell_k(A_j) < \infty$ oraz $\|\chi_{A_j} - g_j\|_1 < \frac{\varepsilon}{1+|c_1|+\cdots+|c_n|}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, to $\big\| \sum_j c_j\chi_{A_j} - \sum_j c_j g_j\big\|_1 \leqslant \sum_j |c_j| \cdot \|\chi_{A_j} - g_j\| \leqslant \varepsilon$. Niech f będzie funkcją całkowalną. Istnieje niemalejący ciąg (f_n) funkcji prostych zbieżny punktowo do funkcji f_+. Z twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n d\ell_k = \int_{\mathbb{R}^k} f_+ d\ell_k$, a stąd i z tego, że $f_+ \geqslant f_n$ wynika, że $\|f_+ - f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Istnieje więc taka liczba n, że $\|f_+ - f_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ f_n jest funkcją prostą, więc istnieje funkcja ciągła g taka, że $\|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Oczywiście $\|f_+ - g\|_1 \leqslant \|f_+ - f_n\|_1 + \|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. W taki sam sposób przybliżamy funkcję f_-, co pozwala na przybliżenie funkcji $f = f_+ - f_-$ Dowód został zakończony. ∎

Definicja 9.20 (splotu dwu funkcji)
Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^k)$ lub jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ i g jest ograniczoną funkcja mierzalną, to

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y}).$$

Funkcję $f * g$ nazywamy splotem funkcji f i g. ∎

Jest oczywiste, że iloczyn funkcji całkowalnej i ograniczonej funkcji mierzalnej jet funkcja całkowalną. Nieco mniej oczywiste jest

Twierdzenie 9.21 (o całkowalności splotu funkcji całkowalnych)
Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, to również $f * g \in L^1(\mathbb{R}^k)$.

Dowód. Niech $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$. Ponieważ funkcja g jest mierzalna na $\mathbb{R}^k$ i iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^k \times A$ przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i zbioru mierzalnego A jest mierzalny, więc funkcja $\tilde{g}$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^{2k}$. Wykażemy, że funkcja $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ jest mierzalna. Niech $a \in \mathbb{R}$ i niech $A = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k\colon \quad f(\mathbf{z}) > a\}$. Niech $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$. Przekształcenie φ jest liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^{2k}$, więc jest dyfeomorfizmem. Wynika stąd, że zbiór $B \subseteq \mathbb{R}^{2k}$ jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(B)$ jest mierzalny. $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$\mathbf{x}-\mathbf{y}\in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{y})\in\mathbb{R}^k\times A$. Zbiór $\mathbb{R}^k\times A$ jest mierzalny, więc również zbiór $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^k\times A)=\varphi(\mathbb{R}^k\times A)$ jest mierzalny. Wobec tego funkcja $\tilde f\cdot\tilde g$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^{2k}$, więc również funkcja $|\tilde f\cdot\tilde g|$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^{2k}$. Stąd $\int_{\mathbb{R}^{2k}}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|d\ell_{2k}\overset{Fubini}{=\!=\!=}\int_{\mathbb{R}^k}\Big(\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|d\ell_k(\mathbf{x})\Big)d\ell_k(\mathbf{y})=$
$=\int_{\mathbb{R}^k}\Big(|g(\mathbf{y})|\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})|d\ell_k(\mathbf{x})\Big)d\ell_k(\mathbf{y})\overset{podst.}{=\!=\!=}\int_{\mathbb{R}^k}\Big(|g(\mathbf{y})|\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|d\ell_k(\mathbf{x})\Big)d\ell_k(\mathbf{y})=$
$=\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|d\ell_k(\mathbf{x})\cdot\int_{\mathbb{R}^k}|g(\mathbf{y})|d\ell_k(\mathbf{y})<\infty,$
bo obie funkcje f,g są całkowalne. Ponieważ funkcja $(\mathbf{x},\mathbf{y})\longrightarrow|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|$ jest całkowalna, więc z twierdzenia Fubini'ego wynika, że dla prawie każdego $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ istnieje całka $\int_{\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})|d\ell_k$ i że otrzymana funkcja zmiennej $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ jest całkowalna. Wobec tego poza zbiorem miary 0 splot jest dobrze określony i jest funkcją całkowalną. ■

Twierdzenie 9.22 (o przemienności splotu)
Jeśli funkcje f,g są całkowalne na $\mathbb{R}^k$, to $f*g=g*f$.

