Ekstrema związane (warunkowe), mnożniki Lagrange'a

Ostatnio poprawiłem 6 grudnia 2014 r.
Duża część zadań pochodzi od dr Marcina Kuczmy

Poszukując ekstremów lokalnych i globalnych funkcji pomijaliśmy do tej pory jeden bardzo ważny przypadek. W wielu zagadnieniach między argumentami funkcji zachodzą pewne związki, często są one wyrażane za pomocą równości. Chcąc znaleźć odległość punktu od płaszczyzny rozpatrujemy funkcję „kwadrat odległości" jedynie na tej płaszczyźnie. Jeśli firma planuje swe wydatki i przeznacza część swych środków na płace, część na reklamę, część na zakup materiałów potrzebnych do produkcji itd, to suma tych wszystkich kwot jest ustalona, bo to są środki, które zostały przeznaczone na ten rodzaj produkcji. W bardziej zaawansowanych modelach dopuszcza się nierówności: suma wydatków nie może przekroczyć tego, czym firma dysponuje, ale też nie musi być równa jej zasobom finansowym. Oczywiście to tylko przykładowe zastosowania rozwijanej teorii do prymitywnej ekonomii, którą w skrócie zamierzamy teraz przedstawić. Istnieją znacznie poważniejsze przykłady w samej matematyce, jak też i w innych dziedzinach, w tym w ekonomii.

Teraz wypada przejść do poszukiwania ekstremów funkcji określonych co prawda na zbiorach otwartych, ale przy założeniu, że interesują nas jedynie punkty zbioru M zdefiniowanego jak w twierdzeniu o funkcjach uwikłanych za pomocą równania postaci $\mathbf{0} = F\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$. Przy poszukiwaniu ekstremów zawsze do tej pory formułowaliśmy najpierw warunek konieczny: zerowanie się pochodnej. W przypadku teraz rozpatrywanym będzie nieco inaczej, bowiem ograniczamy swe zainteresowanie do powierzchni k–wymiarowej w przestrzeni wymiaru l. Pochodna powinna w dalszym ciągu być równa 0, ale tylko w kierunku tej powierzchni! W kierunku prostopadłym może być niezerowa. Ten warunek można sformułować w terminach związanych z opisem powierzchni za pomocą układu równań czyli takiego opisu, o jakim jest mowa w twierdzeniu o funkcjach uwikłanych. Dzięki temu będziemy mogli uniknąć rozwiązywania układu równań i wyrażania funkcji $k+l$ zmiennych ograniczonej do powierzchni wymiaru k za pomocą właściwej liczby zmiennych, czyli k. Rozwiązywanie tego rodzaju układów równań bywa bardzo trudne a czasem jest wręcz niemożliwe, co mogłoby zmuszać do stosowania metod przybliżonych, niekiedy skomplikowanych.

Twierdzenie 4.1 (Lagrange'a o lokalnych ekstremach warunkowych[1])
Załóżmy, że funkcja $F\colon G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathbb{R}^l$ spełnia założenia twierdzenia o funkcjach uwikłanych w punkcie $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \in G_1 \times G_2$ oraz że funkcja różniczkowalna f przyjmuje w punkcie $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ wartość najmniejszą lub największą spośród przyjmowanych w zbiorze $M = \left\{\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\colon \quad F\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{0}\right\}$. Istnieją wtedy takie liczby $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$, że

$$\operatorname{grad} f\tbinom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \lambda_1 \operatorname{grad} F_1\tbinom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} + \lambda_2 \operatorname{grad} F_2\tbinom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} + \cdots + \lambda_l \operatorname{grad} F_l\tbinom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}},$$

więc $\operatorname{grad} f\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ jest prostopadły do przestrzeni $T_{\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}}M$.

Dowód.
Niech g oznacza funkcję, której istnienie jest zagwarantowane twierdzeniem o funkcjach uwikłanych, tj. funkcję, której wykresem jest fragment zbioru M złożony ze wszystkich jego punktów znajdujących się dostatecznie blisko punktu $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$, przy czym $\mathbf{q} = g(\mathbf{p})$.

[1] czasem zwanych związanymi, termin angielski: constrained maximum or minimum

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ jest największą wartością funkcji f. Wtedy funkcja przypisująca punktowi $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ liczbę $f\binom{\mathbf{x}}{g(\mathbf{x})}$ ma największą wartość w punkcie $\mathbf{p}\in U$, zbiór U otwarty (w $\mathbb{R}^k$), zawierający punkt $\mathbf{p}$ jest dziedziną funkcji g. Wobec tego gradient funkcji f w tym punkcie musi być wektorem zerowym czyli musi zachodzić równość $\mathbf{0}=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}+\frac{\partial f}{\partial\mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\cdot Dg(\mathbf{p})$. Zbiór wektorów $\mathbf{v}$, dla których zachodzi równość $\mathbf{0}=\mathbf{v_x}+\mathbf{v_y}\cdot Dg\,(\mathbf{p})$,[2] jest podprzestrzenią linową wymiaru l. Wynika to z tego, że dla każdego wektora $\mathbf{v_y}\in\mathbb{R}^l$ można przyjąć $\mathbf{v_x}=-\mathbf{v_y}Dg\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$. Jasne jest, że bazą tej przestrzeni liniowej są wiersze macierzy $DF\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ — są one liniowo niezależne, bo rząd tej macierzy równy jest l, więc liczbie wierszy tej macierzy, spełniona jest też równość $\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}+\frac{\partial F}{\partial\mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}Dg(\mathbf{p})=\mathbf{0}$. Wobec tego każdy wektor z tej przestrzeni liniowej jest kombinacją liniową jej wierszy, zatem grad $f\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ też, a to właśnie mieliśmy wykazać. ■

Uwaga 4.2 *Liczby $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ nazywane są mnożnikami Lagrange'a. Funkcja L zdefiniowana za pomocą równości $L=f-\sum\lambda_iF_i$ lub $L=f+\sum\lambda_iF_i$ – funkcją Lagrange'a, w zależności od podręcznika. Nasze ujęcie jest bardzo geometryczne, dlatego z naszego punktu widzenia równość $L=f-\sum\lambda_iF_i$ jest bardziej naturalna. Wybór znaku jest oczywiście niestotny, bowiem można przecież zmienić odpowiednio znak wszystkich mnożników Lagrange'a.* ■

Pokażemy teraz na kilku przykładach, jak można za pomocą twierdzenia Lagrange'a do znajdować wartości największe i najmniejsze funkcji różniczkowalnych na zbiorach zadanych za pomocą układu równań, na ogół nieliniowych, ale spełniających założenia twierdzenia o funkcjach uwikłanych, więc niezależnych (każde równanie coś wnosi, np. zmienia wymiar zbioru rozwiązań, ale nie mamy tu na myśli liniowej niezależności, bo to pojęcie w sytuacjach nieliniowych nie ma zastosowania).

