Miara zewnętrzna, miara, miara Lebesgue'a

Ostatnio poprawiłem 14 luteg 2015 r. dziękuję p. Dorocie B. za wskazówkę

Nie jest jasne, ile błędów jeszcze zostawiłem Państwu do wykrycia. Proszę w każdym razie o informacje o nich. Poprawię!

Jeśli ktoś czegoś nie zrozumie, to również proszę o kontakt, przyczyną może być błąd w tekście.

Zajmiemy się teraz miarą. Chodzi o to, że w przypadku funkcji wielu zmiennych często istnieje potrzeba rozważania funkcji określonych na dosyć skomplikowanych zbiorach i trzeba umieć określać wielkość tych zbiorów. Chcemy więc uogólnić pojęcie długości, pola i objętości. Okaże się też, że również prawdopodobieństwo jest miarą. W następnym semestrze przekonamy się, że pola i długości rozmaitości dwu– i jednowymiarowych w przestrzeni trójwymiarowej lub więcejwymiarowej to też miary. Poza podaniem możliwie ogólnej definicji miary jest też problem przechodzenia do granicy pod znakiem całki. Teoria, którą przedstawimy jest z tego punktu widzenia o wiele wygodniejsza od całki Riemanna. Twierdzenia będą mieć proste dowody i będzie można je łatwo stosować.

Jakieś koszta trzeba jednak ponieść. Jesteśmy zmuszeni do ustalenia dla jakich zbiorów możemy określać miarę. Miara powinna być nieujemna, zbiór ograniczony powinien mieć skończoną miarę. Miara sumy zbiorów rozłącznych powinna być równa sumie ich miar. Ten ostatni warunek powinien być spełniony również w przypadku przeliczalnej rodziny zbiorów parami rozłącznych, to podstawa przechodzenia do granicy (np. pole koła traktować można jako granicę ciągu wielokątów foremnych wpisanych w to koło, to samo dotyczy pola ograniczonego łukiem paraboli i jej cięciwą, objętości kuli, pola powierzchni kuli itp.). Przejścia graniczne konieczne są nawet w bardzo prostych sytuacjach. Na początku XX w. Dehn rozwiązał trzeci problem Hilberta i okazało się, że sześcianu nie można „pokroić na kawałki", z których da się złożyć czworościan foremny. Wiadomo było, że np. kwadrat o polu jeden można pociąć na kawałki, z których da się ułożyć trójkąt o polu jeden (dla różnych trójkątów trzeba ciąć na różne kawałki, ale można to zawsze zrobić). Wynika stąd, że do określenia pola wielokąta na płaszczyźnie przejścia graniczne są zbędne, natomiast w przypadku wielościanu (nawet foremnego) są konieczne.

Załóżmy teraz, że udało się nam określić miarę na wszystkich podzbiorach prostej, czyli funkcję $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \longrightarrow [0,\infty]$ w taki sposób, że

1° jeśli $A_n \subseteq \mathbb{R}$ dla $n = 1,2,\ldots$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$,

2° $\mu(A) < \infty$ dla każdego zbioru ograniczonego $A \subseteq \mathbb{R}$,

3° $\mu([a,b]) > 0$ dla dowolnego przedziału $[a,b]$, gdy $a < b$, czyli gdy przedział nie jest zdegenerowany,

4° jeśli zbiór D jest obrazem zbioru C w pewnym przesunięciu, to $\mu(D) = \mu(C)$.

Wykażemy za Giuseppe Vitalim, że nasze założenie prowadzi do sprzeczności. Używać będziemy w tym dowodzie pewnika wyboru i od razu należy powiedzieć, że wiadomo, że bez pewnika wyboru konstrukcja ta nie jest możliwa (ale tymi kwestiami zajmować się nie będziemy).

Powiemy, że $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in \mathbb{Q}$.
Relacja $\sim$ jest równoważnością, bowiem:

$x \sim x$, gdyż $0 \in \mathbb{Q}$ (więc jest zwrotna);
$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$, gdyż $w \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow -w \in \mathbb{Q}$ (więc jest symetryczna),
oraz $x \sim y$ i $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, gdyż $w_1, w_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathbb{Q}$ (więc jest przechodnia). Klasę abstrakcji liczby x oznaczymy jak zwykle przez $[x]$. Jeśli $w \in \mathbb{Q}$, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $[x] = [x + w]$. Wynika stąd, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $y \in [0, 1]$ taka, że $[x] = [y]$, inaczej mówiąc każda klasa abstrakcji ma reprezentanta w przedziale $[0, 1]$. Niech $V \subset [0, 1]$ będzie zbiorem, który ma z każdą klasą abstrakcji dokładnie jeden element wspólny. Zbiór taki istnieje dzięki pewnikowi wyboru. Niech $V_t = \{v + t\colon \quad v \in V\}$, czyli V_t oznacza zbiór V przesunięty o t. Zauważmy, że

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} V_t \subset [-1, 2]\,. \tag{vit}$$

Zauważmy również, że jeśli $t \neq s$ są liczbami wymiernymi, to $V_t \cap V_s = \emptyset$: jeśli $a \in V_t \cap V_s$, to istnieją liczby $u, v \in V$ takie, że $u + s = v + t$ czyli $u - v = t - s \in \mathbb{Q}$, ale to oznacza, że $u \sim v$, a ponieważ V ma z każdą klasą abstrakcji relacji $\sim$ dokładnie jeden element, więc $u = v$ i wobec tego $t = s$, wbrew założeniu. Ze względu na warunek 4° mamy $\mu(V_t) = \mu(V)$ dla każdej liczby t. Wobec tego z warunku 1° wynika, że

$$\mu([0, 1]) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} V_t\Big) \leqslant \mu([-1, 2]) \text{ oraz } \mu\Big(\bigcup_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} V_t\Big) = \sum_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(V_t)$$

i wobec tego $0 < \mu([0, 1]) \leqslant \sum_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(V_t) \leqslant \mu([-1, 2]) < \infty$. Nie jest to możliwe, bo z lewej nierówności wynika oczywiście, że $0 < \mu(V_t) = \mu(V)$ i wobec tego $\sum_{t \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(V_t) = \infty$, co przeczy prawej nierówności, bo $\mu([-1, 2]) < \infty$.

Z wykazanego twierdzenia Vitaliego wynika, że jeśli mamy ochotę określić miarę tak, by spełnione były jednocześnie warunki $1° - 4°$, to musimy koniecznie ograniczyć dziedzinę tej funkcji: nie możemy określać jej dla wszystkich zbiorów. Z drugiej strony chcemy, by dziedzina miary była możliwie duża.

Zdefiniujemy teraz ciała i przeliczalnie addytywne ciała zbiorów.

Definicja 7.1 (ciała i przeliczalnie addytywnego ciała (σ–ciała) zbiorów) Rodzina $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ podzbiorów przestrzeni $\mathbb{X}$ nazywana jest ciałem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie warunki:
1° $\emptyset \in \mathcal{F}$, 2° $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{X} \setminus A \in \mathcal{F}$, 3° $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.
Jeśli dodatkowo spełniony jest czwarty warunek:
4° Dla dowolnych $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,
rodzinę $\mathcal{F}$ nazywamy przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów. ■

Przykład 7.2 Rodzina $2^{\mathbb{X}}$ jest przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów. ■

Przykład 7.3 Rodzina złożona ze wszystkich podzbiorów skończonych przestrzeni $\mathbb{X}$ i ich uzupełnień jest ciałem zbiorów, które nie jest ciałem przeliczalnie addytywnym, jeśli $\mathbb{X}$ ma nieskończenie wiele elementów. ■

Przykład 7.4 Rodzina złożona ze wszystkich podzbiorów przeliczalnych i skończonych przestrzeni $\mathbb{X}$ oraz ich uzupełnień jest ciałem przeliczalnie addytywnym. ■

Przykład 7.5 Jeśli $\mathbb{F} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ jest rodziną zbiorów, to część wspólna wszystkich ciał zbiorów zawierających rodzinę $\mathbb{F}$ jest ciałem zbiorów – wynika to od razu z definicji ciała zbiorów. To samo jest prawdą w przypadku ciał przeliczalnie addytywnych. ■

Przykład 7.6 Jeśli $\mathbb{X}$ jest przestrzenią topologiczną (np. metryczną), to najmniejsze przeliczalnie addytywne ciało zbiorów zawierające wszystkie zbiory otwarte jest oznaczana symbolem $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ i nazywana rodziną zbiorów borelowskich (E.Borel był francuskim matematykiem, jednym z głównych twórców teorii miary). Mówiąc o najmniejszym przeliczalnie addytywnym ciele myślimy o części wspólnej wszystkich przeliczalnie addytywnych ciał zawierających wszystkie zbiory otwarte. ■

Definicja 7.7 (miary zewnętrznej)
Miarą zewnętrzną nazywamy dowolna funkcję $\mu^*\colon 2^{\mathbb{X}} \longrightarrow [0,\infty]$, która spełnia następujące trzy warunki:
1° $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2° $A \subseteq B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$,
3° $\mu^*\big(\bigcup A_n\big) \leqslant \sum \mu^*(A_n)$ dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{X}$. ■

Definicja 7.8 (miary przeliczalnie addytywnej)
Niech $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ będzie przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów. Miarą (na $\mathcal{F}$) nazywamy dowolna funkcję $\mu\colon \mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$, która spełnia następujące warunki:
1° $\mu(\emptyset) = 0$,
2° jeśli $A_j \in \mathcal{F}$ dla $j = 1,2,3,\ldots$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, czyli gdy zbiory $A_1, A_2, \ldots$ są parami rozłączne, to $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. ■

Czasem warunek 2° zastępowany jest słabszym: żądamy by był równość zachodziłą jedynie w przypadku rodzin skończonych. W takich sytuacjach mówimy o skończenie addytywnej mierze dla odróżnienia od miary, która ma być przeliczalnie addytywna.

Przykład 7.9 Niech $\mu(A)$ oznacza liczbę elementów zbioru A, jeśli A jest zbiorem skończonym. W przypadku zbioru nieskończonego przyjmujemy $\mu(A) = \infty$. Jest jasne, że tak zdefiniowana funkcja jest miarą. Nazywana jest miarą liczącą na przeliczalnie addytywnym ciele wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru $\mathbb{X}$. ■

Twierdzenie 7.10 (o monotoniczności miary)
Jeśli μ jest miarą $A, B \in \mathcal{F}$ oraz $A \subseteq B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
Dowód. Przyjmujemy $A_1 = A$, $A_2 = B \setminus A$, $A_n = \emptyset$ dla $n = 3,4,\ldots$ i korzystamy z równości:

$$\mu(B) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \cdots =$$
$$= \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu\,(\emptyset) + \mu\,(\emptyset) + \cdots \geq \mu(A). \ ■$$

Twierdzenie 7.11 (o przeliczalnej podaddytywności miary)
Jeśli $A_n \in \mathcal{F}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Dowód. Niech $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ dla $n = 2, 3, \ldots$ i niech $B_1 = A_1$. Dla każdego n zachodzi równość $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Zbiory $B_1, B_2, \ldots$ są parami rozłączne, więc

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

na mocy twierdzenia o monotoniczności miary. ■

Twierdzenie 7.12 (o mierze sumy wstępującego ciągu zbiorów)
Jeśli $A_n \in \mathcal{F}$ i $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Dowód. Niech $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ dla $n = 2, 3, \ldots$ i niech $B_1 = A_1$. Zachodzi równość $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$. Zbiory $B_1, B_2, \ldots$ są parami rozłączne, zatem

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_1) + \mu(B_2) + \cdots + \mu(B_n)\big) =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. ■

Twierdzenie 7.13 (o mierze części wspólnej zstępującego ciągu zbiorów)
Jeśli $A_n \in \mathcal{F}$ i $A_n \supseteq A_{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i $\mu(A_{n_0}) < \infty$ dla pewnego n_0, to zachodzi równość $\mu\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Dowód. Niech $A_\infty = \Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \Big(\bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} A_n\Big)$, $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$. Zachodzą następujące inkluzje $\emptyset = B_{n_0} \subseteq B_{n_0+1} \subseteq \ldots$ i równość $A_{n_0} \setminus A_\infty = B_{n_0} \cup B_{n_0+1} \cup \ldots$, więc $\mu(A_{n_0} \setminus A_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$. Dla $n \geq n_0$ mamy $\mu(A_{n_0}) = \mu(A_\infty) + \mu(A_{n_0} \setminus A_\infty)$ oraz $\mu(A_{n_0}) = \mu(A_n) + \mu(A_{n_0} \setminus A_n)$ i wobec tego

$$\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n) = \mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n\Big) = \mu(A_{n_0} \setminus A_\infty) =$$
$$= \mu(A_{n_0}) - \mu(A_\infty),$$

zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A_\infty)$. ■

Zajmiemy się teraz ważnym twierdzeniem pozwalającym ograniczyć dziedzinę miary zewnętrznej tak, by na mniejszej dziedzinie (przeliczalnie addytywnym ciele zbiorów) miara zewnętrzna stała się miarą. Zaczniemy od definicji.