Dowód. $(f*g)(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^k}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})\overset{\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{y}}{=\!=\!=\!=}$
$$=\int_{\mathbb{R}^k}f(\mathbf{z})g(\mathbf{x}-\mathbf{z})d\ell_k(\mathbf{z})=(g*f)(\mathbf{x}).\ ■$$

Niech $\tilde\beta(t)=e^{1/(t^2-t)}$ dla $t\in(0,1)$ oraz $\tilde\beta(t)=0$ dla $t\notin(0,1)$. Można sprawdzić bez większych trudności, że funkcja $\tilde\beta$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna (uczyliśmy się tego na pierwszym roku). Określmy funkcję β wzorem $\beta(t)=\int_{-\infty}^t\tilde\beta(s)ds/\int_{-\infty}^\infty\tilde\beta(s)ds$. Funkcja β jest funkcją klasy C^∞, bo jej pochodna ma tę własność. Dla $t\leqslant 0$ zachodzi równość $\beta(t)=0$, dla $t\geqslant 1$ – równość $\beta(t)=1$, na przedziale $[0,1]$ funkcja β jest rosnąca. Niech $\tilde\alpha(\mathbf{x})=\beta\big(\frac{4-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{3}\big)$ dla $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$. Funkcja $\tilde\alpha$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Jeśli $\|\mathbf{x}\|\leqslant 1$, to $\tilde\alpha(\mathbf{x})=1$, jeśli $1<\|x\|<2$, to $0<\tilde\alpha(\mathbf{x})<1$, jeśli $\|\mathbf{x}\|\geqslant 2$, to $\tilde\alpha(\mathbf{x})=0$. Niech $\alpha(\mathbf{x})=\tilde\alpha(\mathbf{x})\Big/\int_{\mathbb{R}^k}\tilde\alpha d\ell_k$. Wreszcie niech $\alpha_\varepsilon(\mathbf{x})=\varepsilon^{-k}\alpha\big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\big)$. Ponieważ $\int_{\mathbb{R}^k}\alpha d\ell_k=1$, więc $\int_{\mathbb{R}^k}\alpha_\varepsilon d\ell_k=1$ dla $\varepsilon\in(0,1)$.

Wykażemy, że jeśli $f\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ jest funkcją, która zeruje się *poza* pewną kulą, $h\in L^1(\mathbb{R}^k)$, to $h*f$ jest funkcją klasy C^∞ oraz $\frac{\partial}{\partial x_j}(f*h)=\frac{\partial f}{\partial x_j}*h$. Wynika to od razu z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i tego, że
$$\tfrac{1}{t}\big(f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j-\mathbf{y})h(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})h(\mathbf{y})\big)=\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}+\theta\mathbf{e}_j-\mathbf{y})h(\mathbf{y})$$
dla pewnej liczby θ zależnej od wielu czynników, ale ze względu na to, że $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ funkcją ciągłą, zerującą się poza pewną kulą, zatem funkcją ograniczoną, iloraz różnicowy $\frac{1}{t}\big(f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j-\mathbf{y})h(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})h(\mathbf{y})\big)$ jest ograniczony przez $\sup_{\mathbf{z}}|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{z})|\cdot|h(\mathbf{y})|$, czyli przez funkcję całkowalną zmiennej $\mathbf{y}$. Wykazaliśmy, że $\frac{\partial}{\partial x_j}(f*h)=\frac{\partial f}{\partial x_j}*h$. Funkcje $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j=1,2,\dots,k$ też są klasy C^∞, zerują się poza pewną kulą, więc można zakończyć dowód powołaniem się na zasadę indukcji (ciągłość pochodnych cząstkowych wynika automatycznie z istnienia następnych pochodnych cząstkowych).