Przykład 4.3 Niech f będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x+3y-2z$ i niech $M=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\quad x^2+y^2+z^2-14=0,\ x+y+z=0\right\}$. Znajdziemy największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze M. Zbiór ten badaliśmy w poprzednim rozdziale (*Funkcje uwikłane* …). Stwierdziliśmy, że przy odpowiednim traktowaniu zmiennych, spełnione są założenia twierdzenia o funkcjach uwikłanych w każdym punkcie tego zbioru. Można więc stosować twierdzenie Lagrange'a. Zacznijmy jednak od stwierdzenia, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, M jest zbiorem zwartym (bo jest ograniczony jako zawarty w kuli o promieniu $\sqrt{14}$ i domknięty, bo zadany za pomocą równań, w których występują jedynie funkcje ciągłe), **zatem funkcja f przyjmuje w jakimś punkcie tego zbioru wartość najmniejszą i w jakimś punkcie zbioru M – wartość największą (z przyjmowanych na tym zbiorze).** Jeśli w pewnym punkcie $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ funkcja osiąga jeden ze swych kresów, to musi być tam spełniony warunek Lagrange'a, czyli musi być spełniony układ równań:

[2] W tych równościach wyjątkowo wektory zapisywane są poziomo zamiast pionowo, bo wektor $\mathbf{v}$ pojawił się tu w zastępstwie macierzy Df czyli wektora zapisanego poziomo.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 14 & (1.1)\\ x+y+z = 0 & (1.2)\\ 2 = \lambda_1\cdot 2x+\lambda_2 & (1.3)\\ 3 = \lambda_1\cdot 2y+\lambda_2 & (1.4)\\ -2 = \lambda_1\cdot 2z+\lambda_2 & (1.5)\end{cases}$$

Odejmując stronami równanie (1.4) od równania (1.3), następnie równanie (1.5) od równania (1.4) otrzymujemy równości $-1 = 2\lambda_1(x-y)$ oraz $5 = 2\lambda_1(y-z)$. Z każdej z nich wynika, że $\lambda_1 \neq 0$. Wobec tego $5(y-x) = y-z$: pomnożyliśmy pierwszą z tych równości przez -5, następnie napisaliśmy, że prawe strony tych równości są równe i podzieliliśmy wynik przez $2\lambda_1$. Do otrzymanego wzoru wstawiamy teraz $z = -x-y$, co wynika od razu z (1.2). Mamy więc $5(y-x) = 2y+x$, czyli $y = 2x$. Stąd i z (1.2) wynika, że $z = -3x$. Wobec tego z (1.1) mamy $14 = x^2+4x^2+9x^2$, więc $x = \pm 1$. Okazało się więc, że funkcja $2x+3y-2z$ może przyjmować ekstremalne wartości jedynie w punktach $\begin{pmatrix}+1\\+2\\-3\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}-1\\-2\\+3\end{pmatrix}$. W jednym z nich musi przyjąć wartość największą, a w drugim — najmniejszą. Mamy więc

$$2(-1)+3(-2)-3(+1) \le 2x+3y-2z \le 2(+1)+3(+2)-3(-3)$$

Znaleźliśmy więc wartość najmniejszą i największą funkcji $2x+3y-2z$ na zbiorze M.

Nadmienić wypada, że w tym konkretnym przypadku można się z łatwością obejść bez mnożników Lagrange'a i całej teorii. Wystarczy skorzystać z nierówności Schwarza:

$$2x+3y-2z \le \sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

pamiętając, że staje się ona równością wtedy jedynie, gdy istnieje liczba $t \ge 0$ taka, że $x = 2t$, $y = 3t$ i $z = -2t$. Analogicznie można poradzić sobie z oszacowaniem z dołu. ■

Przykład 4.4 Niech $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xyz$, $M = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} :\quad x+y+z = 5,\ x^2+y^2+z^2 \le 9\right\}$. Znajdziemy największą i najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze M. Zauważmy po pierwsze, że zbiór M jest zwarty, a funkcja f – ciągła, więc f w jakimś punkcie zbioru M ma wartość największą, a w innym — najmniejszą.

Wektory $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$, czyli gradienty funkcji, które definiują „brzeg" zbioru M, tzn. zbiór $\partial M = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} :\quad x+y+z = 5,\ x^2+y^2+z^2 = 9\right\}$, są w punktach tego zbioru liniowo niezależne, bowiem z ich linowej zależności, czyli równoległości wynikałoby, że $x = y = z$. Z równości $x+y+z = 5$ wnioskowalibyśmy, że $x = y = z = \frac{5}{3}$, ale wtedy $x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3} < 9$. Jeśli więc wartość ekstremalna przyjmowana jest w jednym z punktów zbioru ∂M, to musi być spełniony warunek Lagrange'a, czyli układ równań:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 & (2.1)\\ x+y+z = 5 & (2.2)\\ yz = \lambda_1\cdot 2x+\lambda_2 & (2.3)\\ xz = \lambda_1\cdot 2y+\lambda_2 & (2.4)\\ xy = \lambda_1\cdot 2z+\lambda_2 & (2.5)\end{cases}$$