Definicja 7.14 (warunku Carathéodory'ego)
Zbiór A spełnia warunek Carathéodory'go wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $Z \subseteq \mathbb{X}$ zachodzi równość

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A). \qquad \text{(car)}$$

Mówimy wtedy, że zbiór A jest mierzalny w sensie Carathéodory'ego lub μ^*–mierzalny. Rodzinę zbiorów μ^*–mierzalnych oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{F}(\mu^*)$. ■

Twierdzenie 7.15 (Carathéodory'ego)
Zbiory mierzalne w sensie Carathéodory'ego tworzą przeliczalnie addytywne ciało zbiorów. μ^* jest miarą na tym σ–ciele.

Przed podaniem dowodu zauważmy, że nierówność $\mu^*(Z) \leqslant \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$ jest prawdziwa zawsze, bo $Z = (Z \cap A) \cup (Z \setminus A)$. Wobec tego dowodząc, że dla jakiegoś zbioru A spełniony jest warunek Carathéodory'ego, będziemy wykazywać, że $\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$.

Dowód. Mamy $\mu^*(Z \cap \emptyset) + \mu^*(Z \setminus \emptyset) = 0 + \mu^*(Z) = \mu^*(Z)$, a to oznacza, że zbiór pusty jest mierzalny w sensie Carathéodory'ego.

Jeśli $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$, to

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A) = \mu^*(Z \setminus A) + \mu^*(Z \cap A) = \\ = \mu^*\big(Z \cap (\mathbb{X} \setminus A)\big) + \mu^*(Z \setminus (\mathbb{X} \setminus A)).$$

Dowodzi to, że jeśli zbiór A jest mierzalny w sensie Carathéodory'ego, to również jego dopełnienie $\mathbb{X} \setminus A$ jest mierzalne w sensie Carathéodory'ego.

Teraz wykażemy, że suma $A \cup B$ dwóch zbiorów A i B mierzalnych w sensie Carathéodory'ego jest mierzalna w sensie Carathéodory'ego. Mamy

$$\mu^*(Z) \leqslant \mu^*\big((A \cup B) \cap Z\big) + \mu^*\big(Z \setminus (A \cup B)\big) \leqslant \\ \leqslant \mu^*(A \cap Z) + \mu^*\big(B \cap (Z \setminus A)\big) + \mu^*\big((Z \setminus A) \setminus B\big) \overset{(car)}{\underset{B}{=\!=}} \\ = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(Z \setminus A) \overset{(car)}{\underset{A}{=\!=}} = \mu^*(Z).$$

Załóżmy teraz, że $A, B \in \mathcal{F}(\mu^*)$ są zbiorami rozłącznymi. Dla dowolnego zbioru Z zachodzi równość

$$\mu^*\big(Z \cap (A \cup B)\big) \overset{(car)}{\underset{A}{=\!=}} \mu^*\big(Z \cap (A \cup B) \cap A\big) + \mu^*\big(Z \cap (A \cup B) \setminus A\big) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*\big(Z \cap B\big).$$

W szczególności miara zewnętrzna μ^* jest skończenie addytywna na $\mathcal{F}(\mu^*)$ (miara sumy dwóch rozłącznych zbiorów z $\mathcal{F}(\mu^*)$ to suma ich miar).

Ponieważ suma dwóch zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego jest mierzalna w sensie Carathéodory'ego, więc również suma dowolnej skończonej liczby zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego ma tę własność — łatwa indukcja. Jeżeli $A, B \in \mathcal{F}(\mu^*)$, to również

$$A \setminus B = A \cap (\mathbb{X} \setminus B) = \mathbb{X} \setminus \big((\mathbb{X} \setminus A) \cup B\big) \in \mathcal{F}(\mu^*),$$

zatem również różnica zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego jest mierzalna w sensie Carathéodory'ego. „Po drodze" wykazaliśmy, że również część wspólna dwóch zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego jest mierzalna w sensie Carathéodory'ego.

Załóżmy teraz, że $A_n \in \mathcal{F}(\mu^*)$ dla każdej liczby naturalnej n. Wykażemy, że zbiór $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jest mierzalny w sensie Carathéodory'ego. Zaczniemy od przedstawienia zbioru $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego. Niech

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2),\ B_4 = A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3), \ldots$$

Zbiory B_1, B_2, $\ldots$ są oczywiście parami rozłączne i mierzalne w sensie Carathéodory'ego. Oczywiście $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, również $\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$ dla każdej liczby całkowitej $m \geq 1$. Mamy więc:

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &= \mu^*\big(Z \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m)\big) + \mu^*\big(Z \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m)\big) = \\ &= \mu^*(Z \cap B_1) + \mu^*(Z \cap B_2) + \cdots + \mu^*(Z \cap B_m) + \mu^*\big(Z \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m)\big) \geq \\ &\geq \mu^*(Z \cap B_1) + \mu^*(Z \cap B_2) + \cdots + \mu^*(Z \cap B_m) + \mu^*\big(Z \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)\big)\end{aligned}$$

dla każdej liczby naturalnej m. Wobec tego zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &\geq \mu^*(Z \cap B_1) + \mu^*(Z \cap B_2) + \cdots + \mu^*\big(Z \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)\big) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap B_n) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \geq \mu^*\Big(Z \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \geq \mu^*(Z),\end{aligned}$$

— przedostatnia nierówność wynika z wzoru $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(Z \cap B_n) = Z \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ i z podaddytywności funkcji μ^*. Stąd zaś wynika, że $\mu^*(Z) = \mu^*\Big(Z \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big) + \mu^*\Big(Z \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big)$.

Wykazaliśmy, że zbiór $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jest mierzalny w sensie Carathéodory'ego.

Z powyższych nierówności wynika też, że $\mu^*\Big(Z \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*\big(Z \cap B_n\big)$ dla każdego zbioru Z, w szczególności $\mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*\big(B_n\big)$ (dla $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$). Funkcja μ^* rozpatrywana na zbiorach spełniających warunek Carathéodory'ego jest więc miarą przeliczalnie addytywną. ■

Miara otrzymana przez zmniejszenie dziedziny miary zewnętrznej μ^* oznaczana będzie symbolem μ.

Stwierdzenie 7.16 (o mierzalności zbiorów miary 0**)**

Jeśli $\mu^*(A) = 0$, to $A \in \mathcal{F}(\mu^*)$.

Dowód. $\mu^*(Z) \leqslant \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(Z \setminus A) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus A) \leqslant \mu^*(Z)$, zatem $\mu^*(Z) = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(Z \setminus A)$, a to oznacza, że $A \in \mathcal{F}(\mu^*)$. ■

Zanim przejdziemy do konstrukcji najważniejszej — z punktu widzenia tego wykładu – miary wykażemy jeszcze jedno twierdzenie, które pozwala wykazywać, że w wypadku „porządnych" miar na przestrzeniach metrycznych, zbiorów mierzalnych jest sporo, a właściwie trudno spotkać zbiory niemierzalne.

Niech $\mathbb{X}$ będzie przestrzenią metryczną z metryką ϱ. Jeżeli $A, B \subseteq \mathbb{X}$, to **odstęp zbiorów** A i B definiujemy jako $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\varrho(a,b):\quad a \in A,\ b \in B\}$. Jasne jest, że jeśli $A \cap B \neq \emptyset$, to $\mathrm{dist}(A,B) = 0$, zatem funkcja dist nie jest metryką. Jeśli $p \in \mathbb{X}$, to definiujemy odległość punktu p od zbioru A wzorem $\varrho(p,A) = \mathrm{dist}(\{p\},A)$.

Definicja 7.17 (miary metrycznej)

Miara zewnętrzna nazywana jest miarą metryczną wtedy i tylko wtedy, gdy z tego, że $\mathrm{dist}(A,B) > 0$ wynika, że $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. ■

Twierdzenie 7.18 (o mierzalności zbiorów borelowskich)
Jeśli μ^* jest miarą metryczną określoną na $2^{\mathbb{X}}$, to zbiory borelowskie są mierzalne w sensie Carathéodory'ego.

Dowód. Wystarczy wykazać, że zbiory otwarte są mierzalne w sensie Carathéodory'ego. Załóżmy, że zbiór G jest otwarty. Niech $G_n = \{p \in \mathbb{X}\colon \quad \varrho(p, \mathbb{X} \setminus G) > \frac{1}{n}\}$. Ponieważ G jest zbiorem otwartym, więc $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Mamy też $G_n \subseteq G_{n+1}$. Niech $D_n = G_{n+1} \setminus G_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $D_0 = G_1$. Z tej definicji wynika od razu, że zbiory D_0, D_1, D_2, ... są parami rozłączne oraz, że ich sumą jest zbiór G. Jeśli $|i-j| \geq 2$, to $\operatorname{dist}(D_i, D_j) > \frac{|i-j|-1}{(i+1)(j+1)} > 0$.[1]

Jeśli $\mu^*(Z) = \infty$, to ponieważ $\infty = \mu^*(Z) \leqslant \mu^*(G \cap Z) + \mu^*(Z \setminus G) \leqslant \infty$, więc zachodzi równość $\mu^*(Z) = \mu^*(G \cap Z) + \mu^*(Z \setminus G)$. Załóżmy teraz dla odmiany, że $\mu^*(Z) < \infty$. Zachodzą wzory

$$\mu^*(Z \cap D_1) + \mu^*(Z \cap D_3) + \cdots + \mu^*(Z \cap D_{2n+1}) = \\ = \mu^*\big((Z \cap D_1) \cup (Z \cap D_3) \cup \ldots \cup (Z \cap D_{2n+1})\big) \leqslant \mu^*(Z)$$

oraz

$$\mu^*(Z \cap D_0) + \mu^*(Z \cap D_2) + \cdots + \mu^*(Z \cap D_{2n}) = \\ = \mu^*\big((Z \cap D_0) \cup (Z \cap D_2) \cup \ldots \cup (Z \cap D_{2n})\big) \leqslant \mu^*(Z).$$

