Funkcje mierzalne, całka z funkcji nieujemnej, twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki

Ostatnio poprawiłem 25 stycznia 2015 r.

Nadeszła pora na całkowanie. Pierwszą rzeczą jest zdefiniowanie funkcji, które będzie można całkować.

Definicja 8.1 (funkcji mierzalnej)
Niech X oznacza dowolny zbiór, będziemy go nazywać przestrzenią, a $\mathcal{F}$ przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów przestrzeni X. Funkcja $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ przeciwobraz półprostej $(a, \infty]$ jest mierzalny, czyli gdy $f^{-1}\big((a,\infty]\big) \in \mathcal{F}$. ■

Z definicji tej wynika, że funkcja mierzalna może przyjmować nieskończone wartości, nie tylko liczbowe. Tak po prostu będzie wygodniej.

Twierdzenie 8.2 (charakteryzujące funkcje mierzalne)
Niech $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Następujące warunki są równoważne

0° funkcja f jest mierzalna;

1° dla każdego $a \in \mathbb{R}$ przeciwobraz półprostej $[a, \infty]$ jest mierzalny:
$$\forall_{a\in\mathbb{R}} f^{-1}\big([a,\infty]\big) \in \mathcal{F};$$

2° dla każdego $a \in \mathbb{R}$ przeciwobraz półprostej $[-\infty, a)$ jest mierzalny:
$$\forall_{a\in\mathbb{R}} f^{-1}\big([-\infty,a)\big) \in \mathcal{F};$$

3° dla każdego $a \in \mathbb{R}$ przeciwobraz półprostej $[-\infty, a]$ jest mierzalny:
$$\forall_{a\in\mathbb{R}} f^{-1}\big([-\infty,a]\big) \in \mathcal{F}.$$

Dowód. 0° ⇒ 1° Mamy $[a,\infty] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, \infty]$. Z definicji σ–ciała wynika, że część wspólna przeliczalnej rodziny zbiorów mierzalnych jest zbiorem mierzalnym, więc implikacja jest konsekwencją równości:
$$f^{-1}\big([a,\infty]\big) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\tfrac{1}{n},\infty]\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big((a-\tfrac{1}{n},\infty]\big).$$
1° ⇒ 0° Tak jak poprzednio z tym, że teraz korzystamy z równości:
$$f^{-1}\big((a,\infty]\big) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\tfrac{1}{n},\infty]\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big([a+\tfrac{1}{n},\infty]\big).$$
W taki sam sposób dowodzimy równoważności warunków 2° i 3°. Warunek 3° jest równoważny mierzalności f, bo $f^{-1}\big([-\infty,a]\big) = X \setminus f^{-1}\big((a,\infty]\big)$. ■

Zauważmy też, że z mierzalności funkcji f wynika mierzalność zbiorów
$$f^{-1}(\infty) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,\infty]\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big((n,\infty]\big) \text{ oraz}$$
$$f^{-1}(-\infty) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\infty,-n)\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big([-\infty,-n)\big).$$

Wynika też mierzalność przeciwobrazu dowolnego przedziału, w tym zbioru jednopunktowego. Uzasadnienia są we wszystkich przypadkach praktycznie identyczne.
Zadanko 1. Wykazać, że jeśli $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna, to przeciwobraz dowolnego zbioru borelowskiego jest mierzalny. Wykazać, że w takiej sytuacji istnieją zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a, których przeciwobrazy nie są mierzalne! ■

Twierdzenie 8.3 (o najprostszych własnościach funkcji mierzalnych)
Załóżmy, że funkcje $f, g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne. Wtedy

M1 funkcje $-f$ i $-g$ są mierzalne;

M2 funkcja $|f|$ jest mierzalna;

M3 zbiory $\{x\colon\ \ f(x) > g(x)\}$, $\{x\colon\ \ f(x) = g(x)\}$, $\{x\colon\ \ f(x) \geq g(x)\}$ są mierzalne;

M4 funkcje $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ są mierzalne;

M5 funkcje $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$ są mierzalne;

M6 jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ – mierzalna, to $f \circ g$ jest mierzalna.

