Twierdzenia o funkcjach uwikłanych i odwracaniu funkcji

Ostatnio poprawiłem 6 grudnia 2014 r.
Duża część zadań pochodzi od dr Marcina Kuczmy

Definicja 3.1 (przestrzeni metrycznej zupełnej)
Przestrzeń metryczna X z metryką ϱ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów przestrzeni X, spełniającego warunek Cauchy'ego, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{k,l>n_\varepsilon}\varrho(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l)<\varepsilon\,,$$

istnieje $\mathbf{p}\in X$ takie, że $\mathbf{p}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$. ■

Przestrzeniami metrycznymi zupełnymi są np. $\mathbb{R}^k$ dla dowolnego k i podzbiory domknięte tych przestrzeni, przestrzeń $C([a,b])$ funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$, z metryką $\varrho(f,g)=\sup\big\{|f(x)-g(x)|:\quad x\in[a,b]\big\}$ (bo ciąg spełniający jednostajny warunek Cauchy'ego jest zbieżny jednostajnie i jego granica jest funkcją ciągłą). Podzbiory niedomknięte przestrzeni metrycznych, rozpatrywane jako przestrzenie metryczne są niezupełne. Jeśli bowiem zbiór A nie jest domknięty, to istnieje punkt $\mathbf{x}$ leżący poza tym zbiorem i będący granicą punktów tego zbioru: $\mathbf{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$. Wtedy jednak ciąg $(\mathbf{x}_n)$ nie ma granicy w zbiorze A. Wynika stąd np. że przedział otwarty nie jest przestrzenią metryczną zupełną, zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie jest przestrzenią metryczną zupełną.

Sformułujemy teraz twierdzenie zwane twierdzeniem Banacha o punkcie stałym. Banach zauważył, że to twierdzenie było wielokrotnie dowodzone w konkretnych sytuacjach i podał sformułowanie, które obejmuje wiele rozpatrywanych przypadków. W zastosowaniach często elementami przestrzeni metrycznej są pewne funkcje, przekształcenie jest związane na ogół z jakimś równaniem funkcyjnym, a punkt stały (zob. niżej) jest rozwiązaniem tego równania funkcyjnego.

Twierdzenie 3.2 (Banacha o odwzorowaniu zwężającym (kontrakcji))
Jeśli X jest przestrzenią metryczną zupełną a $F\colon X\longrightarrow X$ przekształceniem zwężającym, tzn. spełniającym warunek Lipschitza ze stałą L mniejszą od 1, to F ma dokładnie jeden punkt stały, tzn. istnieje dokładnie jeden punkt $\mathbf{p}\in X$ taki, że $F(\mathbf{p})=\mathbf{p}$.

Dowód. Niech $\mathbf{x}\in X$ będzie dowolnym punktem przestrzeni. Niech $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{x}_{n+1}=F(\mathbf{x}_n)$. Z warunku Lipschitza wynika, że $\varrho(\mathbf{x}_{n+2},\mathbf{x}_{n+1})\leq L\varrho(\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_n)$. Łatwa indukcja przekonuje nas, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\varrho(\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_n)\leq L^n\varrho(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0)$. Niech k,n będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Mamy
$$\varrho(\mathbf{x}_{n+k},\mathbf{x}_n)\leq\varrho(x_{n+k},\mathbf{x}_{n+k-1})+\varrho(\mathbf{x}_{n+k-1},\mathbf{x}_{n+k-2})+\cdots+\varrho(\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_n)\leq$$
$$\leq\varrho(x_1,\mathbf{x}_0)\big(L^{n+k-1}+L^{n+k_2}+\cdots+L^n\big)\leq\tfrac{L^n}{1-L}\varrho(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$
Wynika stąd, że ciąg $(\mathbf{x}_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny. Zdefiniujmy $\mathbf{p}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$. Dzięki ciągłości F zachodzą równości:
$$F(\mathbf{p})=F(\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n)=\lim_{n\to\infty}F(\mathbf{x}_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{p}.$$
Jeśli dla pewnego $\widetilde{\mathbf{p}}$ zachodzi też $F(\widetilde{\mathbf{p}})=\widetilde{\mathbf{p}}$, to $\varrho(\mathbf{p},\widetilde{\mathbf{p}})=\varrho(F(\mathbf{p}),F(\widetilde{\mathbf{p}}))\leq L\varrho(\mathbf{p},\widetilde{\mathbf{p}})$. Ponieważ $1>L\geq0$, więc ostatnia nierówność może zachodzić jedynie w przypadku $\varrho(\mathbf{p},\widetilde{\mathbf{p}})=0$, czyli gdy $\mathbf{p}=\widetilde{\mathbf{p}}$. ■