Wynika z nich, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(Z \cap D_n) \leqslant 2\mu^*(Z) < \infty$. Mamy też

$$G \setminus G_n = D_n \cup D_{n+1} \cup \ldots,$$

zatem $\mu^*\big(Z \cap (G \setminus G_m)\big) \leqslant \sum\limits_{n=m}^{\infty} \mu^*(Z \cap D_n) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ (reszta szeregu zbieżnego dąży do 0). Z nierówności $\operatorname{dist}(Z \cap G_n, Z \setminus G) \geq \frac{1}{n} > 0$ i metryczności miary zewnętrznej μ^* wynika, że

$$\mu^*(Z \cap G_n) + \mu^*(Z \setminus G) = \mu^*\big((Z \cap G_n) \cup (Z \setminus G)\big) \leqslant \mu^*(Z),$$

zatem

$$\mu^*(Z) \leqslant \mu^*(Z \cap G) + \mu^*(Z \setminus G) = \mu^*\big((Z \cap G_m) \cup (Z \cap (G \setminus G_m))\big) + \mu^*(Z \setminus G) \leqslant \\ \leqslant \mu^*(Z \cap G_m) + \mu^*\big(Z \cap (G \setminus G_m)\big) + \mu^*(Z \setminus G) = \\ = \mu^*\big((Z \cap G_m) \cup (Z \setminus G)\big) + \mu^*\big(Z \cap (G \setminus G_m)\big) \leqslant \\ \leqslant \mu^*(Z) + \mu^*\big(Z \cap (G \setminus G_m)\big) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu^*(Z).$$

Stąd wynika od razu, że $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap G) + \mu^*(Z \setminus G)$, a to oznacza, że zbiór G jest mierzalny. Dowód został zakończony. ■

Mamy już narzędzia pozwalające na skonstruowanie naturalnej miary w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. W zeszłym roku omówiony był początek konstrukcji w przypadku $k = 1$. Nie zajęliśmy się wtedy w ogóle kwestiami przeliczalnej addytywności miary. Namiastką było stwierdzenie, że miara sumy przeliczalnie wielu zbiorów miary 0 jest równa 0 oraz stwierdzenie, że jeśli przedziały niezdegenerowane I_j pokrywają jakiś przedział P, to suma długości przedziałów I_j jest nie mniejsza niż długość przedziału P. Uogólnimy teraz te stwierdzenia dopuszczając wymiar większy niż 1 oraz zbiory mierzalne, więc nieomal dowolne.

[1] Jeśli $j > i+1$, $x \in D_i$, $y \in D_j$, to $\varrho(x,y) > \frac{1}{i+1} - \frac{1}{j} = \frac{j-i-1}{j(i+1)} > \frac{j-i-1}{(i+1)(j+1)}$.

Definicja 7.19 (częściowego porządku w $\mathbb{R}^k$)
Niech $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^k$. Definiujemy: $\mathbf{x}\prec\mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i<y_i$ dla $i=1,2,\ldots,k$ oraz $\mathbf{x}\preceq\mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i\leqslant y_i$ dla $i=1,2,\ldots,k$. ■

Jest rzeczą oczywistą, że $\prec$ i $\preceq$ to relacje częściowego porządku w przestrzeni k–wymiarowej.

Definicja 7.20 (przedziału k–wymiarowego)
Załóżmy, że $\mathbf{p}\prec\mathbf{q}$. Przedziałem k–wymiarowym otwartym o końcach $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^k$ nazywamy zbiór tych $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$, dla których zachodzi nierówność podwójna $\mathbf{p}\prec\mathbf{x}\prec\mathbf{q}$. Oznaczamy go symbolem $(\mathbf{p},\mathbf{q})_k$. Przedziałem domkniętym o końcach $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^k$ nazywamy $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k:\quad \mathbf{p}\preceq\mathbf{x}\preceq\mathbf{q}\}$, oznaczamy go symbolem $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ ■

Jeśli $k=2$, to przedziałami otwartymi są prostokąty bez brzegu o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, przedziały domknięte to prostokąty z brzegami o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. W przypadku $k=3$ mamy do czynienia z prostopadłościanami, których krawędzie są równoległe do osi układu współrzędnych. Oczywiście przedziały otwarte k–wymiarowe są zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^k$, natomiast przedziały domknięte są zbiorami domkniętymi, a ponieważ są też ograniczone więc są zbiorami zwartymi.

Definicja 7.21 (zawartości czyli k–wymiarowej objętości przedziału)
Zawartość przedziału R[2] o końcach $\mathbf{p},\mathbf{q}$ to liczba

$$\mathrm{vol}(R)=(q_1-p_1)(q_2-p_2)\ldots(q_k-p_k).\ ■$$

Stosować będziemy tę definicję w odniesieniu do przedziałów domkniętych i do otwartych.

Definicja 7.22 (k–wymiarowej miary zewnętrznej Lebesgue'a)
$\ell_k^*(A)=\inf\big\{\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(R_j):\quad \{R_j\}_j\ R_j$ – przedział, $\bigcup_{j\in J}R_j\supseteq A\big\}$. ■

Jeśli rodzina $\{R_j\}$ jest nieprzeliczalna, to $\sum_j\mathrm{vol}(R_j)=\infty$, bo co najmniej jeden ze zbiorów $\big\{R_j:\quad \mathrm{vol}(R_j)\geq\frac{1}{n}\big\}$ musi być nieprzeliczalny (nam starczyłby nieskończony), więc jeśli $\ell_k^*(A)<\infty$, to dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje przeliczalna rodzina przedziałów $\{R_j\}$ pokrywająca zbiór A taka, że $\sum_j\mathrm{vol}(R_j)<\ell_k^*(A)+\varepsilon$. Jeśli $\ell_k^*(A)=\infty$, to możemy każdy z przedziałów pokrywających zbiór A zastąpić zawierającym go przedziałem otwartym a z pokrycia przedziałami otwartymi można — jak wiadomo — wybrać podpokrycie przeliczalne, zresztą można założyć od razu, że te nieco większe przedziały otwarte mają końce w $\mathbb{Q}^k$, a takich przedziałów jest przeliczalnie wiele. Oznacza to, że w definicji można rozpatrywać tylko pokrycia przeliczalne.

Ponieważ zawartość przedziału otwartego równa jest zawartości przedziału domkniętego (o tych samych końcach), więc można zastąpić przedziały otwarte domkniętymi nie zmieniając sumy ich zawartości. Oznacza to, że w definicji miary ℓ_k^* można rozważać jedynie przedziały domknięte. Można też ograniczyć się do przedziałów otwartych. Jeśli bowiem $\varepsilon>0$ i $\sum_n\mathrm{vol}(R_n)\leqslant\ell_k^*(A)+\varepsilon$, przy czym przedziały numerowane są liczbami naturalnymi, to zastępując przedział R_n współśrodkowym przedziałem otwartym

[2] Pytanie: za ile lat ktoś przetłumaczy słowo *rectangle* na np. *rektangiel*?

$\widetilde{R}_n$ takim, że $\mathrm{vol}(\widetilde{R}_n) < \mathrm{vol}(R_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ otrzymujemy taką rodzinę $\{\widetilde{R}_n\}$ przedziałów otwartych, że $\sum_n \mathrm{vol}(\widetilde{R}_n) \leqslant \ell_k^*(A) + 2\varepsilon$. Wynika stąd, że kres dolny sum $\sum_n \mathrm{vol}(R_n)$ jest niezależny od tego, czy rozpatrujemy tylko przedziały otwarte, czy tylko przedziały domknięte, czy też przedziały wszystkich możliwych rodzajów.

Stwierdzenie 7.23
ℓ_k^* jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}^k$.
Dowód. $\ell_k^*(\emptyset) = 0$, bo dowolna rodzina przedziałów jest pokryciem zbioru pustego. Jeśli $A \subseteq B$, to każde pokrycie zbioru B przedziałami jest też pokryciem zbioru A, zatem $\ell_k^*(A) \leqslant \ell_k^*(B)$. Niech teraz A_1, A_2,... oznaczają dowolne podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Niech $\{R_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ oznacza taką rodzinę przedziałów pokrywającą zbiór A_n, że $\sum_m \mathrm{vol}(R_{n,m}) \leqslant \ell_k^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wtedy rodzina $\{R_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ pokrywa zbiór $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, zatem

$$\ell_k^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \textstyle\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(R_{n,m}) \leqslant \sum \big(\ell_k * (A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\big) = \sum \ell_k^*(A_n) + \varepsilon.$$

Nierówność ta ma miejsce dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, więc $\ell_k^*\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum \ell_k^*(A_n)$. ∎

Stwierdzenie 7.24
Niech $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ i niech dla każdego $j \in \{1,2,3,\ldots,k\}$ dane będą liczby

$$p_j = x_{j,0} < x_{j,1} < x_{j,2} < \ldots < x_{j,m_j} = q_j.$$

Niech $\mathbf{r_w}$ oznaczają punkty przestrzeni $\mathbb{R}^k$ ponumerowane za pomocą k–wskaźników $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ przy czym $w_j \in \{0,1,\ldots,m_j\}$ a kolejnymi współrzędnymi punktu $\mathbf{r_w}$ są liczby $x_{1,w_1}, x_{2,w_2}, \ldots, x_{k,w_k}$. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną wszystkich takich przedziałów $[\mathbf{r_w}, \mathbf{r_{w'}}]$, że dla każdego $j \in \{1,2,3,\ldots,k\}$ zachodzi równość $w'_j - w_j = 1$. Wtedy: wnętrza przedziałów z rodziny $\mathcal{R}$ są parami rozłączne oraz

$$\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R = [\mathbf{p},\mathbf{q}] \quad \text{i} \quad \sum_{R\in\mathcal{R}} \mathrm{vol}(R) = \mathrm{vol}([\mathbf{p},\mathbf{q}]).$$

Dowód. Zacznijmy od wyjaśnienia: w treści tego stwierdzenia opisany został formalnie podział przedziału k–wymiarowego na mniejsze przedziały powstający w wyniku podzielenia każdej krawędzi „dużego" przedziału na mniejsze przedziały, punkty $x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,m_j-1}$ dzielą j–tą krawędź $[p_j, q_j]$ na m_j mniejszych przedziałów jednowymiarowych, w wyniku tego wyjściowy przedział k–wymiarowy został podzielony na $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ przedziałów. Każdy przedział z rodziny $\mathcal{R}$ to produkt postaci $[x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times [x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}] \times \ldots \times [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}]$. Stąd wynikają wszystkie części tezy tego stwierdzenia. Wnętrza przedziałów z rodziny $\mathcal{R}$ są parami rozłączne, bo jeśli przedziały są różne, to na którejś współrzędnej występują różne przedziały jednowymiarowe, więc ich wnętrza są rozłączne. x_j, czyli j–ta współrzędna punktu $\mathbf{x} \in [\mathbf{p},\mathbf{q}]$, należy do któregoś jednowymiarowego przedziału (jednego lub dwóch, wybieramy jeden), więc $\mathbf{x}$ jest elementem produktu tak wybranych jednowymiarowych przedziałków, więc $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ jest sumą przedziałów rodziny $\mathcal{R}$. Dzięki rozdzielności mnożenia względem dodawania zachodzi równość

$$\mathrm{vol}\left([\mathbf{p},\mathbf{q}]\right)=\prod_{j=1}^{k}(q_j-p_j)=\prod_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{m_j}(x_{j,i+1}-x_{j,i})=$$
$$=\sum_{\{i_1,i_2,\ldots i_k\}\in I}\ \prod_{j=1}^{k}(x_{j,i_j+1}-x_{j,i_j})=\sum_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{vol}(R),$$
gdzie $I=\{0,1,\ldots,m_1-1\}\times\{0,1,\ldots,m_2-1\}\times\ldots\times\{0,1,\ldots,m_k-1\}$. ■