Wykażemy, że jeśli f jest funkcją ciągłą, która zeruje się *poza* pewną kulą $B(\mathbf{0},r)$, $r>0$, to $\alpha_\varepsilon*f\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}f$, przy czym zbieżność jest jednostajna na $\mathbb{R}^k$. Funkcja f jest ciągła jednostajnie (bo zeruje się poza zbiorem ograniczonym), zatem dla każdej liczby $\eta>0$ istnieje liczba $\delta>0$ taka, że jeśli $\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|<\delta$, to $|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|<\eta$. Dla $0<\varepsilon<\frac{\delta}{2}$ mamy więc

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^k}\Big(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Big)\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})\Big| = \Big|\int_{B(\mathbf{0},2\varepsilon)}\Big(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Big)\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{B(\mathbf{0},2\varepsilon)}\big|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big|\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y}) \leqslant \eta\cdot\int_{B(\mathbf{0},2\varepsilon)}\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y}) = \eta.$$

Ponieważ funkcje $\alpha_\varepsilon * f$ dążą jednostajnie przy $\varepsilon \longrightarrow 0$ do funkcji f i dla $0<\varepsilon<1$ wszystkie zerują się poza $B(\mathbf{0}, r+2)$, więc ze zbieżności jednostajnej wynika, że $\|\alpha_\varepsilon * f - f\|_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$.

Niech $f\in L^1$ będzie funkcją ciągłą i niech $\widehat{\alpha}_n(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}\big(\frac{\mathbf{x}}{n}\big)$. Jeżeli $\|\mathbf{x}\|\leqslant n$, to $\widehat{\alpha}_n(\mathbf{x})=1$, a jeżeli $\|\mathbf{x}\|\geqslant 2n$, to $\widehat{\alpha}_n(\mathbf{x})=0$. Dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $0\leqslant\widehat{\alpha}(x)\leqslant 1$. Z całkowalności funkcji $f$wynika, że $\int_{\{\|\mathbf{x}\|\geqslant n\}}|f|d\ell_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Wobec tego $\|\widehat{\alpha}_n\cdot f - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Niech $\eta>0$. Istnieje takie n, że $\|\widehat{\alpha}_n f - f\|_1<\eta$. Istnieje taka liczba $\varepsilon>0$, że

$$\|\alpha_\varepsilon * (\widehat{\alpha}_n f) - \widehat{\alpha}_n f\|_1 < \eta.$$

Wobec tego $\|\alpha_\varepsilon * (\alpha_n f) - f\| < 2\eta$. Funkcja $\alpha_\varepsilon * (\alpha_n f) = (\alpha_n f) * \alpha_\varepsilon$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i zeruje się poza kulą $B(\mathbf{0}, 2n+2\varepsilon)$.[3] Wykazaliśmy więc, że funkcje całkowalne można przybliżać w przestrzeni metrycznej $L^1(\mathbb{R}^k)$ funkcjami klasy C^∞ i to takimi, które zerują się poza pewnym zbiorem zwartym (zależnym od funkcji przybliżającej). Prawdziwe jest więc

Twierdzenie 9.23 (o przybliżaniu funkcji całkowalnych funkcjami gładkimi) Jeśli $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ i $\varepsilon>0$, to istnieje taka funkcja $g\in C^\infty$ i taka liczba $r>0$, że $\|\mathbf{x}\|\geqslant r \Rightarrow g(\mathbf{x})=0$ oraz $\|f-g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^k}\big|f-g\big|d\ell_k < \varepsilon$. ■

Udowodnimy jeszcze twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa. Dowód, który podamy jest jednym z wielu możliwych. Daje on konkretne wielomiany. Dodatkowo, gdy funkcja jest klasy C^m, to również pochodne wielomianów do m–tego rzędu włącznie są jednostajnie zbieżne do odpowiednich pochodnych fukcji (podobnie jak w przypadku wielomianów Bernsteina).