Dowód. Własność **M1** wynika z poprzedniego twierdzenia (punkt 2°) i tego, że $-f(x) > a \Longleftrightarrow f(x) < -a$.
Własność **M2** wynika z poprzedniego twierdzenia i tego, że
$$\{x\colon\ \ |f(x)| > a\} = \{x\colon\ \ f(x) > a\} \cup \{x\colon\ \ -f(x)) > a\}$$
i z tego, że suma zbiorów mierzalnych jest mierzalna.
Kolej na własność **M3**. Mamy
$$\{x\colon\ \ f(x) > g(x)\} = \bigcup_{w\in\mathbb{Q}} \Big(\{x\colon\ \ f(x) > w\} \cap \{x\colon\ \ w > g(x)\}\Big),$$
bo między każdymi dwiema liczbami rzeczywistymi znajduje się jakaś liczba wymierna. Ponieważ liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele, część wspólna dwóch zbiorów mierzalnych jest zbiorem mierzalnym, suma przeliczalnie wielu zbiorów mierzalnych jest zbiorem mierzalnym, funkcje f i g są mierzalne, więc zbiór po prawej stronie ostatniej równości jest mierzalny. Oznacza to, że zbiór $\{x\colon\ \ f(x) > g(x)\}$ też jest mierzalny. Mierzalne jest więc jego dopełnienie, czyli zbiór $\{x\colon\ \ f(x) \leq g(x)\}$. Zamieniając role funkcji f i g stwierdzamy mierzalność zbioru $\{x\colon\ \ f(x) \geq g(x)\}$. Wobec tego zbiór $\{x\colon\ \ f(x) = g(x)\} = \{x\colon\ \ f(x) \leq g(x)\} \cap \{x\colon\ \ f(x) \geq g(x)\}$ też jest mierzalny. Własność **M3** jest więc udowodniona.
Teraz wykażemy własność **M4**. Zbiór $\{x\colon f(x) + g(x) > a\} = \{x\colon f(x) > a - g(x)\}$ jest mierzalny na mocy **M3**, bo funkcje f i $a - g$ są mierzalne. Funkcja f^2 jest mierzalna, bo nierówność $f(x)^2 > a$ równoważna jest, w przypadku nieujemnej liczby a, nierówności $|f(x)| > \sqrt{a}$, więc mierzalność funkcji f^2 równoważna jest mierzalności funkcji $|f|$. Mamy też $fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$, zatem mierzalność iloczynu wynika z mierzalności kwadratu, sumy i różnicy funkcji mierzalnych. Z ilorazem kłopot jest niewielki: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, więc wystarczy wywnioskować mierzalność funkcji $\frac{1}{g}$ z mierzalności

funkcji g, ale to wynika z tego, że np. dla $a > 0$ nierówność $\frac{1}{g(x)} > a$ równoważna jest nierówności $0 < g(x) < \frac{1}{a}$.
Teraz własność **M5**. $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$, więc mierzalność funkcji $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ wynika z poprzednich własności i mierzalności obu funkcji f, g.
Wreszcie ostatnia własność. Przeciwobraz $f^{-1}\big((a,\infty]\big)$ półprostej $(a,\infty]$ jest zbiorem otwartym, więc jest sumą przeliczalnie wielu przedziałów otwartych, np. o końcach wymiernych (niekoniecznie parami rozłącznych). Ponieważ funkcja g jest mierzalna, więc przeciwobrazy przedziałów otwartych są mierzalne, a ponieważ rozważamy ich nie więcej niż przeliczalnie wiele, więc przeciwobraz $(f\circ g)^{-1}\big((a,\infty]\big) = =g^{-1}\Big(f^{-1}\big((a,\infty]\big)\Big)$ półprostej $(a,\infty]$ jest mierzalny. Mierzalność złożenia $f \circ g$ została wykazana. ■

Twierdzenie 8.4 (o mierzalności granic)
Załóżmy, że funkcje f_1, $f_2,\ldots$ są mierzalne. Wtedy mierzalne są też funkcje:
$\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (o ile istnieje).

Dowód. Z równości $\{x\colon \sup_n f_n(x) \le a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) \le a\}$ wynika mierzalność kresu górnego przeliczalnego zbioru funkcji mierzalnych. Z kolei z równości $\{x\colon \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) < a\}$ wynika mierzalność kresu dolnego przeliczalnego zbioru funkcji mierzalnych.
$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_n \big(\sup_m f_{n+m}(x)\big)$[1], zatem granica górna ciągu funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną. Ponieważ $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-f_n)$, więc również granica dolna ciągu funkcji mierzalnych jest mierzalna. Z dwóch ostatnich zdań wnioskujemy natychmiast, że jeśli ciąg funkcji mierzalnych jest zbieżny, to jego granica jest funkcją mierzalną (bo jest równa np. granicy dolnej: ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy granica dolna tego ciągu równa jest jego granicy górnej). ■
Informacja: osoby, które do dnia egzaminu ustnego nie zdążą sobie przypomnieć definicji granicy górnej, mogą być w jego trakcie poproszone o bezpośrednie wykazanie mierzalności granicy ciągu funkcji mierzalnych. Sugestia: spróbować samodzielnie przeprowadzić taki dowód przed egzaminem, najlepiej przed sesją, np. zmienić dowód przedstawiony w tym tekście.

Definicja 8.5 (funkcji prostej)
Funkcją prostą nazywać będziemy dowolną funkcję mierzalną $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, której zbiór wartości jest skończony. ■

Twierdzenie 8.6 (charakteryzujące funkcje proste)
Funkcja $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie zbiory mierzalne $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i takie liczby (ewentualnie nieskończoności) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $f = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\chi_{A_j}$,

[1] Jeśli ktoś nie pamięta definicji granicy górnej, to może przyjąć ten wzór za definicję.

gdzie χ_B jest funkcją charakterystyczną zbioru B, tzn. $\chi_B(x) = 1$ dla $x \in B$ oraz $\chi_B(x) = 0$ dla $x \notin B$.