Stwierdzenie 7.25 (o metryczności miary Lebesgue'a)
ℓ_k^* jest miarą zewnętrzną *metryczną* na $\mathbb{R}^k$.
Dowód. Niech $\mathrm{dist}(A,B)=\delta>0$. Wtedy $\ell_k^*(A\cup B)\leqslant\ell_k^*(A)+\ell_k^*(B)$, bo ℓ_k^* jest miarą zewnętrzną. Trzeba wykazać nierówność przeciwną. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Załóżmy, że $\mathcal{R}$ jest taką rodziną k–wymiarowych przedziałów, że
$$A\cup B\subseteq\bigcup_{R\in\mathcal{R}}R\quad\text{i}\quad\sum_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{vol}(R)\leqslant\ell_k^*(A\cup B)+\varepsilon.$$
Możemy każdy przedział z rodziny $\mathcal{R}$ podzielić na przedziały o średnicach (przekątnych) mniejszych niż δ i usunąć z powstałej rodziny przedziały rozłączne ze zbiorem $A\cup B$. Otrzymujemy rodzinę $\mathcal{R}'$ przy czym
$$\sum_{R\in\mathcal{R}'}\mathrm{vol}(R)\leqslant\sum_{R\in\mathcal{R}}\mathrm{vol}(R)\leqslant\ell_k^*(A\cup B)+\varepsilon.$$
Żaden przedział z rodziny $\mathcal{R}'$ nie przecina jednocześnie A i B, więc $\mathcal{R}'$ rozpada się na dwie rozłączne rodziny: $\mathcal{R}'_A$ i $\mathcal{R}'_B$, pierwsza złożona jest z przedziałów przecinających zbiór A, a druga — z przecinających zbiór B. Wynika stąd, że
$$A\subseteq\bigcup_{R\in\mathcal{R}'_A}R,\quad B\subseteq\bigcup_{R\in\mathcal{R}'_B}R\ \text{oraz}$$
$$\ell_k^*(A)+\ell_k^*(B)\leqslant\sum_{R\in\mathcal{R}'_A}\mathrm{vol}(R)+\sum_{R\in\mathcal{R}'_B}\mathrm{vol}(R)=\sum_{R\in\mathcal{R}'}\mathrm{vol}(R)\leqslant\ell_k^*(A\cup B)+\varepsilon.$$
Wobec tego, że ε jest tu dowolną liczbą dodatnią możemy napisać:
$$\ell_k^*(A)+\ell_k^*(B)\leqslant\ell_k^*(A\cup B).\ ■$$

Miara zewnętrzna ℓ_k^* ograniczona do zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego nazywana jest k–wymiarową miarą Lebesgue'a, a zbiory mierzalne w sensie ℓ_k^* — zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a. Przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^k$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a oznaczać będziemy przez $\mathcal{L}_k$. Z twierdzenia o mierzalności zbiorów borelowskich dla miary metrycznej i z tego, że ℓ_k^* jest miarą metryczną wynika, że wszystkie zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^k$ są mierzalne w sensie Lebesgue'a, czyli $\mathcal{L}_k\supseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. W rzeczywistości ta inkluzja równością nie jest — to wniosek z twierdzenia Vitali'ego. Prawdziwe jest:

Twierdzenie 7.26 (charakteryzujące zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a)
Niech $A\subseteq\mathbb{R}^k$. Następujące warunki są równoważne

0° zbiór $A\subseteq\mathbb{R}^k$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a;

1° dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taki zbiór otwarty $G\subseteq\mathbb{R}^k$, że $A\subseteq G$ oraz $\ell_k^*(G\setminus A)<\varepsilon$;

2° istnieje taki zbiór G typu G_δ(tzn. część wspólna przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych), że $A \subseteq G$ i $\ell_k^*(G \setminus A) = 0$;

3° dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór domknięty $F \subseteq \mathbb{R}^k$, że $F \subseteq A$ oraz $\ell_k^*(A \setminus F) < \varepsilon$;

4° istnieje taki zbiór F typu F_σ (tzn. suma przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych), że $F \subseteq A$ i $\ell_k^*(A \setminus F) = 0$.

Dowód. Definiujemy zbiory: $A_1 = A \cap B(\mathbf{0},1)$, $A_2 = A \cap \big(B(\mathbf{0},2) \setminus B(\mathbf{0},1)\big)$, $A_3 = A \cap \big(B(\mathbf{0},3) \setminus B(\mathbf{0},2)\big)$, ... Jeśli A jest zbiorem mierzalnym, to również zbiory $A_1, A_2, \ldots$ są mierzalne, bo kule otwarte są mierzalne w sensie Lebesgue'a, a dodając i odejmując zbiory mierzalne otrzymujemy w wyniku zbiory mierzalne. Niech $\varepsilon > 0$. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki zbiór otwarty $G_n \supseteq A_n$, że $\ell_k(G_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. W definicji miary zewnętrznej ℓ_k^* można rozważać jedynie pokrycia zbioru A_n przedziałami k–wymiarowymi *otwartymi*. Istnieją zatem takie przedziały otwarte $R_{n,j}$, że $G_n = \bigcup_j R_{n,j} \supseteq A_n$, więc $\sum_j \mathrm{vol}(R_{n,j}) \leqslant \ell_k^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \ell_k(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wynikają stąd nierówności

$$\ell_k(A_n) \leqslant \ell_k(G_n) \leqslant \sum_j \ell_k(R_{n,j}) \leqslant \sum_j \mathrm{vol}(R_{n,j}) \leqslant \ell_k(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant$$
$$\leqslant \ell_k\big(B(\mathbf{0},n)\big) + \frac{\varepsilon}{2^n} < \infty.$$

Wobec tego, że zbiory A_n i $G_n \supseteq A_n$ są mierzalne i większy z nich ma miarę *skończoną*, możemy napisać $\ell_k(G_n \setminus A_n) = \ell_k(G_n) - \ell_k(A_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Niech $G = \bigcup_n G_n$. Zbiór G jest otwarty, bo jest sumą zbiorów otwartych. Zachodzą nierówności $\ell_k(G \setminus A) \leqslant \leqslant \sum_n \ell_k(G_n \setminus A_n) \leqslant \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. Warunek 1° został wywnioskowany z mierzalności zbioru A.[3]

Teraz zakładamy, że dla pewnego zbioru A spełniony jest warunek 1°. Niech G_n oznacza zbiór otwarty taki, że $\ell_k^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ i $G_n \supseteq A$. Niech $G = \bigcap G_n$. Oczywiście G jest zbiorem typu G_δ. Mamy też $\ell_k^*(G \setminus A) \leqslant \ell_k^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, zatem $\ell_k^*(G \setminus A) = 0$.
Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek 2°. Zbiór G jest mierzalny, bo jest borelowski. Zbiór $G \setminus A$ jest mierzalny, bo $\ell_k^*(G \setminus A) = 0$. Wobec tego zbiór $A = G \setminus (G \setminus A)$ też jest mierzalny.
Warunek 1° jest spełniony dla zbioru $\mathbb{R}^k \setminus A$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek 3° jest spełniony dla zbioru A. Analogicznie warunek 2° jest spełniony dla zbioru $\mathbb{R}^k \setminus A$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek 4° jest spełniony dla zbioru A – wynika to natychmiast z tego, że uzupełnieniem zbioru typu G_δ jest zbiór typu F_σ i odwrotnie (prawa de Morgana). Dowód został zakończony. ■

Z definicji miary wynika od razu, że dla każdego k–wymiarowego przedziału R zachodzi nierówność $\ell_k(R) \leqslant \mathrm{vol}(R)$. Nie należy się w tym momencie spodziewać sensacji.

Twierdzenie 7.27 (o mierze przedziału wielowymiarowego)
$\ell_k(R) = \mathrm{vol}(R)$ dla każdego k–wymiarowego przedziału R.

[3] Zbiory A_n rozważaliśmy tylko po to, by skorzystać z równości $\mu(G_n \setminus A_n) = \mu(G_n) - \mu(A_n)$, więc musieliśmy wiedzieć, że $\mu(G_n) < \infty$, w dowodzonym twierdzeniu nie zakładamy, że $\mu(A) < \infty$.

Dowód. Wystarczy wykazać, że dla każdego rodziny $\{R_j\}$ przedziałów otwartych pokrywającej przedział domknięty R zachodzi nierówność $\sum_j \mathrm{vol}(R_j) \geq \mathrm{vol}(R)$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a rodziny $\{R_j\}$ pokrywającej zbiór zwarty R, tzn. jeśli $A \subseteq R$ i średnica $\mathrm{diam}(A)$ zbioru A jest mniejsza niż λ, to istnieje takie $j = j(A)$, że $A \subseteq R_{j(A)}$. Podzielmy przedział R na n^k przystających przedzialików S_i wybrawszy tak duże n, że $\mathrm{diam}(S_i) < \lambda$. Niech T_j będzie sumą wszystkich przedzialików S_i zawartych w R_j. Jasne jest, że T_j jest k–wymiarowym przedziałem domkniętym lub zbiorem pustym. Z określenia wynika od razu, że $T_j \subseteq R_j$, więc $\mathrm{vol}(T_j) \leqslant \mathrm{vol}(R_j)$. Ponieważ każdy przedział S_i jest zawarty w pewnym przedziale R_j, więc $\bigcup_j T_j \supseteq R$ i wobec tego $\bigcup_j T_j = R$. Ze stwierdzenia 7.23 wynika, że $\sum_i \mathrm{vol}(S_i) = \mathrm{vol}(R)$. Analogiczny wzór zachodzi dla przedziału T_j – w tym przypadku sumujemy zawartości tych przedziałów S_i, których sumą jest przedział T_j. Wobec tego

$$\mathrm{vol}(R) = \textstyle\sum_i \mathrm{vol}(S_i) \leqslant \sum_j \mathrm{vol}(T_j) \leqslant \sum_j \mathrm{vol}(R_j).^4 \ \blacksquare$$

Twierdzenie 7.28 (o niezmienniczości miary Lebesgue'a ze względu na przesunięcia)
Dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}_k$ i dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość $\ell_k(A) = \ell_k(A+\mathbf{v})$, gdzie $A + \mathbf{v} = \{\mathbf{x}+\mathbf{v}\colon \quad \mathbf{x} \in A\}$, czyli $A+\mathbf{v}$ to obraz A w przesunięciu o wektor $\mathbf{v}$.
Dowód. Wynika to od razu z tego, że $\mathrm{vol}(R+\mathbf{v}) = \mathrm{vol}(R)$ dla każdego przedziału k–wymiarowego R : przesuwając pokrycie zbioru A przedziałami o wektor $\mathbf{v}$ otrzymujemy pokrycie zbioru $A+\mathbf{v}$ przedziałami, których suma zawartości jest taka sama jak przedziałów pokrywających zbiór A, stąd wynika, że $\ell_k(A+\mathbf{v}) \leqslant \ell_k(A)$, druga nierówność jest równie oczywista. $\blacksquare$

Niech $K_k = [0,1]^k$ będzie kostką jednostkową wymiaru k.