Twierdzenie 9.24 (Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami) Jeśli $K\subseteq\mathbb{R}^k$ jest zbiorem zwartym, $f\colon K\longrightarrow\mathbb{R}$ – funkcja ciągłą, to istnieje ciąg (T_n) wielomianów jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Niech $d_n = \int_{\|\mathbf{u}\|\leqslant 1}(1-\mathbf{u}^2)^n d\ell_k$. Oszacujemy tę całkę z dołu. Zastosujemy podstawienie sferyczne (biegunowe), to które użyliśmy obliczając miarę kuli k–wymiarowej. Po zastosowaniu tego podstawienia, następnie twierdzenia Fubini'ego otrzymujemy równość ($c_k := k\cdot\ell_k(B(\mathbf{0},1))$)

$$d_n = \int_{\|\mathbf{u}\|\leqslant 1}(1-\mathbf{u}^2)^n d\ell_k = c_k\int_0^1(1-\varrho^2)^n\varrho^{k-1}d\varrho \geqslant c_k\int_0^1(1-\varrho)^n\varrho^{k-1}d\varrho \overset{\text{przez części}}{=\!=\!=}$$
$$= c_k\Big(\tfrac{-1}{n+1}(1-\varrho)^{n+1}\varrho^{k-1}\Big|_0^1 + \tfrac{k-1}{n+1}\int_0^1(1-\varrho)^{n-1}\varrho^{k-2}d\varrho\Big) = \tfrac{k-1}{n+1}c_k\int_0^1(1-\varrho)^{n+1}\varrho^{k-2}d\varrho =$$
$$= \cdots = \tfrac{(k-1)!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}c_k\int_0^1(1-\varrho)^{n+k-1}\varrho^0 d\varrho = \tfrac{(k-1)!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}c_k.$$

Stąd wynika, że $d_n\geqslant C_k\cdot\frac{1}{n^k}$ dla pewnej liczby $C_k>0$, bo

$$\lim_{n\to\infty}\tfrac{n^k(k-1)!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = (k-1)!$$

Niech $t_n(x) = \frac{1}{d_n}(1-\mathbf{x}^2)^n$. Mamy $\int_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1}t_n(\mathbf{x})d\ell_k = 1$ oraz $t_n(\mathbf{x})\leqslant\frac{1}{C_k}n^k(1-x^2)^n$.

Niech $0<\delta<1$. Mamy $\int_{\delta\leqslant\|\mathbf{x}\|\leqslant 1}t_n(\mathbf{x})d\ell_k \leqslant \frac{1}{C_k}n^k(1-\delta^2)^n\cdot\ell_k(B(\mathbf{0},1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

[3] bo jeśli $\alpha_\varepsilon(\mathbf{y})\neq 0$ i $(\alpha_n f)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\neq 0$, to $\|\mathbf{y}\|<2\varepsilon$ i $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<2n$, zatem $\|\mathbf{x}\|\leqslant\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|\leqslant$ $\leqslant 2n+2\varepsilon$.

Zbiór K jest zwarty, więc ograniczony. Możemy więc przekształcić go przez jednokładność względem punktu $\mathbf{0}$ tak, by jego obraz znalazł się w kuli $B(\mathbf{0},\frac{1}{4})$. Złożenie wielomianu z jednokładnością jest wielomianem, złożenie funkcji ciągłej z jednokładnością jest funkcją ciągłą. Można więc, bez straty ogólności, założyć w dowodzie , że $K\subseteq B(\mathbf{0},\frac{1}{4})$.

Jeśli $\tilde{f}$ jest funkcją ciągłą na zbiorze $K\subseteq B(\mathbf{0},\frac{1}{4})$, to na mocy twierdzenia Tietzego istnieje taka funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}$, że $\tilde{f}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$ dla $\mathbf{x}\in K$, dla $\mathbf{x}\notin B(\mathbf{0},\frac{1}{2})$ zachodzi $f(\mathbf{x})=0$ oraz $\sup_{\mathbf{x}\in K}|\tilde{f}(\mathbf{x})|=\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|$. Niech $M=\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k}|f(\mathbf{x})|$.