Dowód. Jasne jest, że jeśli $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$, to liczba wartości przyjmowanych przez funkcję f nie może być większa niż 2^n. Z mierzalności zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wynika mierzalność funkcji f: przeciwobrazy półprostych to sumy części zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jeśli zbiorem wartości funkcji f jest $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, to przyjmując $A_j = f^{-1}(a_j)$ otrzymujemy zbiory mierzalne, w tym przypadku nawet parami rozłączne (wcześniej tak być nie musiało). Wzór $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ oczywiście zachodzi. ■

O zbiorach A_1, A_2,..., A_n zakładamy jedynie, że są mierzalne. Jeśli $X = \mathbb{R}^k$ i te zbiory są k–wymiarowymi przedziałami, to funkcję prostą $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ nazywamy *schodkową*. Termin ten jest używany, ale my go nie będziemy stosować zbyt często.

Twierdzenie 8.7 (o przybliżaniu funkcji mierzalnych funkcjami prostymi)
Jeśli $f\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ jest funkcją mierzalną, to istnieje niemalejący ciąg (f_n) nieujemnych funkcji prostych, skończonych zbieżny (punktowo) do funkcji f; jeśli funkcja f jest ograniczona, to istnieje niemalejący ciąg (f_n) nieujemnych funkcji prostych zbieżny jednostajnie do funkcji f.

Dowód. Niech $A_{m,n} = \{x\colon \quad \frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n}\}$ dla $m = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1$ oraz $A_{n2^n,n} = \{x\colon \quad n \leq f(x)\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Niech $f_n = \sum_{m=0}^{n2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}$. Z definicji wynika od razu, że $f_n \leq f$ na X. Mamy też $A_{2m,n+1} \cup A_{2m+1,n+1} = A_{m,n}$ dla $m = 0, 1, \ldots, n2^n - 1$ i $A_{n2^n,n} = A_{n2^{n+1},n+1} \cup A_{n2^{n+1}+1,n+1} \cup \cdots \cup A_{(n+1)2^{n+1},n+1}$. Stąd wynika, że $f_n \leq f_{n+1}$. Jasne jest również, że jeśli $f(x) < \infty$, to dla $n > f(x)$ zachodzi nierówność $f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + \frac{1}{2^n}$. Wynika stąd od razu punktowa zbieżność ciągu (f_n) do funkcji f. Wypada zwrócić uwagę na to, że jeśli $f(x) = \infty$, to dla każdego n zachodzi równość $f_n(x) = n$. Jeśli funkcja f jest ograniczona z góry przez M, to dla $n > M$ zachodzi nierówność $0 \leq f - f_n < \frac{1}{2^n}$, zatem w tym przypadku nasz ciąg jest zbieżny jednostajnie. ■

Definicja 8.8 (miary regularnej)
Miara μ określona na przeliczalnie addytywnym ciele podzbiorów przestrzeni topologicznej X zawierającym zbiory borelowskie nazywana jest miarą regularną wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i dla każdego zbioru mierzalnego A istnieją: zbiór domknięty $F \subseteq A$ i zbiór otwarty $G \supseteq A$ takie, że $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. ■

Miara Lebesgue'a jest, z naszego punktu widzenia, podstawowym przykładem miary regularnej — jest to bezpośredni wniosek z twierdzenia charakteryzującego zbiory mierzalne. Inne miary, którymi zajmiemy się w dalszej części tego wykładu, też będą regularne.

Twierdzenie 8.9 (Łuzina)
Jeśli miara μ określona na przestrzeni topologicznej X jest regularna, funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$

jest mierzalna, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór domknięty $F \subseteq X$, że funkcja $f_{|F}$ jest ciągła oraz $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$.
Przed podaniem dowodu wypada stwierdzić, że funkcja mierzalna może w ogóle punktu ciągłości nie mieć, np. $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Dowód. Niech $g = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \circ f$. Z tej definicji wynika, że funkcja g jest mierzalna (jako złożenie funkcji ciągłej z mierzalną), nieujemna i ograniczona, bo wartości funkcji arctg leżą w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, więc wartości funkcji g są liczbami z przedziału $(0, \pi)$. Istnieją więc funkcje proste g_n takie, że $g - \frac{1}{n} \leq g_n \leq g$ — wynika to z twierdzenia o przybliżaniu funkcji mierzalnych funkcjami prostymi. Niech $g_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} a_{n,i} \chi_{A_{n,i}}$ przy czym zbiory $A_{n,1}$, $A_{n,2}, \ldots$, A_{n,m_n} są mierzalne i parami rozłączne, ich sumą jest cała przestrzeń X. Wobec tego istnieją takie zbiory domknięte $F_{n,1}$, $F_{n,2}$, $\ldots$, F_{n,m_n}, że $\mu(A_{n,i} \setminus F_{n,i}) < \frac{\varepsilon}{m_n 2^n}$ oraz $A_{n,i} \supseteq F_{n,i}$.