Twierdzenie 7.29 (o jednoznaczności miary Lebesgue'a)
Załóżmy, że μ jest taką miarą określoną na $\mathcal{L}_k$, że

0° $\mu(A) = \mu(A+\mathbf{v})$ dla każdego $A \in \mathcal{L}_k$ i każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$(tzn. μ jest przesuwalna);

1° $0 < \mu(R) < \infty$ dla każdego przedziału otwartego $R \subset \mathbb{R}^k$ (miara każdego k–wymiarowego przedziału jest skończona i dodatnia, czyli miary zbiorów zwartych są skończone, a otwartych i niepustych — dodatnie).
Wtedy dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}_k$ zachodzi równość $\mu(A) = \mu(K_k)\ell_k(A)$.

Dowód. (i) Niech $A \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie podprzestrzenią afiniczną wymiaru mniejszego od k. Wykażemy, że $\mu(A) = 0$. Niech $A_m = A \cap B(\mathbf{0}, m)$. Niech $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ oznacza wektor prostopadły do A, $\|v\| = 1$. Niech $A_{m,n} = \{\mathbf{x} + \frac{1}{n}v\colon \quad \mathbf{x} \in A_m\} = A_m + \frac{1}{n}v$. Miara każdego ze zbiorów $A_{m,1}$, $A_{m,2}, \ldots$ równa jest $\mu(A_m)$, bo miara μ jest przesuwalna. Ponieważ $A_m \subseteq B(\mathbf{0}, n)$, więc $A_{m,n} \subseteq B(\mathbf{0}, m+1)$ — przesunęliśmy zbiór A_m o wektor o długości $\leqslant 1$. Jasne jest również, że $A_{m,i} \cap A_{m,j} = \emptyset$ dla $i \neq j$. Wobec tego

$$\mu(B(\mathbf{0}, n+1)) \geq \mu(\cup_n A_{m,n}) = \textstyle\sum_n \mu(A_{m,n}) = \mu(A_m) + \mu(A_m) + \ldots$$

[4] Nie ma żadnym podstaw do twierdzenia, że przedziały T_j mają rozłączne wnętrza – nie muszą i dlatego nierówność $\sum_i \mathrm{vol}(S_i) \leqslant \sum_j \mathrm{vol}(T_j)$ może być ostra!

Ostatnia suma jest skończona, a to jest możliwe jedynie wtedy, gdy $\mu(A_m)=0$. Oczywiście $\cup_m A_m = A$, zatem $\mu(A)\leqslant\sum_m\mu(A_m)=0$.
(ii) Niech $Q_n=\{\frac{m}{2^n}:\quad m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$, Q_0 jest więc zbiorem liczb całkowitych, Q_1 jest zbiorem złożonym z liczb 0, $\pm\frac{1}{2}$, ±1, $\pm\frac{3}{2}$ itd. Niech $\mathcal{K}_n$ będzie rodziną kostek o krawędziach długości $\frac{1}{2^n}$ i końcach dwójkowo–wymiernych, tzn. przedziałów postaci $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ takich, że $\mathbf{x},\mathbf{y}\in Q_n^k$ (potęga w sensie iloczynu kartezjańskiego), przy czym $y_j-x_j=\frac{1}{2^n}$ dla $j=1,2,\ldots,k$. Niech $\mathcal{K}=\cup_n\mathcal{K}_n$. Wykażemy, że
każdy niepusty zbiór otwarty G można przedstawić w postaci sumy kostek należących do $\mathcal{K}$ o wnętrzach parami rozłącznych.
Niech G_n oznacza sumę kostek z $\mathcal{K}_n$ zawartych w zbiorze otwartym G. Ponieważ każda kostka z $\mathcal{K}_n$ jest sumą kostek z $\mathcal{K}_{n+1}$ (tj. mających dwa razy krótsze krawędzie), więc $G_n\subseteq G_{n+1}$. Jeśli $\mathbf{p}\in G$, to istnieje liczba $r>0$ taka, że $B(\mathbf{p},r)\subseteq G$. Niech n będzie liczbą naturalną tak dużą, że $\frac{\sqrt{k}}{2^n}<r$. Istnieje kostka $K\in\mathcal{K}_n$ zawierająca punkt $\mathbf{p}$. Jest ona zawarta w kuli $B(\mathbf{p},r)$, bo $\operatorname{diam}(K)=\frac{\sqrt{k}}{2^n}<r$. Wynika stąd, że dla każdego $\mathbf{p}\in G$ znajdzie się $n\in\mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{p}\in G_n$. Oznacza to, że $\bigcup_n G_n=G$. Jasne jest też, że każdy ze zbiorów G_n jest sumą kostek o wnętrzach parami rozłącznych, G_{n+1} powstaje z G_n przez dołączenie do G_n tych kostek z $\mathcal{K}_{n+1}$, które nie są zawarte w G_n, ale są zawarte w G.
(iii) Miary wszystkich kostek z $\mathcal{K}_n$ są równe $\mu\big([0,\frac{1}{2^n}]^k\big)$ – wynika to od razu z przesuwalności miary μ: każda kostka z $\mathcal{K}_n$ jest obrazem kostki $[0,\frac{1}{2^n}]^k$ w pewnym przesunięciu.
(iv) $\mu(K_k)=\mu([0,1]^k)=2^k\mu([0,\frac{1}{2}]^k)=2^{2k}\mu([0,\frac{1}{2^2}]^k)=2^{3k}\mu([0,\frac{1}{2^3}]^k)=\ldots$, bo miara μ jest przesuwalna, kostka $[0,\frac{1}{2}]$ składa się z 2^k obrazów kostki $[0,\frac{1}{2}]$ w odpowiednich przesunięciach, których wnętrza są parami rozłączne, itd. Z (i) wynika, że $\mu(\mathrm{Bd(K)})=0$ dla każdej kostki $K\in\mathcal{K}$, co pozwala na skorzystanie z przeliczalnej addytywności miary μ pomimo, że rozpatrywane kostki nie są parami rozłączne (stają się parami rozłączne po usunięciu zbioru miary 0). Stąd natychmiast wynika, że $\mu\big([0,\frac{1}{2}]^k]\big)=\frac{1}{2^k}\mu(K_k)=\mu(K_k)\ell_k\big([0,\frac{1}{2}]^k]\big)$, $\mu\big([0,\frac{1}{2^2}]^k]\big)=\frac{1}{2^{2k}}\mu(K_k)=\mu(K_k)\ell_k\big([0,\frac{1}{2^2}]^k]\big)$ itd. Ogólnie $\mu\big([0,\frac{1}{2^m}]^k]\big)=\frac{1}{2^{mk}}\mu(K_k)=\mu(K_k)\ell_k\big([0,\frac{1}{2^m}]^k]\big)$. Wobec tego równość $\mu(K)=\mu(K_k)\ell(K)$ zachodzi dla każdej kostki $K\in\mathcal{K}$.
(v) Ponieważ zbiór otwarty G można przedstawić jako sumę takiego zbioru H, że $\mu(H)=0=\ell_k(H)$ (suma brzegów kostek z poprzednich punktów) i przeliczalnej rodziny parami rozłącznych kostek otwartych z rodziny $\mathcal{K}$, dla których dowodzony wzór ma miejsce, więc wzór jest prawdziwy dla każdego zbioru otwartego. Wynika stąd, że jest też prawdziwy dla zbiorów borelowskich, których miara Lebesgue'a jest równa 0: miara Lebesgue'a zbioru A równa jest 0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje zbiór otwarty $G_\varepsilon\supseteq A$ taki, że $\ell_k(G_\varepsilon)<\varepsilon$. Wtedy $\mu(G_\varepsilon)<\varepsilon\mu(K_k)$, a ponieważ jest dla każdej liczby dodatniej ε, więc $\mu(A)=0$. Jeśli $B\subseteq R^k$ jest zbiorem mierzalnym a ε — liczbą dodatnią, to istnieje zbiór otwarty $G_\varepsilon\supseteq B$ taki, że $\ell_k(G_\varepsilon\setminus B)<\varepsilon$. Stąd wynika, że
$\mu(B)\leqslant\mu(G_\varepsilon)=\mu(K_k)\ell_k(G_\varepsilon)\leqslant\mu(K_k)\big(\ell_k(B)+\ell_k(G_\varepsilon\setminus B)\big)\leqslant\mu(K_k)\ell_k(B)+\varepsilon\mu(K_k)$,
a ponieważ ta nierówność zachodzi dla każdej liczby $\varepsilon>0$, więc $\mu(B)\leqslant\mu(K_k)\ell_k(B)$.

Jeśli zbiór mierzalny B jest zawarty w zbiorze otwartym G miary skończonej, to
$\mu(K_k)\ell_k(G) = \mu(G) = \mu(B) + \mu(G \setminus B) \leqslant$
$$\leqslant \mu(K_k)\ell_k(B) + \mu(K_k)\ell_k(G \setminus B) = \mu(K_k)\ell_k(G)$$
i wobec tego, że po obu stronach występują liczby (a nie nieskończoność), muszą zachodzić równości $\mu(B) = \mu(K_k)\ell_k(B)$ oraz $\mu(G \setminus B) = \mu(K_k)\ell_k(G \setminus B)$. Dowodzona równość ma więc miejsce dla każdego zbioru mierzalnego, którego miara Lebesgue'a jest skończona (np. ograniczonego), a każdy zbiór mierzalny można przedstawić jako sumę przeliczalnej rodziny parami rozłącznych zbiorów mierzalnych, ograniczonych. To kończy dowód. ■

Umowa lokalna $0 \cdot \infty = 0$ (w teorii miary i całki).

Twierdzenie 7.30 (o mierze obrazu zbioru mierzalnego w przekształceniu liniowym)
Jeśli $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem liniowym, zbiór A jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, to zbiór $L(A)$ też jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i zachodzi równość $\ell_k\big(L(A)\big) = |\det(L)|\ell_k(A)$.
Dowód. Zaczniemy od rozpatrzenia przypadku trywialnego. $L(\mathbb{R}^k)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Jeśli wymiar tej podprzestrzeni jest mniejszy niż k, to jej miara Lebesgue'a równa jest 0, punkt pierwszy dowodu poprzedniego twierdzenia. Wynika stąd, że jeśli $\det(L) = 0$, czyli gdy L nie jest izomorfizmem, to miara obrazu dowolnego zbioru równa jest 0, bo obraz całej przestrzeni ma miarę 0, więc równy jest $0 \cdot \ell_k(A)$.

Od tego momentu zakładać będziemy, że L jest izomorfizmem $\mathbb{R}^k$, czyli że $\det(L) \neq 0$. Niech $\mu(A) = \ell_k(L(A))$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}_k$. Z tego, że L przekształceniem różnowartościowym odwzorowującym $\mathbb{R}^k$ na siebie, wynika, że rodzina zbiorów $\{L(A)\colon \ A \in \mathcal{L}_k\}$ jest przeliczalnie addytywnym ciałem zbiorów. Ponieważ L jest homemomorfizmem, więc zbiory otwarte przekształca na zbiory otwarte, domknięte — na domknięte, borelowskie — na borelowskie. Oczywiście μ jest miarą na tym σ–ciele:
$$\mu(\textstyle\bigcup_n A_n) = \ell_k\big(L(\bigcup_n A_n)\big) = \sum_n \ell_k\big(L(A)\big) = \sum_n \mu(A_n)$$
dla dowolnych parami rozłącznych zbiorów mierzalnych A_1, A_2, … μ jest miarą przesuwalną, bowiem
$$\mu(A + \mathbf{v}) = \ell_k\big(L(A + \mathbf{v})\big) = \ell_k\big(L(A) + L(\mathbf{v})\big) = \ell_k\big(L(A)\big) = \mu(A).$$
Jest to miara skończona na zbiorach ograniczonych (L przekształca zbiory ograniczone na zbiory ograniczone) i dodatnia na zbiorach otwartych (L przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte). Wobec tego jest to miara Lebesgue'a pomnożona przez pewną liczbę dodatnią, mianowicie przez $\ell_k\big(L(K_k)\big)$.