Odejmując stronami równanie (2.3) od równania (2.4), równanie (2.4) od równania (2.5) otrzymujemy związki $z(y-x) = 2\lambda_1(x-y)$ oraz $x(y-z) = 2\lambda_1(z-y)$. Jeśli $x = y$, to $2x^2+z^2 = 9$ i $2x+z = 5$, zatem $9 = 2x^2+(5-2x)^2$, czyli $3x^2-10x+8 = 0$. Stąd $x = 2$ lub $x = \frac{4}{3}$, więc znaleźliśmy dwa punkty, w których f może ewentualnie przyjąć wartość ekstremalną, mianowicie: $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4/3\\4/3\\7/3\end{pmatrix}$. Analogicznie jeśli $y = z$, to otrzymujemy punkty: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7/3\\4/3\\4/3\end{pmatrix}$. Jeśli $x \neq y$ i jednocześnie $y \neq z$, to $z = -2\lambda_1 = x$, więc otrzymujemy punkty $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4/3\\7/3\\4/3\end{pmatrix}$. Wartościami funkcji f w tych punktach są odpowiednio $2\cdot 2\cdot 1 = 4$ oraz $\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{112}{27}$.
Być może f przyjmuje wartość największą lub najmniejszą w zbiorze M ale nie w zbiorze ∂M. Wtedy też musi być spełniony warunek Lagrange'a, ale teraz mamy do czynienia z jednym równaniem $x+y+z = 5$, więc układ złożony z równań i nierówności wygląda tak:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 < 9 & (2.n)\\ x+y+z = 5 & (2.6)\\ yz = \lambda & (2.7)\\ xz = \lambda & (2.8)\\ xy = \lambda & (2.9)\end{cases}$$

Jeśli $\lambda = 0$, to co najmniej dwie z liczb x, y, z muszą być równe 0, ale wtedy trzecia musi być równa 5, co jest niemożliwe, bo wtedy $x^2+y^2+z^2 = 25 > 9$. Wobec tego $\lambda \neq 0$. Wtedy jednak wszystkie liczby x, y, z są różne od 0 i $xy = yz = zx$, więc $x = y = z$, zatem $x = y = z = \frac{5}{3}$. Mamy oczywiście $x^2+y^2+z^2 = \frac{25}{3}$, więc warunki $(2.n) - (2.9)$ są spełnione. Wobec tego punkt $\begin{pmatrix}5/3\\5/3\\5/3\end{pmatrix}$ jest następnym podejrzanym o to, że w nim funkcja f przyjmuje jedną ze swych wartości ekstremalnych. Byłaby nią wtedy liczba $\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{125}{27}$. Jasne jest, że $\frac{125}{27} > \frac{112}{27} > \frac{108}{27} = 4$. Wobec tego największą wartością funkcji f spośród przyjmowanych w zbiorze M jest liczba $\frac{125}{27}$, a najmniejszą liczba 4.
Przy okazji stwierdziliśmy, że największą wartością funkcji f spośród przyjmowanych w zbiorze ∂M jest liczba $\frac{112}{27}$, a najmniejszą – liczba $\frac{108}{27} = 4$ ■

Uwaga 4.5 Pokażemy jak można w ostanim przykładzie znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f_{|\partial M}$ parametryzując ∂M, więc unikając tym samym mnożników Lagrange'a. Zbiór ∂M to okrąg o środku w punkcie $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ i promieniu $\frac{\sqrt{6}}{3}$, znajdujący się w płaszczyźnie $x+y+z = 5$. Wektory $\frac{1}{3}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$ i $\frac{1}{3}(1, 1, -2)$ mają długość $\frac{\sqrt{6}}{3}$, są wzajemnie prostopadłe oraz prostopadłe do wektora $(1, 1, 1)$. Wobec tego każdy punkt okręgu jest postaci $\frac{1}{3}(5,5,5)+\frac{1}{3}\cos t(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)+\frac{1}{3}\sin t(1,1,-2) := \varphi(t)$.
Naszym zadaniem jest znalezienie największej i najmniejszej wartości funkcji
$F(t) := x(t)\cdot y(t)\cdot z(t) = \frac{1}{27}(5+\sqrt{3}\cos t+\sin t)(5-\sqrt{3}\cos t+\sin t)(5-2\sin t) =$
$= \frac{1}{27}\big[25+10\sin t+\sin^2 t-3\cos^2 t\big](5-2\sin t) =$
$= \frac{1}{27}\big[22+10\sin t+4\sin^2 t\big](5-2\sin t) = \frac{1}{27}\big[110+6\sin t-8\sin^3 t\big].$

$0 = F'(t) = -\frac{8}{9}\sin^2 t\cos t + \frac{2}{9}\cos t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos t = 0$ lub $\sin t = \pm\frac{1}{2}$. Jeśli $\cos t = 0$, to $\sin t = 1$ lub $\sin t = -1$. W pierwszym przypadku $F(t) = 4$, w drugim $F(t) = \frac{112}{27}$. Te same wartości przyjmuje funkcja w punktach, w których $\sin t = -\frac{1}{2}$ i odpowiednio $\sin t = \frac{1}{2}$. Ponieważ funkcja F jest okresowa, więc osiąga swoje kresy, a ponieważ jest różniczkowalne, więc osiąga je w tych punktach, w których jej pochodna jest równa 0. Wobec tego $\sup F = \frac{112}{27}$ i $\inf f = 4$.

Zauważmy na koniec, że przekształcenie $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rozpatrywane na jakimkolwiek przedziale otwartym I, którego długość jest mniejsza niż 2π jest homeomorfizmem przedziału I na zbiór $\varphi(I) \subseteq \partial M$, przy czym, $\varphi(I)$ jest otwartym podzbiorem ∂M. Zauważmy jeszcze, że jeśli $\sin t = 1$, to $\varphi(t) = (2,2,1)$; Jeśli $\sin t = -1$, to $\varphi(t) = \big(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\big)$; jeśli $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin t = \frac{1}{2}$, to $\varphi(t) = \big(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\big)$; $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin t = -\frac{1}{2}$, to $\varphi(t) = \big(2,1,2\big)$; $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin t = \frac{1}{2}$, to $\varphi(t) = \big(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\big)$; $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin t = -\frac{1}{2}$, to $\varphi(t) = \big(1,2,2\big)$. Okazało się, że znaleźliśmy te same punkty na ∂M, które dała metoda Lagrange'a, co oczywiście musiało nastąpić. Podkreślmy, że metoda Lagrange'a pozwala znaleźć te punkty, w których pochodna złożenia $f\circ\varphi$ jest równa 0 bez rozpatrywania przekształcenia φ.[3] ■