Niech $F_n = \bigcup\limits_i F_{n,i}$. Zbiór F_n jest domknięty jako suma skończenie wielu zbiorów domkniętych. Oczywiście $\mu(X \setminus F_n) = \sum_i \mu(A_{n,i} \setminus F_{n,i}) < m_n \cdot \frac{\varepsilon}{m_n 2^n} = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Funkcja g_n po obcięciu do zbioru F_n staje się lokalnie stała, więc ciągła. Niech $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Mamy $X \setminus F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)$, zatem

$$\mu(X \setminus F) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Na zbiorze $F \subseteq F_n$ funkcja g_n jest ciągła. Ciąg (g_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji g, zatem funkcja g jest ciągła na zbiorze F. Ponieważ $f = \operatorname{tg}(g - \frac{\pi}{2})$, więc funkcja f też jest ciągła na zbiorze F. Dowód został zakończony. ■

Łuzin stwierdził, że funkcje mierzalne są w pewnym sensie bliskie funkcjom ciągłym. Należy jednak mieć na uwadze to, że funkcje całkowalne w sensie Riemanna są jeszcze bliższe ciągłym: w ich przypadku prawie każdy punkt przedziału jest punktem ciągłości, funkcja mierzalna punktów ciągłości może w ogóle nie mieć, pojawiają się dopiero po zmniejszeniu jej dziedziny.

Twierdzenie 8.10 (Frécheta)
Niech X będzie przestrzenią metryczną (ogólniej: topologiczną normalną), μ — regularną miarą borelowską na X, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ — funkcją mierzalną. Istnieje wtedy ciąg (f_n) funkcji ciągłych, określonych na przestrzeni X zbieżny prawie wszędzie do funkcji f (tzn. poza pewnym zbiorem miary 0 mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$)

Dowód. Niech F_n będzie zbiorem domkniętym, po obcięciu do którego funkcja f jest ciągła i ktory prawie wypełnia X : $\mu(X \setminus F_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Niech $\widetilde{f}_n = f_{|F_n}$. Ponieważ zbiór F_n jest domknięty, więc na mocy twierdzenia Tietze'go istnieje taka funkcja ciągła $f_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in F_n$ zachodzi równość $f_n(x) = \widetilde{f}_n(x)$. Zdefiniujmy $H_n = F_n \cap F_{n+1} \cap F_{n+2} \cap \ldots$ Zbiory H_1, $H_2, \ldots$ są domknięte, bo część wspólna dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Mamy też $H_n \subseteq H_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n oraz $\mu(X\setminus H_n)\le\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mu(X\setminus F_{n+i})<\frac{1}{2^n}$. Ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f na zbiorze $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$. Dowód został zakończony. ■

Umowa 8.11
Napis $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{p.w.}f$ oznacza, że *ciąg (f_n) jest zbieżny prawie wszędzie do funkcji f*. ■

Twierdzenie 8.12 (Jegorowa)
Załóżmy, że μ jest miarą określoną na przeliczalnie addytywnym ciele podzbiorów przestrzeni X oraz że $\mu(X)<\infty$. Niech $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{p.w.}f$. Wtedy dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje zbiór mierzalny F taki, że $\mu(X\setminus F)<\varepsilon$ i ciąg $(f_{n|F})$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f_{|F}$. Jeśli μ jest miarą regularną, to istnieje zbiór *domknięty* F o podanych własnościach.

Dowód. Niech $A_{m,n}=\{x\colon\ \exists_{j\ge n}|f_j(x)-f(x)|>\frac{1}{m}\}=\bigcup\limits_{j\ge n}\{x\colon\ |f_j(x)-f(x)|>\frac{1}{m}\}$. Zbiór $A_{m,n}$ jest mierzalny jako suma przeliczalnej rodziny zbiorów mierzalnych. Niech $A_m=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_{m,n}$. Ponieważ $A_{m,n}\supseteq A_{m,n+1}$, więc $\mu(A_{m,n})\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(A_m)$, przypominamy, że $\mu(X)<\infty$! Jeżeli $x\in A_m$, to dla nieskończenie wielu j zachodzi nierówność $|f_j(x)-f(x)|>\frac{1}{m}$, zatem ciąg $\big(f_n(x)\big)$ nie jest zbieżny do liczby $f(x)$. Wobec tego $\mu(A_m)=0$. Niech $\varepsilon>0$. Ponieważ $\mu(A_{m,n})\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(A_m)=0$, więc istnieje liczba $n(m)$ taka, że $\mu(A_{n(m),m})<\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. Niech $A=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_{m,n(m)}$. Z tej wynika od razu, że $\mu(A)<\varepsilon$. Jeśli $x\notin A$, to $x\notin A_{m,n(m)}$ dla dowolnego m, zatem dla każdej liczby $j>n(m)$ zachodzi nierówność $|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$. Wobec tego ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f na zbiorze $X\setminus A$. Jeśli miara μ jest regularna, to zbiór $X\setminus A$ zawiera taki podzbiór domknięty F, że $\mu\big((X\setminus A)\setminus F\big)<\varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Na tym kończymy przegląd prostych ale ważnych twierdzeń opisujących funkcje mierzalne i ich zbieżność. Możemy już przejść do definicji całek z funkcji mierzalnych nieujemnych.