Niech $c(L) = \ell_k\big(L(K_k)\big)$. Z definicji wynika, że $c\,(L_1L_2) = c\,(L_1)\,c\,(L_2)$, bo
$c(L_1L_2)\ell_k(K_k) = \ell_k\big((L_1L_2)(K_k)\big) = \ell_k\big(L_1(L_2(K_k))\big) =$
$$= c(L_1)\ell_k\big(L_2(K_k)\big) = c(L_1)c(L_2)\ell_k(K_k)).$$
Jest też oczywiste, że jeśli macierz przekształcenia L jest przekątniowa, to obrazem kostki K_k jest przedział, a wartości bezwzględne wyrazów na przekątnej to długości krawędzi tego k–wymiarowego przedziału, wobec tego jego miara to ich iloczyn, czyli wartość bezwzględna wyznacznika macierzy L. Niech $L_{i,j}(s)$ będzie macierzą, która

ma na głównej przekątnej same jedynki, poza nią zera z wyjątkiem j–tego wyrazu w i–tym wierszu, którym jest liczba s; L_i to macierz, która poza główną przekątną ma same zera, na głównej przekątnej są same jedynki z wyjątkiem miejsca i-tego, na którym stoi -1. Macierz L_iL różni się od macierzy L tym, że i–ty wiersz został pomnożony przez -1; macierz LL_i — tym, że i–ta kolumna została pomnożona przez -1. W szczególności $L_iL_i = I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową wymiaru k. Wobec tego $c(I) = c(L_iL_i) = c(L_i)^2$, zatem $c(L_i) = 1$, co zresztą i tak wynika z tego, że L_i jest macierzą przekątniową. Mamy też $L_{i,j}(-s) = L_iL_{i,j}(s)L_i$ i wobec tego $c(L_{i,j})(-s) = c(L_i)c\big(L_{i,j}(s)\big)c(L_i) = c\big(L_{i,j}(s)\big)$. Macierz $L_{i,j}(s)L$ otrzymujemy przepisując wszystkie wiersze macierzy L z wyjątkiem i–tego bez zmian, a i–ty wiersz zastępujemy sumą wiersza i–tego i iloczynu wiersza j–tego przez liczbę s. Jasne jest więc, że $L_{i,j}(s)L_{i,j}(-s) = I$, zatem

$$1 = c(I) = c\big(L_{i,j}(s)L_{i,j}(-s)\big) = c\big(L_{i,j}(s)\big)c\big(L_{i,j}(-s)\big) = c\big(L_{i,j}(s)\big)^2,$$

więc $c\big(L_{i,j}(s)\big) = 1$. Za pomocą operacji elementarnych przeprowadzanych na wierszach można sprowadzić macierz dowolnego izomorfizmu do macierzy przekątniowej. Te operacje to mnożenie danej macierzy z lewej strony przez $L_{i,j}(s)$, bądź zamiana i–tego wiersza z wierszem j–tym, czyli mnożenie przez macierz $M_{i,j}$, w której wiersze o numerach różnych od i, j są takie, jak w macierzy jednostkowej, w i–tym wierszu są zera z wyjątkiem j–tego miejsca, na którym znajduje się 1, w j–tym wierszu są zera z wyjątkiem i–tego miejsca, na którym znajduje się 1. Jasne jest, że $M_{i,j}M_{i,j} = I$, zatem $c(M_{i,j})^2 = 1$, więc $c(M_{i,j}) = 1$.

Wartości obu funkcji c i $|\det|$ pokrywają się na macierzach przekątniowych a przy wykonywaniu operacji elementarnych, czyli przy mnożeniu macierzy przez macierze postaci $L_{i,j}(s)$, $M_{i.j}$ oraz L_i nie ulegają zmianom. Wobec tego równość $c(L) = |\det(L)|$ zachodzi dla każdego izomorfizmu L. Wobec tego twierdzenie jest prawdziwe dla zbiorów borelowskich. Każdy zbiór A miary zero jest podzbiorem zbioru G typu G_δ (więc borelowskiego) miary zero, więc

$$0 = |\det(L)|\ell_k(G) = \ell_k(L(G)) \geq \ell_k(L(A)),$$

zatem $\ell_k(L(A)) = 0 = |\det(L)|\ell_k(A)$. Wzór zachodzi więc również dla dowolnego zbioru miary zero. Każdy zbiór mierzalny można przedstawić w postaci zbioru borelowskiego, np. typu F_σ i zbioru miary 0. Wobec tego teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich zbiorów mierzalnych. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 7.31 (o mierze iloczynu kartezjańskiego zbiorów mierzalnych) Jeśli zbiory $A \subseteq \mathbb{R}^k$ i $B \subseteq \mathbb{R}^l$ są mierzalne w sensie Lebesgue'a, to ich iloczyn kartezjański $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i zachodzi równość

$$\ell_{k+l}\big(A \times B\big) = \ell_k(A) \cdot \ell_l(B).$$

Dowód. Jeśli zbiory A i B są odpowiednio k i l wymiarowymi przedziałami, to również zbiór $A \times B$ jest przedziałem, tyle że $k + l$–wymiarowym. W tym przypadku dowodzony wzór jest oczywiście prawdziwy, bo miara przedziału równa jest jego wielowymiarowej objętości.

Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $\ell_l(B) = 0$ i A jest przedziałem, to zachodzi wzór $\ell_{k+l}(A \times B) = 0$: jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje takie pokrycie zbioru B przedziałami

$\{P_n\colon \quad n\in\mathbb{N}\}$, że $\sum \mathrm{vol}(P_n)<\varepsilon$. Przedziały $k+l$–wymiarowe $\{A\times P_n\colon \quad n\in\mathbb{N}\}$ pokrywają zbiór $A\times B$, więc

$$\ell_{k+l}(A\times B)<\sum_n \ell_k(A)\cdot\mathrm{vol}(P_n)<\ell_k(A)\cdot\varepsilon.$$

Tak samo wykazujemy, że jeśli B jest przedziałem i $\ell_k(A)=0$, to $\ell_{k+l}(A\times B)=0$. Z topologii wiadomo, że jeśli zbiory $A\subseteq\mathbb{R}^k$ i $B\subseteq\mathbb{R}^l$ są otwarte, to również zbiór $A\times B$ jest otwarty. Mamy też $\bigcap_n(C_n\times D_n)=\big(\bigcap_n C_n\big)\times\big(\bigcap_n D_n\big)$. Wynika stąd, że iloczyn kartezjański zbiorów typu G_δ jest zbiorem typu G_δ. Analogicznie dla zbiorów typu F_σ.

Jeśli A i B są mierzalne, to istnieją zbiory F,H typu F_σ i zbiory C,D miary zero takie, że $A=F\cup C$ i $B=H\cup D$. Wobec tego

$$A\times B=F\times H\cup\big[F\times D\cup C\times H\cup C\times D\big],$$

czyli zbiór $A\times B$ jest sumą zbioru $F\times H$ typu F_σ i zbioru $F\times D\cup C\times H\cup C\times D$, którego miara jest równa zero, zatem jest mierzalny.

Niech B będzie ustalonym przedziałem. Niech $\nu(A)=\frac{\ell_{k+l}(A\times B)}{\ell_l(B)}$. Jasne jest, że ν jest miarą przesuwalną określoną na rodzinie zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli A jest przedziałem, to $\nu(A)=\frac{\ell_{k+l}(A\times B)}{\ell_l(B)}=\frac{\ell_k(A)\cdot\ell_l(B)}{\ell_l(B)}=\ell_k(A)$. Stąd wynika, że dla wszystkich zbiorów mierzalnych A mamy $\nu(A)=\ell_k(A)$, zatem $\ell_{k+l}(A\times B)= =\ell_k(A)\cdot\ell_l(B)$ dla wszystkich zbiorów mierzalnych A i wszystkich przedziałów B.

Niech teraz $A\subseteq\mathbb{R}^k$ będzie dowolnym zbiorem mierzalnym, którego miara jest różna od 0. Definiujemy $\mu(B)=\frac{\ell_{k+l}(A\times B)}{\ell_l(A)}$. μ jest miarą przesuwalną określoną na rodzinie zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli B jest przedziałem, to $\mu(B)=\ell_l(B)$. Z twierdzenia o jednoznaczności miary Lebesgue'a wynika, że $\mu(B)=\ell_l(B)$ dla wszystkich zbiorów mierzalnych B. ■

Zakończymy opowiadanie o miarach twierdzeniami, których nie wykorzystujemy w wykładzie, ale które mają jednak duże znaczenie, m. in. w rachnuku prawdopodobieństwa.

Lemat 7.32 (o generowaniu ciała przeliczalnie addytywnego)
Jeśli $\mathcal{F}\subseteq 2^{\mathbb{X}}$ jest ciałem zbiorów, to najmniejszym σ–ciałem zbiorów $\sigma(\mathcal{F})$ zawierającym $\mathcal{F}$ jest najmniejsza rodzina zbiorów $\mathcal{G}\supseteq\mathcal{F}$ spełniająca oba warunki:

a. jeśli $A\in\mathcal{G}$, to $X\setminus A\in\mathcal{G}$,

b. jeśli $A_i\cap A_j=\emptyset$ dla $i\neq j$ oraz $A_n\in\mathcal{G}$ dla $n\in\mathbb{N}$, to $\bigcup_n A_n\in\mathcal{G}$.

Dowód. Niech $\mathcal{G}(B)=\{A\in\mathcal{G}\colon \quad A\cup B\in\mathcal{G},\ A\cap B\in\mathcal{G},\ A\setminus B\in\mathcal{G},\ B\setminus A\in\mathcal{G}\}$. Jeśli $A\in\mathcal{G}(B)$, to $(X\setminus A)\cup B=X\setminus(A\setminus B)\in\mathcal{G}$, $(X\setminus A)\cap B=B\setminus A\in\mathcal{G}$, $(X\setminus A)\setminus B=X\setminus(A\cup B)\in\mathcal{G}$, $B\setminus(X\setminus A)=A\cap B\in\mathcal{G}$, więc $X\setminus A\in\mathcal{G}(B)$.

Niech $B\in\mathcal{G}$. Załóżmy, że $A_n\in\mathcal{G}(B)$ dla $n\in\mathbb{N}$ oraz $A_i\cap A_j=\emptyset$ dla $i\neq j$. Wtedy $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\big)\cup B=\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\setminus B)\big)\cup B\in\mathcal{G}$, bo zbiory $A_n\setminus B\in\mathcal{G}$ są parami rozłączne i nie mają wspólnych elementów ze zbiorem B. Mamy również $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\big)\cap B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap B)\in\mathcal{G}$. Mamy też $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)\setminus B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\setminus B)\in\mathcal{G}$ i wreszcie $B\setminus(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=B\setminus\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap B)\big)=B\cap\big(X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap B)\big)\in\mathcal{G}$. W ten sposób wykazaliśmy, że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{G}(B)$. Oznacza to, że jeśli $B\in\mathcal{F}$, to $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{G}(B)$, jako że $\mathcal{G}$ jest **najmniejszą** z rodzin zawierających $\mathcal{F}$, spełniających warunki **a** i **b.** Oznacza to, że $\mathcal{G}$ jest ciałem zbiorów.