Przykład 4.6 Niech $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x+y+z)e^{-x-2y-3z}$, M niech oznacza pierwszy oktant, tj. zbiór złożony z tych wszystkich punktów przestrzeni trójwymiarowej, których wszystkie trzy współrzędne są dodatnie. Wykażemy, że w zbiorze M funkcja f nie ma wartości najmniejszej ani największej[4] i znajdziemy jej kresy. Zauważmy przede wszystkim, że ponieważ wszystkie zmienne są dodatnie, to[5]

$$(x+y+z)e^{-x-2y-3z} < \frac{x+y+z}{e^{x+y+z}} < \frac{x+y+z}{(x+y+z)^2/2!} = \frac{2}{x+y+z}$$

Niech $D = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\quad x+y+z \le 10000, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$. Zbiór D jest oczywiście ograniczony i domknięty, zatem zwarty, więc funkcja ciągła f przyjmuje w nim wartość największą i najmniejszą. Najmniejsza to oczywiście 0, przyjmowana jest w punkcie $\mathbf{0}$. Największa nie może być mniejsza niż liczba $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3e^{-6} > 3^{-5} = \frac{1}{243} > \frac{2}{10000} > \frac{10000}{e^{10000}}$. Wobec tego:

albo największa wartość w zbiorze D jest przyjmowana wewnątrz zbioru D i wtedy gradient tej funkcji jest w tym punkcie wektorem zerowym,

albo w punkcie $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, którego przynajmniej jedna ze współrzędnych równa jest 0.

Zauważmy, że w tych punktach zbioru M, które leżą poza zbiorem D wartości funkcji f są mniejsze niż $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, zatem $\sup\limits_{x\in M} f(x) = \sup\limits_{x\in D} f(x)$.

Zachodzą równości:

[3] Ciekawe, ilu studentów potrafi znaleźć przekształcenie φ w czasie nie przekraczającym 5 minut.

[4] Nie ma powodu mieć. Jest co prawda ciągła, ale M nie jest zwarty, więc nic ich istnienia nie gwarantuje, choć również go nie wyklucza!

[5] $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots > \frac{t^2}{2!}$ dla $t > 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x-2y-3z}\,(1-x-y-z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x-2y-3z}\,(1-2x-2y-2z) \\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x-2y-3z}\,(1-3x-3y-3z) \end{cases}$$

Jest więc jasne, że wszystkie trzy pochodne cząstkowe, ani nawet dwie nie mogą być równe 0 w tym samym punkcie. Wobec tego największa wartość nie może być przyjmowana w punkcie wewnętrznym zbioru D. Jeśli np. jest przyjmowana w punkcie, w którym $z=0$ i jednocześnie $x\neq 0\neq y$, to dwie pierwsze pochodne cząstkowe muszą być równe 0, co również nie jest możliwe. Analogicznie nie jest możliwe, by wartość największa przyjmowana była w punkcie, w którym $y=0$ i $x\neq 0\neq z$, ani w punkcie, w którym $x=0$ i $y\neq 0\neq z$. Zostają tylko punkty, w których $x=y=0$ i $z\neq 0$ lub $x=z=0$ i $y\neq 0$ lub $y=z=0$ i $0\neq x$. Przyrównując odpowiednie pochodne cząstkowe do 0 otrzymujemy trzy punkty, w których funkcja f może ewentualnie przyjąć swą największą wartość w zbiorze D: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\frac12\\0\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac13\end{pmatrix}$. Wartościami funkcji f w tych punktach są liczby e^{-1}, $\frac12 e^{-1}$ i $\frac13 e^{-1}$. Największą z nich jest e^{-1}, więc ona jest największą wartością funkcji f w zbiorze D. Jest ona więc też kresem górnym zbioru wartości funkcji f w pierwszym oktancie. Kres ten nie jest osiągany, ale w punktach bliskich punktowi $(1,0,0)$ wartości są mu bliskie (bo f jest funkcją ciągła). Analogicznie kresem dolnym jest liczba 0, nie jest on osiągany, ale w punktach bliskich punktowi $\mathbf{0}$ lub w punktach w których suma $x+y+z$ jest bardzo duża, wartość funkcji f jest bardzo bliska 0. ∎

Przykład 4.7 Niech $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$, $a\in\mathbb{R}$, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, $M=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k\colon\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}+a=0\}$. Niech $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^p$ i niech $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2$. Wykażemy, że funkcja $f_{|M}$ osiąga kres dolny na swej dziedzinie M. Zbiór M jest niepusty, np. $\frac{-a}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}\in M$. W dalszym ciągu $\mathbf{q}\in M$. Jeśli $\mathbf{x}\notin\overline{B}(\mathbf{p},\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|)$, to $f(\mathbf{x})>f(\mathbf{q})$. Wynika stąd, że

$$\inf\{f(\mathbf{x})\colon\quad \mathbf{x}\in M\}=\inf\{f(\mathbf{x})\colon\quad \mathbf{x}\in M\cap\overline{B}(\mathbf{p},\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|)\}.$$

Zbiór $M\cap\overline{B}(\mathbf{p},\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|)$ jest domknięty i ograniczony, więc zwarty. Wobec tego funkcja $f_{|M}$ osiąga na nim kres dolny. Mamy $\operatorname{grad}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}+a)=\mathbf{v}$ oraz $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})=2(\mathbf{x}-\mathbf{p})$. Z twierdzenia Lagrange'a o ekstremach warunkowych wynika, że kres może być osiągany jedynie w takim punkcie $\mathbf{x}$, dla którego istnieje liczba λ, dla której zachodzi równość $2(\mathbf{x}-\mathbf{p})=\lambda\mathbf{v}$. Ponieważ $\mathbf{x}\in M$, więc $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=-a$. Musi więc zachodzić równość $\lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=2\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}=2(-a-\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})$, zatem $\lambda=\frac{-2(a+\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$. Wynika z tych rozważań, że jedynym kandydatem na punkt, w którym funkcja $f_{|M}$ przyjmuje swój kres dolny jest $\mathbf{p}-\frac{a+\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$. Ponieważ wiemy już, że kres ten jest wartością funkcji $f_{|M}$, więc tą najmniejszą wartością jest $\frac{(a+\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})^2}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$.