Definicja 8.13 (rozbicia zbioru mierzalnego i sumy dolnej)
Jeżeli zbiór A jest mierzalny, to skończoną rodzinę $\mathcal{P}=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ **zbiorów mierzalnych** nazywamy rozbiciem (mierzalnym) zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy $A=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_n$ i $P_i\cap P_j=\emptyset$ dla $i\ne j$. Wielkość $s_-(f,\mathcal{P})=\sum\limits_{i=1}^{n}\inf f_{|P_i}\mu(P_i)$ nazywamy sumą dolną funkcji f ■

Definicja 8.14 (całki z nieujemnej funkcji mierzalnej)
Jeśli f jest nieujemną funkcją mierzalną określoną na zbiorze mierzalnym A, to wielkość

$$\int_A f\,d\mu=\sup\{s_-(f,\mathcal{P})\colon\quad \mathcal{P}\ \text{jest rozbiciem mierzalnym zbioru } A\}$$

nazywana jest całką (Lebesgue'a) z funkcji f względem miary μ na zbiorze A. ■

Podamy teraz kilka prawie oczywistych własności całki z funkcji nieujemnej. Zakładamy, że funkcja f jest określona na zbiorze, na którym ma być całkowana, że jest nieujemna i mierzalna.

Stwierdzenie 8.15
$\int_X c\chi_A d\mu = c\mu(A)$ dla dowolnej liczby $c \geq 0$.

Dowód. Niech $\mathcal{P} = \{A, X \setminus A\}$. Oczywiście $s_-(\chi_A, \mathcal{P}) = c\mu(A)$, więc zachodzi nierówność $\int_A \chi_A d\mu \geq c\mu(A)$. Niech $\mathcal{P}=\{P_i\}$ będzie dowolnym rozbiciem X. Wtedy

$$s_-(c\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_i \inf c\chi_{A|P_i}\mu(P_i) = \sum_{P_i \subseteq A} \inf c\chi_{A|P_i}\mu(P_i) = \sum_{P_i \subseteq A} c\mu(P_i) \leq c\mu(A)$$

zatem $\int_X \chi_A d\mu \leq c\mu(A)$. Dowód został zakończony. ■

Stwierdzenie 8.16
Jeśli $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$, zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są mierzalne i $\sum_i a_i\chi_{A_i} \leq f$, to zachodzi nierówność $\sum_i a_i\mu(A_i) \leq \int_X f d\mu$.

Dowód. Jeśli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to teza twierdzenia wynika od razu z definicji całki: $a_i \leq \inf f_{|A_i}$. Jeśli nie są parami rozłączne, to każdy z nich możemy przedstawić w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów postaci $A_{1,\sigma_1} \cap A_{2,\sigma_2} \cap \cdots \cap A_{n,\sigma_n}$, gdzie $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ i $A_{i,1} = A_i$ oraz $A_{i,-1} = X \setminus A_i$. Otrzymujemy w ten sposób nie więcej niż 2^n parami rozłącznych zbiorów $B_1, B_2, \ldots, B_m$ przy czym jasne jest, że $\sum_i a_i\chi_{A_i} = \sum_j b_j\chi_{B_j}$ gdzie b_j jest sumą tych a_i, dla których $\emptyset \neq B_j \subseteq A_i$ oraz $\sum_i a_i\mu(A_i) = \sum_j b_j\mu(B_j)$. ■

Wniosek 8.17 (z dowodu)
$\int_X \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}\right) d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\mu(A_i)$ dla dowolnych zbiorów mierzalnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. ■

Stwierdzenie 8.18
Jeśli $0 \leq f \leq g$ są funkcjami mierzalnymi na zbiorze mierzalnym A, to zachodzi nierówność $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.
To stwierdzenie wynika od razu ze stwierdzenia poprzedniego. ■

Stwierdzenie 8.19
Jeśli $A \subseteq B$, to $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

Dowód. Dowolne rozbicie zbioru A można uzupełnić zbiorem $B \setminus A$ do rozbicia zbioru B, odpowiednia suma dolna nie zmniejszy się — dojdzie do niej jeden nieujemny składnik. ■

Stwierdzenie 8.20
Jeśli $\int_X f d\mu = 0$, to $f = 0$ prawie wszędzie, czyli w całej przestrzeni X z wyjątkiem punktów pewnego zbioru miary 0.

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy $\mu(\{x\colon \quad f(x) > \frac{1}{k}\}) > 0$ dla pewnej liczby naturalnej $k \geq 1$, bo $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\colon \quad f(x) > \frac{1}{k}\} = \{x\colon \quad f(x) > 0\}$, a suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary 0 ma miarę 0. Niech $B = \{x\colon \quad f(x) > \frac{1}{k}\}$. Możemy, na podstawie już wykazanych stwierdzeń, napisać $\int_X f d\mu \geq \int \frac{1}{k}\chi_B = \frac{1}{k}\mu(B) > 0$, wbrew założeniu. ■

Stwierdzenie 8.21
Jeśli $\int_X f d\mu < \infty$, to $\mu(\{x\colon \quad f(x) = \infty\}) = 0$, czyli jeśli całka z funkcji nieujemnej jest skończona, to funkcja przyjmuje wartości skończone prawie wszędzie.

Dowód. $\int_X f d\mu \geq \infty \cdot \mu(\{x\colon \quad f(x) = \infty\})$. ■

Twierdzenie 8.22 (o mierze z gęstością)
Jeśli funkcja $f\colon X \longrightarrow [0,\infty]$ jest mierzalna i $\nu(A) = \int_A f d\mu$ dla każdego zbioru mierzalnego A, to ν jest miarą na tym samym σ–ciele podzbiorów przestrzeni X.