Przeliczalna addytywność wynika teraz z tego, że jeśli $A_n \in \mathbb{N}$ dla każdego n, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup \big(A_2 \setminus A_1\big) \cup \big(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \cup \big(A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\big) \cup \ldots$ oraz $A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \in \mathcal{G}$. ■

Uwaga 7.33
Często zamiast warunku $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ (rozłączności zbiorów) używany jest warunek $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ (monotoniczności ciągu zbiorów). Czytelnik samodzielnie powinien udowodnić tę lekko zmienioną wersję lematu o generowaniu σ–ciała. Warto też nieco uprościć dowód lematu — można! ■

Twierdzenie 7.34 (o rozszerzaniu miary)
Jeśli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ jest ciałem zbiorów, $\mu\colon \mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$ taką skończenie addytywną miarą, że

a. jeśli $A_n \in \mathcal{F}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ i $A \in \mathcal{F}$, to zachodzi nierówność $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

b. istnieją takie zbiory $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$, że $\mu(B_n) < \infty$ i $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,[5]

to istnieje dokładnie jedna przeliczalnie addytywna miara $\tilde{\mu}\colon \sigma(\mathcal{F}) \longrightarrow [0,\infty]$ pokrywająca się z miarą μ na $\mathcal{F}$, tzn. $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$.

Dowód. Niech $\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j\in J} \mu(F_j)\colon \quad \bigcup_j F_j \supseteq A, \quad A \in \mathcal{F}, \quad \mathrm{card}(J) \leqslant \aleph_0\Big\}$, $\mathrm{card}(J)$ oznacza moc zbioru J, dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{X}$. Oczywiście $\mu^*(\emptyset) = 0$. Jasne jest również, że jeśli $A \subseteq B$, to $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. Wypada jeszcze stwierdzić, że dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{X}$ zachodzi nierówność $\mu^*(\bigcup A_n) \leqslant \sum \mu^*(A_n)$. Z definicji funkcji μ^* wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje taka, co najwyżej przeliczalna rodzina $\{F_{n,m}\}$, że $\mu^*(A_n) \leqslant \sum_m \mu^*(F_{n,m}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Ponieważ $\bigcup_{n,m} F_{n,m} \supseteq \bigcup_n A_n$, więc

$$\mu^*\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_{n,m} \mu^*(F_{n,m}) \leqslant \sum_n(\mu^*(A_n) + \tfrac{\varepsilon}{2^n}) = \big(\sum_n(\mu^*(A_n)\big) + \epsilon,$$

co wobec dowolności liczby dodatniej ε, dowodzi , że $\mu^*\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \big(\sum_n \mu^*(A_n)\big)$. Udowodniliśmy, że funkcja μ^* jest miarą zewnętrzną na $2^{\mathbb{X}}$. Z definicji μ^* wynika, że jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $\mu*(A) = \mu(A)$. Przyjmujemy $\tilde{\mu}(A) = \mu^*(A)$ dla każdego zbioru mierzalnego w sensie Carathéodory'ego.

Wykażemy, że wszystkie zbiory $\mathcal{F}$ są mierzalne w sensie Carathéodory'ego. Niech $Z \subseteq \mathbb{X}$ i niech $A \in \mathcal{F}$. Niech $Z \subseteq \bigcup_n F_n$, $F_n \in \mathcal{F}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zachodzi więc równość $\mu(F_n) = \mu(A \cap F_n) + \mu(F_n \setminus A)$, bo zbiory $A \cap F_n$ i $F_n \setminus A$ są rozłączne i są elementami ciała $\mathcal{F}$. Można więc napisać

$$\sum_n \mu(F_n) = \sum_n \mu(A \cap F_n) + \sum_n \mu(F_n \setminus A) \geqslant \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(Z \setminus A)$$

— $A\cap Z \subseteq (\bigcup_n (A\cap F_n)$ i $A\cap F_n \in \mathcal{F}$ oraz $Z\setminus A \subseteq \bigcup_n (F_n\setminus A)$ i $F_n\setminus A \in \mathcal{F}$. Ponieważ jest tak dla dowolnego pokrycia zbioru Z zbiorami z $\mathcal{F}$, więc $\mu^*(Z) \geqslant \mu^*(A\cap Z)+\mu^*(Z\setminus A)$,

[5] Jeśli przestrzeń jest sumą co najwyżej przeliczalnej rodziny zbiorów miary skończonej, to miarę nazywamy półskończoną lub σ–skończoną.

co dowodzi mierzalności w sensie Carathéodory'ego zbioru A. Jeśli $\bigcup_n F_n \supseteq A$ i $F_n \in \mathcal{F}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(F_n)$, zatem $\mu^*(A) \geqslant \mu(A)$. Ponieważ przeciwna nierówność wynika z definicji μ^*, więc $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Niech $\mu_1 \colon \sigma(\mathcal{F}) \longrightarrow [0,\infty]$ będzie taką miarą, że $\mu_1(A) = \mu(A)$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$. Wykażemy, że rodzina zbiorów $\mathcal{G}$, na których te miary $\tilde{\mu}$ i μ_1 pokrywają się, jest σ–ciałem zbiorów zawierającym $\mathcal{F}$. Definiujemy

$$\mathcal{G}_n = \{A \subseteq \mathbb{X}\colon \quad A \cap B_n \in \sigma(\mathcal{F}) \ \text{ i } \ \tilde{\mu}(A \cap B_n) = \mu_1(A \cap B_n)\}.$$

Jeśli $A \in \mathcal{G}_n$, to $(\mathbb{X} \setminus A) \cap B_n = B_n \setminus (A \cap B_n) \in \sigma(\mathcal{F})$ oraz

$$\tilde{\mu}((\mathbb{X} \setminus A) \cap B_n) = \tilde{\mu}(B_n) - \tilde{\mu}(A \cap B_n) = \mu_1(B_n) - \mu_1(A \cap B_n) = \mu_1((\mathbb{X} \setminus A) \cap B_n).$$

Oznacza to, że $\mathbb{X} \setminus A \in \mathcal{G}_n$.

Załóżmy, że $A_m \in \mathcal{G}_n$, dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Otrzymujemy więc

$$\tilde{\mu}\big(B_n \cap \textstyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\big) = \sum_m \tilde{\mu}\big(B_n \cap A_m\big) = \sum_m \mu_1\big(B_n \cap A_m\big) = \mu_1\big(B_n \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big),$$

zatem dla rodziny $\mathcal{G}_n$ są spełnione oba warunki **a** i **b** lematu o generowaniu przeliczalnie addytywnego ciała zbiorów. Oczywiście $\mathcal{G}_n \supseteq \mathcal{F}$. Wobec tego $\mathcal{G}_n \supseteq \sigma(\mathcal{F})$.

Dowód kończymy stwierdzeniem, że można przyjąć, że zbiory $B_1, B_2, \ldots$ są parami rozłączne (zastąpiwszy je w razie potrzeby zbiorami B_1, $B_2 \setminus B_1$, $B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$, ...). To pozwala napisać równość $\tilde{\mu}(A) = \sum_n \tilde{\mu}(A \cap B_n) = \sum_n \mu_1(A \cap B_n) = \mu_1(A)$ dla dowolnego $A \in \sigma(\mathcal{F})$ i w ten sposób zakończyć rozumowanie. ■

Następne twierdzenia dotyczą miary określanej na produkcie dwu przestrzeni z miarą. To bardzo ważna operacja i tylko z braku czasu nie poświęcamy jej więcej uwagi w trakcie zajęć.

Dalej $\mathbb{X}$ I $\mathbb{Y}$ oznaczają przestrzenie z wyróżnionymi przeliczalnie addytywnymi ciałami $\mathfrak{M} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ i $\mathfrak{N} \subseteq 2^{\mathbb{Y}}$.

Definicja 7.35 (ciała i przeliczalnie addytywnego ciała produktowego)
Ciałem produktowym $\mathfrak{M} \times_a \mathfrak{N}$ nazywamy najmniejsze ciało zbiorów zawierające wszystkie zbiory postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$.
Przeliczalnie addytywnym ciałem produktowym $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ nazywamy najmniejsze przeliczalnie addytywne ciało zbiorów zawierające wszystkie zbiory postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$. ■

Można łatwo zauważyć, że $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ oraz że te równość można uogólnić zastępując część wspólną dwóch zbiorów częścią wspólną dowolnej liczby zbiorów (również nieskończenie wielu). Mamy też

$$(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) \setminus (A \times B) = \big((\mathbb{X} \setminus A) \times \mathbb{Y}\big) \cup \big(A \times (\mathbb{Y} \setminus B)\big).$$

Stąd bez trudu (szczegóły zechce Czytelnik uzupełnić samodzielnie) wyprowadzamy

Stwierdzenie 7.36 (o postaci elementów ciała produktowego)
Ciało produktowe $\mathfrak{M} \times_a \mathfrak{N}$ składa się ze zbiorów postaci

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup \ldots \cup (A_m \times B_m),\ m \in \mathbb{N},$$

przy czym można zakładać, że $A_i \cap A_j = \emptyset$, gdy $i \neq j$. ■

Czytelnik zechce zastanowić się nad tym dlaczego podobne twierdzenie nie jest prawdziwe w wypadku ciała przeliczalnie addytywnego — zastąpienie sum skończonych nieskończonymi niestety nie ratuje sytuacji.

Twierdzenie 7.37 (o mierze produktowej)
Załóżmy, że dane są dwie przeliczalnie addytywne miary $\mu\colon M \longrightarrow [0,\infty]$ oraz $\nu\colon N \longrightarrow [0,\infty]$, obie półskończone, to na przeliczalnie addytywnym ciele produktowym $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ można określić dokładnie jedną taką miarę $\mu\times\nu\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \longrightarrow [0,\infty]$, że $\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ dla dowolnych zbiorów $A\in\mathfrak{M}$, $B\in\mathfrak{N}$.

Miara $\mu\times\nu$ nazywana jest iloczynem kartezjańskim lub produktem miar μ i ν.