Czytelnik z pewnością widzi, że rozpatrywany zbiór M to $k-1$–wymiarowa podprzestrzeń afiniczna przestrzeni $\mathbb{R}^k$, liczba $f(\mathbf{x})$ to kwadrat odległości punktu $\mathbf{x}$ od punktu $\mathbf{p}$. Znaleźliśmy więc punkt podprzestrzeni M znajdujący się najbliżej danego punktu $\mathbf{p}$, czyli rzut prostopadły punktu $\mathbf{p}$ na podprzestrzeń M. Odległość punktu $\mathbf{p}$ od tego rzutu $\mathbf{p}-\frac{a+\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$ równa jest $\frac{|a+\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$. Otrzymany wzór znany jest w przypadku $k=2$ wielu studentom ze szkoły, niektórym również w przypadku $k=3$. Oczywiście wyprowadzanie tego wzoru za pomocą twierdzenia Lagrange'a to „strzelanie z armaty do wróbla", ale pokazaliśmy na tym prostym przykładzie, jak działa ta metoda. ∎

Przykład 4.8 Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_k$ zachodzi nierówność $\frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k}$, czyli dobrze znaną nierówność o średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej.

Zauważmy, że jeśli $t > 0$ i liczby $x_1, x_2, \ldots, x_k$ zastąpimy liczbami $tx_1, tx_2, \ldots, tx_k$ to obie strony nierówności zostaną pomnożone przez t. Można więc przyjąć dodatkowo, że zachodzi równość $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$, (jeśli tak nie jest, to wystarczy dane liczby $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pomnożyć przez liczbę $t = \frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_k}$). Dowód nierówności o średnich sprowadza się więc do wykazania, że kres górny funkcji f, zdefiniowanej za pomocą równości $f(\mathbf{x}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k$, na zbiorze

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \quad x_1, x_2, \ldots, x_k > 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1\},$$

nie jest większy niż 1. Zbiór M jest ograniczony, ale nie jest zwarty, bo nie jest domknięty. Rozważmy więc funkcję f na zbiorze

$$\overline{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \quad x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1\}.$$

Na tym zbiorze funkcja f osiąga swe kresy, ponieważ jest nieujemna, więc jej kres górny jest dodatni, zatem jest przyjmowany w pewnym punkcie $\mathbf{p} \in M \subset \overline{M}$. W tym punkcie musi być spełniony warunek Lagrange'a, tzn. musi istnieć liczba λ taka, że $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \lambda \operatorname{grad}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k - 1)$ dla $\mathbf{x} = \mathbf{p}$, czyli

$$p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \cdots \cdot p_k = \lambda,\ p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \cdots \cdot p_k = \lambda,\ \ldots,\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_{k-1} = \lambda.$$

Ponieważ współrzędne punktu $\mathbf{p}$ mają być różne od 0, więc muszą być równe. Wobec tego największą wartość na zbiorze $\overline{M}$ funkcja f przyjmuje w punkcie $\mathbf{p} = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})$. Wobec tego $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k \leq \frac{1}{k^k} = \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^k$ dla $\mathbf{x} \in M$ przy czym nierówność jest ostra, jeśli $x_i \neq x_j$ dla pewnych numerów i, j. ■

Przykład 4.9 Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$ zachodzi nierówność Höldera

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k \leq (x_1^p + x_2^p + \cdots + x_k^p)^{1/p}(y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q)^{1/q},$$

gdzie p i q oznaczają liczby dodatnie takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie zastąpienie liczb $x_1, x_2, \ldots, x_k$ liczbami $tx_1, tx_2, \ldots, tx_k$, $t > 0$, powoduje pomnożenie obu stron nierówności przez liczbę t. Można więc bez straty ogólności rozważań przyjąć, że $x_1^p + x_2^p + \cdots x_k^p = 1$. Wtedy prawa strona równa jest $(y_1^q + y_2^q + \cdots y_k^q)^{1/q}$. Wystarczy więc wykazać, że kres górny lewej strony przy ustalonym $\mathbf{y}$ nie przekracza tej liczby. Aby mieć do czynienia ze zbiorem zwartym definiujemy

$$M = \{\mathbf{x} : \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0,\ x_1^p + x_2^p + \cdots + x_k^p = 1\},$$

oraz $f(\mathbf{x}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k$.

Mamy $\operatorname{grad}(x_1^p + x_2^p + \cdots x_k^p - 1) = p(x_1^{p-1}, x_2^{p-1}, \ldots, x_k^{p-1}) \neq \mathbf{0}$, zatem możemy korzystać z twierdzenia Lagrange'a przynajmniej wtedy gdy $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0$. Powinna więc istnieć liczba λ taka, że $y_1 = \lambda p x_1^{p-1}$, $y_2 = \lambda p x_2^{p-1}$, $\ldots$, $y_k = \lambda p x_k^{p-1}$. Wobec tego dla każdego j musi być spełniona równość: $x_j^{p-1} = \frac{y_j}{\lambda p}$. Równości $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $q(p-1) = p$ są równoważne, zatem $x_j^p = \left(\frac{y_j}{\lambda p}\right)^q$. Z tej równości i $x_1^p + x_2^p + \cdots + x_k^p = 1$ wynika, że $\lambda p = \left(y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q\right)^{1/q}$. Jeśli więc funkcja f osiąga swój kres górny na zbiorze M w punkcie, którego wszystkie współrzędne są dodatnie, to $x_j^p = \frac{y_j^q}{y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q}$. Z tej równości wynika, że $x_jy_j = \left(\frac{y_j^{p+q}}{y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q}\right)^{1/p} = \frac{y_j^q}{(y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q)^{1/p}}$. Wobec tego $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k = \frac{y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q}{(y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q)^{1/p}} = (y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q)^{1/q}$. Wykazaliśmy zatem, że największa wartość funkcji f albo równa jest $(y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q)^{1/q}$ albo jest przyjmowana w punkcie $\mathbf{x}$, w którym jedna lub więcej współrzędnych równa jest 0. Jeśli np. $x_1 = 0$, to analogiczne rozumowanie prowadzi nas do wniosku, że albo największa wartość funkcji $x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ky_k$ jest przyjmowana w punkcie, w którym $x_2 > 0$, $x_3 > 0, \ldots, x_k > 0$ i jest wtedy równa

$$(y_2^q + y_3^q + \cdots + y_k^q)^{1/q} < (y_1^q + y_2^q + \cdots + y_k^q)^{1/q}$$

albo jest przyjmowana w punkcie, którego co najmniej dwie współrzędne są równe 0. Prosta indukcja kończy dowód. ■

Przykład 4.10 Wykażemy nierówność Hadamarda: $|\det(a_{i,j})| \le \sqrt{\prod_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}^2\Big)}$.