Dowód. $\nu(\emptyset) = 0$ (a nawet jeśli $\mu(A) = 0$, to $\nu(A) = 0$). Wykażemy przeliczalną addytywność funkcji ν. Załóżmy, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Udowodnimy równość $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$, czyli $\int_{\cup A_n} f d\mu = \sum \int_{A_n} f d\mu$. Jeśli którakolwiek całka po prawej stronie równości jest nieskończona, to również całka po lewej stronie jest nieskończona, bo całka po większym zbiorze $(\cup A_n)$ nie może być mniejsza niż całka po mniejszym zbiorze (A_n), więc zachodzi równość.

Dalej zakładamy, że wszystkie całki po prawej stronie równości są skończone. Jeśli $\varepsilon > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to istnieją takie rozbicia $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ zbiorów A_1, $A_2, \ldots, A_n$, że zachodzą nierówności $s_{\_}(f,\mathcal{P}_i) > \int_{A_i} f d\mu - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Niech $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_n \cup \Big\{ \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i \Big\}$.
Wtedy zachodzi nierówność

$$\int_X f d\mu \geq s_{\_}(f,\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{n} s_{\_}(f,\mathcal{P}_i) > \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f d\mu - \varepsilon.$$

Ponieważ ta nierówność ma miejsce dla każdego $\varepsilon > 0$, więc $\int_{\cup A_n} f d\mu \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{A_i} f d\mu$ i wobec tego $\int_{\cup A_n} f d\mu \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$. Udowodnimy nierówność przeciwną.

Niech $M < \int_{\cup A_n} f d\mu$ będzie dowolną liczbą, $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ takim rozbiciem zbioru $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, że $M < s_{\_}(f,\mathcal{P})$. Wtedy $\mathcal{P}_n = \{P_1 \cap A_n, P_2 \cap A_n, \ldots, P_m \cap A_n\}$ jest rozbiciem zbioru A_n i możemy napisać

$$M < s_{\_}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \inf f_{|P_i} \mu(P_i) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\inf f_{|P_i} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_i \cap A_n) \Big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{m} \inf f_{|P_i} \mu(P_i \cap A_n) \Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{m} \inf f_{|P_i \cap A_n} \mu(P_i \cap A_n) \Big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} s_{\_}(f,\mathcal{P}_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

M jest dowolną liczbą mniejszą od $\int_{\cup A_n} f d\mu$, więc $\int_{\cup A_n} f d\mu \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$. ■

Zajmiemy się teraz jednym z najważniejszych twierdzeń wykładu, pierwszym z tych, które pozwalają na zastępowanie granicy ciągu całek całką z granicy ciągu. Twierdzenia te są bardzo ważne, mają liczne zastosowania i prostsze sformułowania dla całki Lebesgue'a niż dla całki Riemanna.

Twierdzenie 8.23 (Lebesgue'a–Levi'ego o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki)
Jeśli funkcje f_1, f_2,... są mierzalne i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, to dla każdego zbioru mierzalnego A

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) d\mu\,.$$

Dowód. W całym dowodzie przyjmujemy, że $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Z tego, że $f \geq f_n$ dla każdej liczby naturalnej n wynika, że $\int_X f d\mu \geq \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Udowodnimy nierówność przeciwną. Przyjmijmy, że $X_0 = \{x\colon \ \ f(x) = 0\}$, $X_+ = \{x\colon \ \ 0 < f(x) < \infty\}$ i $X_\infty = \{x\colon \ \ f(x) = \infty\}$. Zbiory X_0, X_+ i X_∞ są mierzalne i rozłączne. Mamy też $X = X_0 \cup X_+ \cup X_\infty$.

Jeśli $x \in X_0$, to dla każdego n mamy $0 \leq f_n(x) \leq f(x) = 0$, więc $f_n(x) = 0$. Wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_0} f_n d\mu = 0 = \int_{X_0} f d\mu$.

Niech $x \in X_+$ i niech $0 < c < 1$. Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ definiujemy zbiór $A_n = \{x\colon \ \ f_n(x) \geq cf(x)\}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) > cf(x)$, więc dla każdego x istnieje n_x takie, że $x \in A_n$ dla $n > n_x$. Wobec tego $\bigcup A_n = X_+$. Ponieważ $f_{n+1} \geq f_n$, więc $A_{n+1} \supseteq A_n$. Dla każdej liczby naturalnej m mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_+} f_n d\mu \geq \int_{X_+} f_m d\mu \geq \int_{A_m} f_m d\mu \geq c\int_{A_m} f d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} c\int_{X_+} f d\mu$$

— ostatnie przejście graniczne można usprawiedliwić twierdzeniami o mierze z gęstością i twierdzeniem o mierze sumy wstępującego ciągu zbiorów. Ponieważ nierówność ma miejsce dla każdej liczby $c \in (0,1)$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_+} f_n d\mu \geq \int_{X_+} f d\mu$.

Jeśli $\mu(X_\infty) = 0$, to $\int_{X_\infty} f_n d\mu = 0$ dla każdej liczby naturalnej n i $\int_{X_\infty} f d\mu = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_\infty} f_n d\mu = \int_{X_\infty} f d\mu$.