Dowód. Najpierw zdefiniujemy skończenie addytywną miarę na ciele zbiorów postaci $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\cup\ldots\cup(A_m\times B_m)$. Przyjmujemy

$$\mu\times\nu\big((A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\cup\ldots\cup(A_m\times B_m)\big)= \\ =\mu(A_1)\nu(B_1)+\mu(A_2)\nu(B_2)+\ldots+\mu(A_m)\nu(B_m).$$

Trzeba teraz sprawdzić, że wynik nie zależy od przedstawienia, które oczywiście nie jest jednoznaczne. Załóżmy, że $\bigcup_i A_i\times B_i=\bigcup_j C_j\times D_j$, przy czym po obu stronach równości znajduje się skończenie wiele składników oraz że zarówno zbiory $A_1,A_2,\ldots,A_r$ jak i zbiory $C_1,C_2,\ldots,C_s$ są parami rozłączne. Jeśli $A_i\cap C_j\neq\emptyset$, to oczywiście $B_i=D_j$. Możemy więc napisać

$$\bigcup_i A_i\times B_i=\bigcup_i\bigcup_j (A_i\cap C_j)\times B_i=\bigcup_i\bigcup_j (A_i\cap C_j)\times D_j=\bigcup_j C_j\times D_j.$$

Niektóre składniki mogą być puste, ale to nie przeszkadza w niczym. Z napisanej równości wnioskujemy, że

$$\sum_i \mu(A_i)\nu(B_i)=\sum_i\sum_j \mu(A_i\cap C_j)\nu(B_i)=\sum_i\sum_j \mu(A_i\cap C_j)\nu(D_j)=\sum_j \mu(C_j)\nu(D_j),$$

co dowodzi niezależności miary od przedstawienia zbioru w rozpatrywanej postaci. Addytywność miary jest natychmiastową konsekwencją określenia. Podobnie jest przeliczalną podaddytywnością — wystarczy dowieść, że jeśli $A\times B\subseteq\bigcup_n C_n\times D_n$, to $\mu(A)\nu(B)\leqslant\sum_n \mu(C_n)\nu(D_n)$, bo można założyć, że $C_i\cap C_j=\emptyset$ dla $i\neq j$ również wtedy gdy składniki po prawej stronie tej nierówności pochodzą z sumowanie nieskończenie wielu zbiorów będących sumami skończenie wielu produktów, szczególiki pozostawiamy Czytelnikom. Po tych stwierdzeniach stosujemy twierdzenie o rozszerzaniu miary. ■

Twierdzenie można bez istotnych zmian uogólnić na produkty skończenie wielu, np. m, przestrzeni z miarą. Można też też je udowodnić dla dla produktu nieskończenie wielu miar *probabilistycznych*, tj. takich, że $\mu_n(\mathbb{X}_n)=1$. W tej sytuacji zamiast iloczynów kartezjańskich postaci $A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$ rozpatrujemy ciało zbiorów złożone z iloczynów nieskończonych postaci $A_1\times A_2\times\ldots$ zakładając jednak, że dla dostatecznie dużych n zachodzi równość $A_n=\mathbb{X}_n$. Zajmować się tym jednak tu nie będziemy. Dodajmy jeszcze, że miara ℓ_{k+l} nie jest produktem miar ℓ_l i ℓ_l, bo jest określona na szerszym zbiorze. Aby miara produktowa stała się miarą Lebesgue'a trzeba ją uzupełnić, czyli dołączyć do dziedziny, czy do σ–ciała produktowego, podzbiory zbiorów miary 0, co wymusza też dołączenie innych zbiorów.

Kilka zadań

Zadanie 7.1 Dowieść, że każdy otwarty podzbiór dowolnej przestrzeni metrycznej jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych, więc jest zbiorem typu F_σ. Sformułować twierdzenie dualne dla zbiorów domkniętych.

Zadanie 7.2 Dowieść, że zbiór liczb algebraicznych nie jest zbiorem typu G_δ w przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}$ i jest zbiorem typu F_σ.

Zadanie 7.3 Podać przykład podzbioru borelowskiego przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}$, który nie jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych, ani też nie jest częścią wspólną przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych.

Definicja 7.38 π–układem nazywamy niepustą rodzinę zbiorów $\mathcal{P}$, która wraz ze zbiorami A, B zawiera ich część wspólną $A \cap B$.

Definicja 7.39 λ–układem nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{D} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$, która spełnia następujące warunki: $\emptyset \in \mathcal{D}$, jeśli $A \in \mathcal{D}$, to $\mathbb{X} \setminus A \in \mathcal{D}$, jeśli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ oraz $A_n \in \mathcal{D}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Zadanie 7.4 Podać przykład π–układu, który nie jest λ–układem oraz λ–układu, który nie jest π–układem.

Zadanie 7.5 Udowodnić, że jeśli rodzina podzbiorów zbioru $\mathbb{X}$ jest zarówno π–układem jak i λ–układem, to jest σ-ciałem zbiorów.

Zadanie 7.6 Udowodnić, że w definicji λ–układu trzeci warunek można zastąpić warunkiem: jeśli $A_n \in \mathcal{D}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Zadanie 7.7 Wykazać, że liczby $x \in [0,1]$, mające rozwinięcie dziesiętne, w którym nie pojawia się blok 2011, tworzą zbiór zerowej miary Lebesgue'a.

Zadanie 7.8 Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem miary Lebesgue'a dodatniej. Dowieść, że istnieją w zbiorze A dwie różne liczby, których różnica jest liczbą wymierną. [Wskazówka. Mogą się przydać pewne idee z przykładu (Vitaliego) zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.]

Zadanie 7.9 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą. Czy stąd wynika, że obraz (w przekształceniu f) każdego zbioru miary zero jest zbiorem miary zero?

Zadanie 7.10 Zbudować przykład funkcji $f\colon [0,1] \to [0,1]$ o własnościach: f jest ciągła; f jest ściśle rosnąca; prawie wszędzie (tj. poza pewnym zbiorem miary zero) f ma pochodną $f'(x) = 0$.

Zadanie 7.11 Wykazać, że $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ jest rodziną mocy kontinuum.
Można to zrobić np. definiując kolejno rodziny zbiorów: pierwsza — zbiory otwarte, druga — zbiory otwarte i ich uzupełnienia, trzecia — przeliczalne sumy elementów drugiej itd. Trzeba użyć liczb porządkowych i wykazać, że ta procedura ma koniec, oczywiście stosujemy indukcję pozaskończoną. Liczb porządkowych nieskończonych trzeba użyć ze względu na przeliczalne sumowania. ■

Zadanie 7.12 Wykazać, że liczba elementów skończonego ciała zbiorów jest potęgą liczby 2. Czy istnieje przeliczalne σ–ciało zbiorów? Podać przykład przeliczalnego ciała zbiorów. ■

Zadanie 7.13 Podać przykład świadczący o tym, że bez założenia, że miara co najmniej jednego ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ jest skończona teza twierdzenia o mierze części wspólnej zstępującego ciągu zbiorów przestaje być prawdziwa. ■

Zadanie 7.14 Skonstruować taki zbiór $A \subseteq [0,1]$ typu F_σ, że $l_1(A) = 1$ i $\mathrm{int}(A) = \emptyset$.

Zadanie 7.15 Literką T będziemy nazywać sumę 3 odcinków domkniętych o wspólnym początku, przy czym jedynym wspólnym punktem każdych dwóch jest wspomniany wspólny początek. $\mathcal{T}$ jest sumą pewnej rodziny parami rozłącznych literek T zawartych w $\mathbb{R}^2$. Wykazać, że $l_2(\mathcal{T}) = 0$.

Zadanie 7.16* Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma dodatnią miarę Lebesgue'a. Dowieść, że zbiór

$$A + A := \{x + y \colon \quad x, y \in A\}$$

zawiera pewien odcinek.

Zadanie 7.17 Wyjaśnić, czy prawdziwe jest twierdzenie: jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^k$ jest zbiorem mierzalnym takim, że część wspólna z dowolną podprzestrzenią wymiaru $k-1$ prostopadłą do wektora $\mathbf{e}_k$ ma $(k-1)$– wymiarową miarę 0, to $l_k(A) = 0$.

Zadanie 7.18 Niech B będzie zbiorem wszystkich tych liczb $x \in [0,1]$, dla których istnieją ściśle rosnące ciągi liczb naturalnych (p_n) i (q_n) takie, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{19/9}}$. Dowieść, że $l_1(B) = 0$.

Zadanie 7.19 Wykazać, $\ell_k(A) = \sup\{\ell_k(C) \colon \quad C \subseteq A, \quad C \text{ — zwarty}\}$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}_k$.

Zadanie 7.20* Udowodnić, że jeśli μ jest miarą borelowską (tzn. określoną na zbiorach borelowskich) na lokalnie zwartej przestrzeni $\mathbb{X}$, w której każdy zbiór otwarty jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów zwartych, $\mu(C) < \infty$ dla każdego zbioru zwartego $C \subseteq \mathbb{X}$, to μ jest miarą regularną, tzn.

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \colon \quad C \subseteq A, \quad C \text{ — zwarty}\}.$$

Zadanie 7.21 Podać przykład nieskończonego niemalejącego ciągu przeliczalnie addytywnych ciał zbiorów $(\mathfrak{M}_n)$ (czyli $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1}$), których suma nie jest σ–ciałem zbiorów.

Zadanie 7.22 Niech p, q będą liczbami dodatnimi, których suma jest równa 1, zaś $C \subseteq [0,1]$ zbiorem Cantora (standardowym). Wykazać, że istnieje dokładnie jedna taka miara μ_p określona na $\mathcal{B}(C)$, że dla każdego ciągu $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ zachodzi równość $\mu_p\Big(C \cap \big[2\sum_{i=1}^n \varepsilon_i 3^{-i}, 2\sum_{i=1}^n \varepsilon_i 3^{-i} + 3^{-n}\big]\Big) = \Pi_{i=1}^n\big(p \cdot \varepsilon_i + q \cdot (1 - \varepsilon_i)\big)$. Dowieść, że dla każdego $p \in (0,1)$ zachodzi równość $\mu_p(C) = 1$.

Zadanie 7.23* Symbolom μ_p, C nadano znaczenie w poprzednim zadaniu. Dowieść, że dla każdego $p \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ istnieje taki zbiór borelowski $B_p \in C$, że $\mu_p(B_p) = 1$ i jednocześnie $\mu_{0,5}(B_p) = 0$.

Zadanie 7.24* Niech $\mathbb{X}$ oznacza dowolną przestrzeń metryczną z metryką ϱ. Niech $\delta(A) = \sup\{\varrho(x,y)\colon \quad x, y \in A\}$ oznacza średnicę zbioru $A \subseteq \mathbb{X}$. Definiujemy wielkość $H_r^s(A) = \inf\{\sum \delta(U_i)^s\colon \quad \bigcup_i U_i \supseteq A, \quad \delta(U_i) \leqslant r\} \in [0,\infty]$.
Wykazać, że jeśli $r_1 < r_2$, to $H_{r_1}^s(A) \geqslant H_{r_2}^s(A)$. Niech $H^s(A) = \lim_{r\to 0} H_r^s(A)$.
Wykazać, że H^s jest zewnętrzną miarą metryczną na $2^{\mathbb{X}}$.
Wykazać, że jeśli $H^s(A) = 0$, to dla każdego $\tilde{s} > s$ zachodzi równość $H^{\tilde{s}}(A) = 0$.
Wykazać, że jeśli $H^s(A) > 0$, to dla każdego $\tilde{s} < s$ zachodzi równość $H^{\tilde{s}}(A) = \infty$.
Wymiarem Hausdorffa zbioru A nazywamy $\inf\{s\colon \quad H^s(A) = 0\}$.[6] Wykazać, że wymiar Hausdorffa przedziału (ze standardową metryką) jest równy 1.
Wykazać, że wymiar Hausdorffa zbioru Cantora (otrzymanego klasycznie, z metryką indukowaną przez standarową metrykę na przedziale $[0,1]$) jest równy $\log_3 2$.

Uwaga 7.40 Miara H^s rozpatrywana na zbiorach borelowskich zwana jest s-wymiarową miarą Hausdorffa. Miary te również z niecałkowitymi wykładnikami są używane do badania dziwnych zbiorów. Wymiar Hausdorffa to jedna z miar stopnia komplikacji zbioru. Fraktale to zbiory o niecałkowitym wymiarze Hausdorffa. Natknięto się na nie w XIX w. Dziś są bardzo modne, choć wiele osób używających słowa *fraktal* nie wie, czym jest wymiar Hausdorffa. ■

[6] Zmiana metryki powoduje na ogół zmianę wymiaru Hausdorffa zbioru nawet jeśli otrzymane przestrzenie metryczne są homeomorficzne