Wyjaśnimy najpierw sens geometryczny tej nierówności. Wartość bezwzględna wyznacznika macierzy kwadratowej to objętość (k–wymiarowa) równoległościanu k–wymiarowego, w naszej interpretacji należy myśleć o wierszach jak o wektorach wyznaczonych przez krawędzie tego równoległościanu. Twierdzenie mówi więc, że objętość równoległościanu nie przekracza objętości prostopadłościanu o tych samych krawędziach. Jest to więc twierdzenie z cyklu oczywistych, jednak podamy jego dowód nie korzystając z interpretacji geometrycznych, można powiedzieć: bo jeszcze nie zajmujemy się miarami w przestrzeniach euklidesowych.

Postąpimy jak w poprzednich przykładach. Zacznijmy od stwierdzenia, że pomnożenie jednego wiersza przez liczbę t powoduje pomnożenie obu stron nierówności przez liczbę $|t|$. Możemy więc założyć, że każdy wiersz to wektor o długości 1, tzn. dla każdego numeru i zachodzi równość $a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + \cdots + a_{i,k}^2 = 1$. W dalszym ciągu M oznacza zbiór takich właśnie macierzy. Mamy przy tym założeniu wykazać, że wartość wyznacznika jest liczbą z przedziału $[-1, 1]$.

Niech $g_m\big((a_{i,j})\big) = a_{m,1}^2 + a_{m,2}^2 + \cdots + a_{m,k}^2$ i niech $g = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$. Zbiór macierzy kwadratowych wymiaru k utożsamiamy z $\mathbb{R}^{k^2}$ w ten sposób, że pierwszy wiersz macierzy to pierwsze k współrzędnych punktu, następny wiersz to następne współrzędne punktu itd. (oczywiście nie zmieniamy kolejności w ramach wiersza).

Jeśli $g(\mathbf{a}) = (1, 1, \ldots, 1)$, to $Dg(\mathbf{a})$ jest epimorfizmem: w pierwszym wierszu macierzy $Dg(\mathbf{a})$ pojawiają się liczby różne od zera na co najmniej jednym z pierwszych k miejsc, na pozostałych $k^2 - k$ miejscach są zera; w drugim wierszu zera są wszędzie z wyjątkiem niektórych miejsc o numerach $k + 1, k + 2, \ldots, 2k$ i na co najmniej jednym z tych miejsc pojawia się liczba różna od zera; itd. Są więc spełnione założenia twierdzenia Lagrange'a.

Zachodzi wzór $\frac{\partial}{\partial a_{i,j}}(\det(a_{i,j})) = (-1)^{i+j}A_{i,j}$, gdzie $A_{i,j}$ jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy $(a_{i,j})$ przez wykreślenie i–tego wiersza i j–tej kolumny ($(-1)^{i+j}A_{i,j}$ to tzw. dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$). Wobec tego gradient funkcji $\det(a_{i,j})$ równy jest $\big((-1)^{i+j}A_{i,j}\big)$. Mamy też równość grad $g_m\big((a_{i,j})\big) = 2\big(\delta_{m,i}a_{i,j}\big)$, gdzie $\delta_{m,i}$ oznacza symbol Kroneckera, tj. $\delta_{m,i} = 1$, gdy $m = i$ oraz $\delta_{m,i} = 0$, gdy $m \neq i$. Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że jeśli w jakimś punkcie $A = (a_{i,j})$ wyznacznik osiąga największą wartość spośród osiąganych w zbiorze M, to muszą istnieć liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ takie, że

$$\text{grad }\big((a_{i,j})\big) = \sum_m \lambda_m \,\text{grad }g_m\big((a_{i,j})\big) \quad \text{czyli}$$

$$(-1)^{i+j}A_{i,j} = 2\lambda_i a_{i,j}$$

dla wszystkich i, j. Stąd wynika, że dla każdego m zachodzi równość

$$\det(a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{m+j}a_{m,j}A_{m,j} = \sum_{j=1}^{k}2\lambda_m a_{m,j}^2 = 2\lambda_m.$$

Wynika stąd, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \frac{1}{2}\det\big((a_{i,j})\big) = \frac{1}{2}\det(A)$. Z wzoru na macierz odwrotną do $A = (a_{i,j})$ i z równości $(-1)^{i+j}A_{i,j} = 2\lambda_i a_{i,j} = a_{i,j}\det(A)$ wynika, że jeśli $\det(A) \neq 0$, to $A^{-1} = A^T$. Wobec tego

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \big(\det(A)\big)^2,$$

zatem $\det A = 1$. Wystarczy teraz zauważyć, że zbiór M jest zwarty: jest ograniczony, bo jest zawarty w kuli o środku w punkcie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{k^2}$ i promieniu $\sqrt{k}$, jest domknięty jako przeciwobraz punktu przy odwzorowaniu ciągłym $g\colon \mathbb{R}^{k^2} \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Istnieją macierze, których wyznacznik jest równy 1, np. I oraz macierze których wyznacznik równy jest -1, np. macierz przekątniowa, na przekątnej której są same jedynki z wyjątkiem jednego miejsca, na którym znajduje się -1. Nierówność została wykazana.

Zauważmy jeszcze, że warunek $A^{-1} = A^T$ oznacza, że przekształcenie liniowe zdefiniowane za pomocą macierzy A jest izometrią (tzn. $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}|$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$), jeśli $\det(A) = 1$, to izometria zachowuje orientację $\mathbb{R}^k$ (niektórzy mówią: jest parzysta), jeśli $\det(A) = -1$, to izometria zmienia orientację (jest nieparzysta). ■

TERMINOLOGIA

Jeśli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest funkcją różniczkowalną ze zbioru G otwartego w przestrzeni $\mathbb{R}^k$, to

- punkty $\mathbf{x} \in G$, w których $Df(\mathbf{x})$ jest epimorfizmem nazywamy punktami regularnymi f;
- punkty $\mathbf{x} \in G$, które nie są regularne nazywamy krytycznymi;
- jeśli $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x}$ jest punktem krytycznym f, to punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ nazywamy wartością krytyczną f;
- jeśli $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ nie jest wartością krytyczną, to nazywamy je wartością regularną.