Załóżmy, że $\mu(X_\infty) > 0$. Niech $M > 0$. Niech $B_n = \{x \in X_\infty\colon \ \ f_n(x) > M\}$. Jasne jest, że $B_{n+1} \supseteq B_n$ i $\bigcup B_n = X_\infty$. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_\infty} f_n d\mu \geq \int_{X_\infty} f_m d\mu \geq \int_{B_m} f_m d\mu \geq \int_{B_m} M d\mu = M\mu(B_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} M\mu(X_\infty).$$

Ponieważ nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_\infty} f_n d\mu \geq M\mu(X_\infty)$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $M > 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_\infty} f_n d\mu = \infty$. Teza wynika teraz od razu z równości $\int_X f_n d\mu = \int_{X_0} f_n d\mu + \int_{X_+} f_n d\mu + \int_{X_\infty} f_n d\mu$. ■

Twierdzenie 8.24 (o liniowości całki)

1° $\int_A (cf) d\mu = c\int_A f d\mu$ dla każdego $c \in [0,\infty)$ i dowolnej funkcji mierzalnej $f \geq 0$;

2° $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$ dla dowolnych funkcji mierzalnych $f, g \geq 0$.

Dowód. Punkt 1° wynika od razu z definicji całki. Zajmiemy się punktem 2°. Niech (f_n) będzie niemalejącym ciągiem funkcji prostych zbieżnym do funkcji f, (g_n) — niemalejącym ciągiem funkcji prostych zbieżnym do funkcji g. Przyjmijmy, że

$f_n = \sum_i a_{n,i}\chi_{A_{n,i}}$, $g_n = \sum_j b_{n,j}\chi_{B_{n,j}}$ i że dla każdego n zbiory $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,m_n}$ oraz zbiory $B_{n,1}, B_{n,2}, \ldots, B_{n,\overline{m}_n}$ są parami rozłączne. Prawdziwe są wzory $\int\Big(\sum_i a_{n,i}\chi_{A_i}\Big)d\mu = \sum_i a_{n,i}\mu(A_{n,i})$ oraz $\int\Big(\sum_j b_{n,j}\chi_{B_{n,j}}\Big)d\mu = \sum_j b_{n,j}\mu(B_{n,j})$. Mamy też $f_n + g_n = \sum_{i,j}(a_{n,i}+b_{n,j})\chi_{A_{n,i}\cap B_{n,j}}$, zatem

$$\int(f_n+g_n)d\mu = \sum_{i,j}(a_{n,i}+b_{n,j})\mu(A_{n,i}\cap B_{n,j}) = \sum_{i,j} a_{n,i}\mu(A_{n,i}\cap B_{n,j}) + \\ + \sum_{i,j} b_{n,j}\mu(A_{n,i}\cap B_{n,j}) = \sum_i a_{n,i}\mu(A_{n,i}) + \sum_j b_{n,j}\mu(B_{n,j}) = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu.$$

Innymi słowy: *dowodzony wzór zachodzi w przypadku funkcji prostych.* Z twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki wynika, że zachodzi wobec tego dla wszystkich funkcji nieujemnych:

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_n+g_n)d\mu = \int(f+g)d\mu.$$

Dowód został zakończony. ■

Lemat 8.25 (Fatou)
Dla dowolnych funkcji mierzalnych nieujemnych f_1, f_2,... zachodzi nierówność:

$$\left(\int \liminf f_n\right)d\mu \le \liminf \int f_n d\mu.$$

Dowód. Mamy $\liminf_n f_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\inf_k f_{n+k})$. Niech $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$, zatem zachodzi równość $\liminf_n f_n = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Również $g_n \le g_{n+1}$, więc

$$\int(\liminf_n f_n)d\mu = \int\Big(\lim_{n\to\infty}(\inf_k f_{n+k})\Big) = \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu,$$

ostatnia nierówność wynika z nierówności $g_n \le f_n$. ■

Drugie z trzech najważniejszych twierdzeń o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki zostało udowodnione.

Twierdzenie 8.26 (o całkowaniu względem miary z gęstością)
Niech $f\colon X \longrightarrow [0,\infty]$ będzie funkcją mierzalną. Niech $\nu(A) = \int_A f d\mu$ dla każdego zbioru mierzalnego A. Dla każdej funkcji mierzalnej $g\colon X \longrightarrow [0,\infty]$ zachodzi równość $\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu$.

Dowód. Niech $g = \chi_A$. Wtedy

$$\int_X g d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X \chi_A f d\mu = \int_X g f d\mu,$$

co oznacza, że w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe. Jeśli dowodzona równość jest spełniona dla nieujemnych funkcji mierzalnych g_1, g_2, to jest również spełniona dla dowolnej ich kombinacji liniowej $c_1g_1 + c_2g_2$ przy założeniu, że $c_1, c_2 \ge 0$. Wobec tego jest spełniona dla dowolnej nieujemnej funkcji prostej. Jeśli jest spełniona dla każdej funkcji $g_1, g_2, \ldots$ i $g_1 \le g_2 \le g_2 \le \ldots$, to na mocy twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki jest spełniona dla funkcji granicznej $\lim\limits_{n\to\infty} g_n$, bo $g_1 f \le g_2 f \le g_2 f \le \ldots$. Ponieważ każda nieujemna funkcja mierzalna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych, więc $\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu$ dla dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej g. ■