Niech $T_n(\mathbf{x})=(t_n*f)(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^k}t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})=\int_{\mathbb{R}^k}f(\mathbf{x}-\mathbf{y})t_n(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})$.[4] Funkcja T_n jest wielomianem k zmiennych: x_1, x_2,…,x_k, bo t_n jest wielomianem, więc $t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ jest sumą wyrażeń postaci $ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}y_1^{m_1}y_2^{m_2}\dots y_k^{m_k}$, zatem po scałkowaniu względem zmiennej $\mathbf{y}$ otrzymamy sumę wyrażeń postaci $bx_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$.

Niech $\varepsilon>0$. Niech $\delta>0$ będzie taką liczbą, że $\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|<\delta\Rightarrow|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|<\varepsilon$.

Jeśli $\|\mathbf{x}\|\leqslant\frac{1}{4}$, to $|T_n(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})|=\Big|\int_{\mathbb{R}^k}t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\Big|=$

$$=\Big|\int_{\|\mathbf{y}\|\leqslant\frac{1}{2}}t_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\ell_k(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\Big|\ \overset{\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{y}}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\Big|\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|\leqslant\frac{1}{2}}t_n(\mathbf{u})f(\mathbf{x}-\mathbf{u})d\ell_k(\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\Big|\ \underset{\Rightarrow\|\mathbf{u}\|\leqslant3/4<1}{\overset{\|\mathbf{x}\|\leqslant1/4,\ \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|\leqslant1/2\Rightarrow}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$=\Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\leqslant1}t_n(\mathbf{u})f(\mathbf{x}-\mathbf{u})d\ell_k(\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\Big|=\Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\leqslant1}t_n(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{x}-\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\big)d\ell_k(\mathbf{u})\Big|=$$

$$=\Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\leqslant\delta}t_n(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{x}-\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\big)d\ell_k(\mathbf{u})\Big|+\Big|\int_{\delta\leqslant\|\mathbf{u}\|\leqslant1}t_n(\mathbf{u})\big(f(\mathbf{x}-\mathbf{u})-f(\mathbf{x})\big)d\ell_k(\mathbf{u})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\Big|\int_{\|\mathbf{u}\|\leqslant\delta}t_n(\mathbf{u})d\ell_k(\mathbf{u})\Big|+2M\Big|\int_{\delta\leqslant\|\mathbf{u}\|\leqslant1}t_n(\mathbf{u})d\ell_k(\mathbf{u})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon+2M\Big|\int_{\delta\leqslant\|\mathbf{u}\|\leqslant1}t_n(\mathbf{u})d\ell_k(\mathbf{u})\Big|\xrightarrow[n\to\infty]{}\varepsilon.$$ Dowód został zakończony. ∎

Kilka zadań

Zadanie 9.1 Wykazać, że jeśli funkcje f,g,h są całkowalne na $\mathbb{R}^k$, to $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Zadanie 9.2 Udowodnić, że nie istnieje taka funkcja $\delta\in L^1(\mathbb{R}^k)$, że dla każdej funkcji $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ zachodzi wzór $\delta*f=f=f*\delta$.

Zadanie 9.3 Wykazać, że jeśli funkcja f jest ograniczona i ciągła a funkcja g jest całkowalna, to splot $f*g$ jest funkcją ciągłą.

Zadanie 9.4 Wykazać, że jeśli funkcja f jest całkowalna, a funkcja g jest mierzalna i ograniczona, to splot $f*g$ jest funkcją ciągłą.

Zadanie 9.5 Wykazać, że jeśli $f\in C^1(\mathbb{R}^k)$ i $f(\mathbf{x})=0$, gdy $\|\mathbf{x}\|\geqslant\frac{1}{2}$, to $\frac{\partial T_n}{\partial x_j}=t_n*\frac{\partial f}{\partial x_j}$ — oznaczenia z dowodu twierdzenia Weierstrassa.

Zadanie 9.6 Niech $f\in L^1$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$ i niech $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}-\mathbf{v})$. Dowieść, że odwzorowanie $\mathbb{R}^k\ni\mathbf{v}\longmapsto f_{\mathbf{v}}\in L^1(\mathbb{R}^k)$ jest jednostajnie ciągłe.

[4] t_n nie jest funkcją całkowalną na $\mathbb{R}^k$, ale $\|\mathbf{y}\|\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow f(\mathbf{y})=0$, więc wszystkie całki są dobrze określone i $t_n*f=f*t_n$.