Zauważmy, że wartość regularna może w ogóle nie być wartością funkcji f. W przeciwobrazie wartości krytycznej *musi* znaleźć się co najmniej jeden punkt krytyczny, ale *mogą* się też znaleźć punkty regularne.

W przypadku zbioru M zdefiniowanego za pomocą układu równań $g_j = 0$, gdzie funkcje $g_1, g_2, \ldots, g_l$ są klasy C^1 i których gradienty w punktach zbioru M są liniowo niezależne (M jest rozmaitością, ale ogólniejsza definicja rozmaitości pojawi się w drugim semestrze) i funkcji $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 mówimy, że $\mathbf{p} \in M$ jest punktem krytycznym $f_{|M}$, jeśli spełniony jest warunek Lagrange'a, tzn. gdy istnieją liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ takie, że

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{p}) = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(\mathbf{p}) + \lambda_2 \operatorname{grad} g_2(\mathbf{p}) + \cdots + \lambda_l \operatorname{grad} g_l(\mathbf{p}).$$

Kilka zadań

Zadanie 4.1 Znaleźć maksimum i minimum funkcji f na zbiorze E, gdy
(a) $f(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\,;\ \ E=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$;
(b) $f(x,y)=4xy\,;\ \ E=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$;
(c) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 100\}$;
(d) $f(x,y,z)=x+y+z\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2\leq z\leq 1\}$;
(e) $f(x,y,z)=x-2y+2z\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\}$;
(f) $f(x,y,z)=xyz\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0\}$;
(g) $f(x,y,z)=xyz\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x+y+z=0\}$;
(h) $f(x,y,z)=xyz\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=1\}$;
(i) $f(x,y,z)=xyz\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x+y+z=1\}$;
(j) $f(x,y,z)=xyz\,;\ \ E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x+y+z\leq 1\}$;
(k) $f(x,y,z)=xy^2z^3\,;\ \ E=\{(x,y,z):x+y+z=6,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$;
(l) $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z\,;\ \ E=\{(x,y,z):x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$.
(ł) $f(x_1,x_2,\ldots,x_{10})=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_9x_{10}$,
$E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{10}):\quad x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10,\ x_1,x_2,\ldots,x_{10}\geq 0\}$
(m) $f(x_1,x_2,\ldots,x_{10})=x_1+x_2+\cdots+x_{10}$,
$E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{10}):\quad x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_9x_{10}=45,\ x_1,x_2,\ldots,x_{10}\geq 0\}$;

(n) $f(x,y)=\frac{x+y}{3x^2+y^2+1}$, $E=\mathbb{R}^2$.

Zadanie 4.2 Niech $A=\big\{(x,y,z):\quad x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x^2+y^2+z^2\leq 9\big\}$ oraz $f(x,y)=2yz+2xz+7xy$ Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze A.

Zadanie 4.3 Niech $f(x,y)=x^4+y^4$ i $g(x,y)=x^2+y^2-xy$. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze $B=\{(x,y):\quad g(x,y)=3\}$?

Zadanie 4.4 Znaleźć punkty na powierzchni $z=xy+5$, które znajdują się najbliżej punktu $(0,0,0)$.

Zadanie 4.5 Niech $K=\{(x,y,z):\quad x+y+z\leq 4,\ xyz\geq 2,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$. Obliczyć kres dolny i górny odległości punktu $(0,0,0)$ od punktów zbioru K.

Zadanie 4.6 Niech $f(x,y,z,u)=x^3+y^3+z^3+u^3$, $g_1(x,y,z,u)=x^2+y^2-xy$ oraz $g_2(x,y,z,u)=z^2+u^2-zu$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze $\{(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4:\quad g_1(x,y,z,u)=1=g_2(x,y,z,u)\}$.

Zadanie 4.7 Niech $f(x,y)=x^4+y^4$ i $g(x,y)=x^2+y^2-xy$. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze $B=\{(x,y):\quad g(x,y)=3\}$?

Zadanie 4.8 Definiujemy dwa zbiory: $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad z=x^2+y^2\}$, oraz $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad z=2x+2y-9\}$. Znaleźć takie punkty $\mathbf{p}_0\in A$ oraz $\mathbf{q}_0\in B$, by $\|\mathbf{p}_0-\mathbf{q}_0\|=\inf\{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|:\quad \mathbf{p}\in A,\ \mathbf{q}\in B\}$ lub wykazać, że takich punktów $\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0$ nie ma.

Zadanie 4.9 Znaleźć maksimum objętości prostopadłościanu o ścianach prostopadłych do osi układu współrzędnych wpisanego w elipsoidę $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Zadanie 4.10 Niech $\Omega = \{(x,y)\colon\ \ x^2{+}y^2 = 32\}$, $\Sigma = \{(x,y)\colon\ \ 3x^2+2xy+3y^2 = 8)\}$. Wyznaczyć najmniejszą odległość między punktami $(x,y)\in\Omega$ i $(u,v)\in\Sigma$.

Zadanie 4.11 Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie ściśle wypukłą funkcją klasy C^1. W obszarze $\Gamma_+ := \{(x,y,z)\colon\ \ z > f(x,y)\}$ prędkość światła jest równa c_1, a w obszarze $\Gamma_- := \{(x,y,z)\colon\ \ z < f(x,y)\}$ wynosi c_2. Promień światła wypuszczony z punktu $\mathbf{P}\in\Gamma_+$ przeszedł przez punkt $\mathbf{Q}\in\Gamma_-$ przecinając wykres $\Gamma := \{(x,y,z)\colon\ \ z = f(x,y)\}$ w takim punkcie $\mathbf{R} = \big(\mathbf{r}, f(\mathbf{r})\big)$, że czas potrzebny na przebycie drogi $\mathbf{PRQ}$ nie przekracza czasu potrzebnego na przebycie drogi $\mathbf{PXQ}$ niezależnie od wyboru punktu $\mathbf{X}\in\Gamma$. Niech $\mathbf{n}$ oznacza dowolny niezerowy wektory prostopadły do płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\mathbf{R}$. Niech $\varphi,\psi\in[0,\pi]$ oznaczają kąty między wektorem $\mathbf{n}$ oraz wektorami $\overrightarrow{\mathbf{PR}}$ i $\overrightarrow{\mathbf{QR}}$.
Wykazać, że wektory $\overrightarrow{\mathbf{PR}}$, $\overrightarrow{\mathbf{QR}}$ i $\mathbf{n}$ leżą w jednej płaszczyźnie i że $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{c_1}{c_2}$.