Ten dowód był bardzo prosty, ale ważny jest jego schemat: wielokrotnie będziemy sprawdzać, że jakiś wzór zachodzi dla funkcji charakterystycznych, potem dla prostych i wreszcie dla wszystkich, w tym ostatnim kroku głównym narzędziem jest twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Samo twierdzenie będzie często wykorzystywane na rachunku prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 8.27 (o podstawianiu)
Załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest przeliczalnie addytywnym ciałem podzbiorów przestrzeni X, a $\mathcal{G}$ — przeliczalnie addytywnym ciałem podzbiorów przestrzeni Y. Niech $F\colon X \longrightarrow Y$ będzie przekształceniem takim, że przeciwobraz dowolnego zbioru mierzalnego B jest mierzalny (czyli $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, jeśli $B \in \mathcal{G}$). Załóżmy, że μ jest miarą określoną na $\mathcal{F}$ a ν – miarą określoną na $\mathcal{G}$ oraz że $\nu = F^*\mu$, tzn. $\nu(B) = \mu(F^{-1}(B))$ dla każdego $B \in \mathcal{G}$. Niech $g\colon Y \longrightarrow [0,\infty]$ będzie funkcją mierzalną. Wtedy zachodzi równość $\int_Y g d\nu = \int_X g \circ F d\mu$.

Dowód. Wzór zachodzi, jeśli $g = \chi_B$ dla $B \in \mathcal{G}$ – wynika to natychmiast z założenia o miarach ν i μ. Jasne jest, że jeśli funkcje g_1 i g_2 są mierzalne i nieujemne oraz $c_1, c_2 \geq 0$, to z równości $\int_Y g_1 d\nu = \int_X g_1 \circ F d\mu$, $\int_Y g_2 d\nu = \int_X g_2 \circ F d\mu$ wynika równość $\int_Y (c_1g_1 + c_2g_2) d\nu = \int_X (c_1g_1 + c_2g_2) \circ F d\mu$, zatem dowodzona równość zachodzi dla wszystkich funkcji prostych. Każda funkcja mierzalna nieujemna g jest granicą niemalejącego ciągu (g_n) funkcji prostych. Stąd i z twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki wynika, że

$$\int_Y g d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_Y g_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \circ F d\mu = \int_X g \circ F d\mu. \blacksquare$$

Twierdzenie 8.28 (o ciągłości całki)
Jeśli $\int_X f d\mu < \infty$, $f \geq 0$ jest funkcją mierzalną, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $\mu(A) < \delta$, to $\int_A f d\mu < \varepsilon$.

Dowód. Niech $A_n = \{x\colon \ n \leq f(x) < n+1\}$, $A_\infty = \{x\colon \ f(x) = \infty\}$. Ponieważ $\int_X f d\mu < \infty$, więc $\mu(A_\infty) = 0$. Wobec tego $\int_X f d\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$. Istnieje taka liczba $m \in \mathbb{N}$, że $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $C_m = X \setminus \Big(\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} A_n \Big)$. Jeśli $x \in C_m$, to $0 \leq f(x) \leq m$. Stąd wynika, że jeśli $\mu(A) < \delta := \frac{\varepsilon}{2m}$, to

$$\int_A f d\mu = \int_{A\cap C_m} f d\mu + \int_{(X\setminus C_m)\cap A} f d\mu \leq m\mu(C_m \cap A) + \int_{(A_m \cup A_{m+1} \cup \ldots)} f d\mu \leq$$
$$\leq m\mu(A) + \sum_{n=m}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dowód został zakończony. $\blacksquare$

Kilka zadań

Zadanie 8.1 Dowieść, że jeśli $F\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ spełnia warunek Lipschitza i $\ell_k(A) = 0$, to $\ell_k(F(A)) = 0$.

Zadanie 8.2* Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją mierzalną, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Wykazać, że f jest funkcją liniową.

Zadanie 8.3 Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \tfrac{(\sin x + \cos x)^n}{1+(\sin x+\cos x)^{2n}} e^{-x}\, dx$

Zadanie 8.4 Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją klasy C^1 i niech $Df(x)$ będzie monomorfizmem dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że $l_2\big(f(\mathbb{R})\big) = 0$.

Zadanie 8.5 Niech $F\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 zbioru G otwartego w $\mathbb{R}^{k+l}$, dla którego punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l$ jest wartością regularną, $l \geq 1$.
Wykazać, że dla każdego $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l$ zachodzi równość $l_{k+l}\big(F^{-1}(\mathbf{q})\big) = 0$.
Podać przykład świadczący o tym, że przeciwobraz wartości krytycznej może mieć miarę dodatnią.

Zadanie 8.6 Podać przykład ciągu (f_n) mierzalnych funkcji nieujemnych, dla których nierówność w lemacie Fatou jest ostra.

Zadanie 8.7 Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \ln(1+\frac{x}{n})}$.

Zadanie 8.8 Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \frac{dx}{n + n^2 \sin\frac{x}{n^2}}$.