Zadanie 9.7 Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary ℓ_1. Niech $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$. Dowieść, że funkcja $\mathcal{L}(f)\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞. *Można zacząć od wykazania ciągłości.*

Zadanie 9.8 Niech $f\colon [0,\infty)$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą.
Wykazać, że $\lim\limits_{y\to 0}\displaystyle\int_0^\infty \tfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\pi}{2}f(0)$.

Zadanie 9.9 Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 9.10 Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^k\big(1-\frac{x}{n}\big)^n\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 9.11 Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \tfrac{(\sin x+\cos x)^n}{1+(\sin x+\cos x)^{2n}}\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 9.12 Obliczyć $\frac{d}{da}\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ i $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\ln\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 9.13 Obliczyć (może można zróżniczkować względem a)

a. $\int_0^1 \frac{t^a-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$; **b.** $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $a>0$; **d.** $\int_0^1 x^{a-1}\big(\ln x\big)^n\,\mathrm{d}x$, $a>1$.

Zadanie 9.14 Niech T oznacza czworościan foremny, którego wierzchołkami są $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,\sqrt{2})$, $(0,-1,\sqrt{2})$. Niech B będzie bryłą powstałą w wyniku obrotu czworościanu T wokół osi OZ, tzn. $B = \{R_\alpha(p)\colon\ \ p\in T,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$, gdzie R_α oznacza obrót wokół osi z o kąt α. Obliczyć objętość (trójwymiarową miarę Lebesgue'a) bryły B.

Zadanie 9.15 Niech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oznacza funkcję całkowalną w sensie Lebesgue'a ($f\in L(\mathbb{R})$). Niech $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Wykazać, że:
(a) g jest dobrze określona na $\mathbb{R}$,
(b) g jest ciągła na $\mathbb{R}$,
(c) g ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$.
(d) Czy g jest funkcją klasy C^2 na całej prostej?

Zadanie 9.16 Dana jest przestrzeń z miarą $\langle X,\mathfrak{M},\mu\rangle$, $\mu(X)<\infty$, oraz ustalona funkcja $f\colon X\to\mathbb{R}$, mierzalna względem $\mathfrak{M}$. Niech $J = \{p\in[1,\infty)\colon \displaystyle\int_X |f|^p d\mu < \infty\}$.
Dla $p\in J$ określamy $\|f\|_p\colon = \left(\displaystyle\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ [tzw. p-norma].
Udowodnić, że zbiór J jest przedziałem i że $p\mapsto \|f\|_p$ jest ciągłą funkcją zmiennej $p\in J$.

Zadanie 9.17 Dane liczby $a>b>0$. Obliczyć $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$.

Zadanie 9.18* Dana jest przestrzeń z miarą $\langle X, \mathfrak{M}, \mu\rangle$, $\mu(X) = 1$, oraz zbiory $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, $\mu(A_i) \geqslant 1/2$; n – liczba nieparzysta. Dowieść, że dla pewnych dwóch różnych numerów i, j zachodzi nierówność $\mu(A_i \cup A_j) \geqslant \dfrac{n-1}{4n}$.

Zadanie 9.19 Obliczyć całki (jeśli istnieją):
$\iint_A xe^{-y^2} dx\, dy$, gdzie $A = \{y > 0,\ |x+y| \leqslant 1\}$;
$\iiint_A \frac{x\, dx\, dy\, dz}{1+(xyz)^4}$, gdzie $A = \{(x, y, z)\colon\ \ x > 0,\ y > 1,\ z > 1\}$;
$\iiint_A \frac{dx\, dy\, dz}{1+(x+y+1)^2}$, gdzie $A = \{(x, y, z)\colon\ \ x,\ x+y,\ z(x+y+1) \in (0, 1)\}$.