Zadanie 4.12 Znaleźć minimum sumy kwadratów 100 liczb dodatnich, których suma wynosi 200.

Zadanie 4.13 Znaleźć maksimum funkcji $P(x,y) = x^\alpha y^\beta$ wiedząc, że $\alpha{+}\beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ na zbiorze zdefiniowanym równością $ax+by = 1$ i nierównościami $x,y > 0$.

Zadanie 4.14 Znaleźć, że kres dolny funkcji $C(x,y) = ax+by$ na zbiorze zdefiniowanym równością $x^\alpha y^\beta = P$ i nierównościami $x,y > 0$, gdzie $\alpha+\beta = 1$.

Zadanie 4.15 Niech $K = \{(x,y,z)\colon\ \ x^2+y^2+5z^2 = 4,\ \ xy = 1,\ \ x,y > 0\}$. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości, przyjmowanych przez sumę $x+y+z$ na zbiorze K.

Zadanie 4.16 Niech $f(x,y,z) = x{+}y$ i $M = \{(x,y,z)\colon\ \ (x^2{+}y^2{+}z^2-5)^2{+}16z^2 = 16\}$. Dowieść, że M jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f_{|M}$, tzn. takie punkty $\mathbf{x}$, w których gradient ∇f jest prostopadły do płaszczyzny $T_{\mathbf{x}}M$ i wyjaśnić, w których z nich funkcja $f_{|M}$ ma lokalne maksimum, w których ma lokalne minimum, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

Zadanie 4.17 Niech $E = \{(x,y)\colon\ \ \ 9(x+5)^2+(y-44)^2 = 39^2\}$
$H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \ \ x^2-y^2 = 9\}$, $H_+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \ \ x^2-y^2 = 9,\ x > 0\}$.
Znaleźć $\inf\{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|\colon\ \ \ \mathbf{p}\in E,\ \mathbf{q}\in H\}$ oraz $\inf\{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|\colon\ \ \ \mathbf{p}\in E,\ \mathbf{q}\in H_+\}$.

Zadanie 4.18 Niech $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \ \ 4(x+5)^2+(y-16)^2 = 164\}$, $H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \ \ x^2-y^2 = 9\}$.
Znaleźć $\inf\{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|\colon\ \ \ \mathbf{p}\in E,\ \mathbf{q}\in H\}$ i wyjaśnić, czy ten kres dolny jest osiągany.

Zadanie 4.19 Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x,y,z) = x$ w zbiorze $A = \{(x,y,z)\colon\ \ \ x^2+2y^2+2z^2 = 8,\ \ x+y = z\}$.

Zadanie 4.20 Niech $E = \{(x,y,z)\colon\ x^2+4y^2+z^2 = 1,\ \ 3x^2+2y^2+2z^2 = 1\}$; $f(x,y,z) = 10x+6z$. Dowieść, że E jest rozmaitością (jakiego wymiaru?). Uzasadnić, że funkcja $f|_E$ osiąga w pewnym punkcie zbioru E swą wartość minimalną i obliczyć tę wartość.

Zadanie 4.21 Niech $A = \{(x,y,z,t)\colon\ x^2+y^2 \le 1,\ \ z^2+t^2 \le 1\}$;
$f(x,y,z,t) = 2xt + yz$; Czy zbiór A jest rozmaitością. Wykazać, że istnieje $\max f|_A$ i znaleźć tę liczbę.

Zadanie 4.22 Niech $P = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz = 1\}$; uzasadnić, że to rozmaitość. Wyznaczyć kres górny odległości punktów zbioru P od osi Oz.

Zadanie 4.23 Wyznaczyć kres dolny odległości punktu $(1,1,2)$ od punktów zbioru $\{(x,y,z)\colon\ xy+z^2 = 0\}$.

Zadanie 4.24 Wyznaczyć liczby $x_1,\ldots,x_n \ge 0$ o sumie równej 1, dla których wartość iloczynu $x_1x_2^2\ldots x_n^n$ jest największa.

Zadanie 4.25 W przestrzeni $\mathbb{R}^k$ rozważamy sferę $S = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k\colon\ \|\mathbf{x}\| = 1\}$ i funkcję postaci $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ dla $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)$, o współczynnikach $a_{ij}\in\mathbb{R}$; $a_{ij} = a_{ji}$ (forma kwadratowa symetryczna). Dowieść, że punkty, w których funkcja $f|_S$ osiąga swoje wartości ekstremalne, to są pewne wektory własne macierzy $[a_{ij}]$. Czym są mnożniki λ_i, które daje metoda Lagrange'a?

Zadanie 4.26 Niech $E = \{(x,y,z)\colon\ x^2+4y^2+z^2 = 1,\ \ 3x^2+2y^2+2z^2 = 1\}$. Dowieść, że E jest rozmaitością (jakiego wymiaru?).
Niech $f(x,y,z) = 10x+6z$ Uzasadnić, że funkcja $f|_E$ osiąga w pewnym punkcie zbioru E swą wartość minimalną i obliczyć tę wartość.

Zadanie 4.27 Niech $P = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz = 1\}$. Dowieść, że P jest rozmaitością. Wyznaczyć kres górny odległości punktów zbioru P od osi Oz.

Zadanie 4.28 Niech $0 < a < b$. Znaleźć liczby $x_1,x_2,\ldots,x_n$ tak, by wyrażenie

$$\frac{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)\cdot\ldots\cdot(x_n+b)}$$

było możliwie duże przy założeniu, że $a \le x_1 \le x_2 \le \ldots x_n \le b$.

Zadanie 4.29 Niech A będzie dowolną macierzą (niekoniecznie kwadratową). Dowieść liczba $\|A\|^2 = \|A\|_2^2$ jest największą spośród wartości bezwzględnych wartości własnych macierzy A^TA, a także macierzy AA^T — wymiary macierzy A^TA i AA^T są różne, jeśli macierz A nie jest kwadratowa. Wykazać, że wielomian charakterystyczny mniejszej z macierzy A^TA, AA^T jest dzielnikiem wielomianu charakterystycznego większej z nich.