Zadanie 9.20 Obliczyć objętość (miarę trójwymiarową) bryły
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ 4x^2 + y^2 < 4,\ \ x > 0,\ \ x^2 > z > 0\}.$$

Zadanie 9.21* Dana funkcja $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $[a, b]$. Zakładamy, że funkcja φ' jest całkowalna względem miary ℓ_1 na $[a, b]$. Dowieść, że $\int_a^b \varphi'\, d\ell_1 = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Zadanie 9.22 Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $2xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$, $z = 0$, $yz = 1$; $x, y > 0$.
Wyjaśnienie: w zbiorze $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x > 0,\ y > 0\}$ te równania opisują pewne powierzchnie, które dzielą ów zbiór na kilka obszarów; jeden z nich jest ograniczony, i to jest bryła B.

Zadanie 9.23 Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na zbiorze
$$\{(x, y, z)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z\}.$$

Zadanie 9.24 Niech $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \max(-2x, x-1) < y < \min(1-2x, x+1)\}$. Obliczyć (z dokładnym uzasadnieniem) granicę $\lim_{n\to\infty} \iint_H \left(\frac{2x+y+n}{n}\right)^n dx\, dy$.

Zadanie 9.25 Dany jest kąt dwuścienny o rozwartości 2γ $(0 < \gamma < \pi/2)$, którego krawędź przechodzi przez środek kuli o promieniu a. Niech C będzie częścią kuli zawartą w tym kącie dwuściennym. Obliczyć odległość środka ciężkości bryły C od krawędzi kąta.

Zadanie 9.26 Niech $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym nieosobliwym i niech E będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym w R^k. Wykazać, że obrazem (w odwzorowaniu L) środka ciężkości zbioru E jest środek ciężkości zbioru $L(E)$ (obrazu zbioru E).

Zadanie 9.27* Udowodnić, że każda funkcja wypukła $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna prawie wszędzie (w sensie miary ℓ_k).

Zadanie 9.28 Niech $A = \{(x, y, z)\colon\ \ x^2 + y^2 + z^2 < x^{1/3}\}$, $p \in \mathbb{R}$. Obliczyć całkę
$$\iiint_A x^p\, dx\, dy\, dz.$$

Zadanie 9.29 Niech $A=\{(x,y,z)\colon \ \sqrt{x^2+y^2+z^2}<\sqrt[3]{z}\}$. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\iiint_A \frac{e^{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz}{n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}\,.$$

Zadanie 9.30 Niech $A=\{(x,y,z)\colon \ \sqrt{x^2+y^2+z^2}<\sqrt[3]{z}\}$. Obliczyć całkę
$$\iiiint_A \frac{t^2\,dt\,dx\,dy\,dz}{t^2+2x^2+3y^2+4z^2}\,.$$

Zadanie 9.31 Niech $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary ℓ_1. Określamy: $\varphi(y)=\int_y^{y+1}f(x)\,dx$. Udowodnić, że również funkcja φ jest całkowalna oraz że zachodzi równość $\int_R\varphi d\ell_1=\int_{\mathbb{R}}fd\ell_1$.

Zadanie 9.32* Dany jest zbiór mierzalny, ograniczony $W\subset\mathbb{R}^3$. Niech A, B, C będą rzutami W na płaszczyzny Oyz, Oxz, Oxy. Dowieść, że $\ell_3(W)\leqslant\sqrt{\ell_2(A)\ell_2(B)\ell_3(C)}$.

Zadanie 9.33 Obliczyć miarę zbioru
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x,y,z>0,\ xy<z,\ x^4+z^4<x^2z\}.$$

Zadanie 9.34 Niech $H=\{(x_1,\ldots,x_k)\,:\ x_k=0\}\subset\mathbb{R}^k$ będzie podprzestrzenią „równikową" (izomorficzną/izometryczną z $\mathbb{R}^{k-1}$). Niech C będzie stożkiem, którego podstawą jest zbiór $B\subset H$, ograniczony, mierzalny (ℓ_{k-1}), a wierzchołek leży w odległości h od H. W jakiej odległości od H leży środek ciężkości zbioru C?

Zadanie 9.35 Niech $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|^{-p}\big(1-\|\mathbf{x}\|\big)^{-q}$ dla $\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^k$. Dla jakich par liczb $p,q>0$ zachodzi nierówność $\int_{B(\mathbf{0},1)}f(\mathbf{x})d\ell_k<\infty$?

Zadanie 9.36 Niech $A\subset\mathbb{R}^3$ będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym, leżącym w półprzestrzeni $(x,y,z)\colon\ \ z>0$; niech $m=\ell_3(A)$; punkt (a,b,c) jest środkiem ciężkości zbioru A. Dane są liczby α, β $(0<\alpha<\beta)$. Dla $t>0$ niech $f(t)$ oznacza miarę (ℓ_3) części zbioru A zawartej pomiędzy płaszczyznami o równaniach $z=\alpha t$ i $z=\beta t$. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ (wyrazić ją przez wielkości dane).

Zadanie 9.37 Funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, klasy C^2, spełnia warunek $f''(x)>1/(1+x^2)$. Dowieść, że f nie ma asymptoty.

Zadanie 9.38 Niech f będzie ustaloną funkcją z $L^1(\mathbb{R}^k)$. Niech $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}-\mathbf{z})$ dla $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^k$. Udowodnić, że odwzorowanie $\mathbb{R}^k\to L^1(\mathbb{R}^k)$, które punktowi $\mathbf{z}$ przyporządkowuje funkcję $f_{\mathbf{z}}$, jest jednostajnie ciągłe.
Wskazówka. Niech $\varepsilon>0$. Wiadomo, że istnieje $\varphi\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ciągła, $\varphi(\mathbf{x})=0$ poza pewnym zbiorem zwartym K, $\|f-\varphi\|_1<\varepsilon$. Niech $\widetilde{K}\supset\operatorname{int}(\widetilde{K})\supset K$ będzie zbiorem zwartym. Dobieramy $\delta\in\big(0,\operatorname{dist}\big(K,\mathbb{R}^k\setminus\widetilde{K}\big)\big)$ tak, by $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\leqslant\delta\Rightarrow|\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{v})|\leqslant\varepsilon$. Rozpoczynamy szacowania: $\|f_{\mathbf{u}}-f_{\mathbf{v}}\|_1\leqslant\cdots$

Zadanie 9.39 Znaleźć środek ciężkości półkuli trój– i k–wymiarowej.

Zadanie 9.40 Niech $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$ będzie jednorodną kulą materialną (tzn. masa fragmentu kuli $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$ równa jest jego mierze Lebesgue'a). Wykazać, że kula przyciąga punkt materialny $\mathbf{q}$ tak, jak przyciąga $\mathbf{q}$ punkt materialny położony w odległości $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ od $\mathbf{q}$, w którym skupiona jest masa równa masie kuli.

Zadanie 9.41 Znaleźć moment bezwładności jednorodnego walca $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $|z| \leqslant h$ względem prostej $x = y = z$.

Zadanie 9.42 Znaleźć masę miseczki parabolicznej $2z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, której gęstość masy równa jest $\varrho(x, y, z) = z$.

Zadanie 9.43 Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$.

Zadanie 9.44 Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

Zadanie 9.45 Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Zadanie 9.46 Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geqslant r^2 > 0$.

Zadanie 9.47 Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3 + y^3 = 3xy$.

Zadanie 9.48 Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ i osiami układu współrzędnych.

Zadanie 9.49 Znaleźć objętość obszaru, ograniczonego powierzchniami
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ i } 4x = x^2 + y^2.$$

Zadanie 9.50 Znaleźć objętość obszaru ograniczonego dwiema powierzchniami
$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \text{ i } 9 = x^2 + y^2.$$

Zadanie 9.51 Znaleźć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $x^2-1 = z$ oraz $1 = x^2 + y^2$.

Zadanie 9.52 Znaleźć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $y^2 + z^2 = 9$, $4 = z^2 + y^2$, $x = 1$, $x = 2$.

Zadanie 9.53 Znaleźć objętość części wspólnej D dwóch nieskończonych walców o tym samym promieniu $r > 0$, których osie symetrii przecinają się po kątem prostym. Następnie znaleźć całkę $\int_D x d\ell_3$.

Zadanie 9.54 Znaleźć moment bezwładności torusa względem jego osi obrotu.