Uwaga 3.3 (o ciągłej zależności punktu stałego, M.W.Hirsh, C.C.Pugh, 1968)
Jeśli $F\colon X \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem zwężającym ze stałą Lipschitza $L<1$, $F(\mathbf{p})=\mathbf{p}$, $G\colon X\to X$ jest przekształceniem takim, że $\varrho(F(\mathbf{x}),G(\mathbf{x}))\le\varepsilon$ dla każdego $\mathbf{x}\in X$ zaś $\mathbf{q}$ jest punktem stałym przekształcenia G, czyli $G(\mathbf{q})=\mathbf{q}$, to $\varrho(\mathbf{p},\mathbf{q})\le\frac{\varepsilon}{1-L}$.

Dowód. Oszacowanie wynika z nierówności
$\varrho(\mathbf{p},\mathbf{q})=\varrho(F(\mathbf{p}),G(\mathbf{q}))\le\varrho(F(\mathbf{p}),F(\mathbf{q}))+\varrho(F(\mathbf{q}),G(\mathbf{q}))\le L\varrho(\mathbf{p},\mathbf{q})+\varepsilon.$ ■

Ja oczywiście nie wiem, czy tej uwagi nie napisał ktoś wcześniej, ale w jawnej formie występuje ona w pracy panów, których nazwiska wymieniłem.

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym jest nie tylko narzędziem za pomocą, którego można wykazywać istnienia i jednoznaczności rozwiązań pewnych równań. W licznych przypadkach rozpatrywany w jego dowodzie ciąg $(\mathbf{x}_n)$ jest ciągiem, który nadaje się do praktycznego przybliżenia rozwiązania interesującego nas równania, jego wyrazy nazywamy kolejnymi przybliżeniami punktu $\mathbf{p}$. Możemy szacować błąd. Ciąg (L^n) jest zbieżny do 0 dostatecznie szybko na to, by przybliżanie punktu $\mathbf{p}$ wyrazami ciągu $(\mathbf{x}_n)$ mogło mieć praktyczne znaczenie.

Przejdziemy teraz do jednego z najważniejszych twierdzeń tego wykładu.

Twierdzenie 3.4 (o odwracaniu funkcji)
Niech $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}^l$ będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie zbioru otwartego $G\subset\mathbb{R}^k$, niech przekształcenie $Df\colon G\longrightarrow\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^l\right)$ będzie ciągłe i niech dla pewnego punktu $\mathbf{p}\in G$ różniczka $Df(\mathbf{p})$ będzie liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^l$. Wtedy istnieje zbiór otwarty $U\subset G$, taki że

(i) $\mathbf{p}\in U$ i funkcja f przekształca zbiór U na otwarty podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^l$,

(ii) funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze U,

(iii) funkcja $\left(f_{|U}\right)^{-1}$ odwrotna do ograniczenia $f_{|U}$ funkcji f do zbioru U jest różniczkowalna i jej pochodne cząstkowe są ciągłe w punktach zbioru $f(U)$.

Dowód. Przestrzenie $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^l$ są izomorficzne, zatem $k=l$. Zdefiniujmy pomocnicze przekształcenie g wzorem $g(\mathbf{x})=\big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}\big(f(\mathbf{p}+\mathbf{x})-f(\mathbf{p})\big)$. Mamy $g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ oraz $Dg(\mathbf{0})=\big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}Df(\mathbf{p})=I$. Liniowy izomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}^k$ na siebie przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte, wynika to np. z twierdzenia o oszacowaniu minimalnego stopnie rozciągania izomorfizmu (amcz1 prawie na końcu). Przesunięcie też ma tę własność. Wobec tego wystarczy wykazać twierdzenie w przypadku przekształcenia g. określonego w pewnym otoczeniu H punktu $\mathbf{0}$. Potem złożyć je z liniowym izomorfizmem $Df(\mathbf{p})$ a następnie z przesunięciem o wektor $f(\mathbf{p})$. Niech $g(\mathbf{x})=\mathbf{x}+r(\mathbf{x})$. Ponieważ $Dg(\mathbf{0})=I$, więc $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}=\mathbf{0}$. Mamy też $Dg(\mathbf{x})=I+Dr(\mathbf{x})$, zatem $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}Dr(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, więc również $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\|Dr(\mathbf{x})\|=0$. Istnieje więc taka liczba $\delta>0$, że jeśli $\|\mathbf{x}\|\le\delta$, to $\|Dr(\mathbf{x})\|<\frac12$, przy czym dziedzina odwzorowania g zawiera kulę $\overline{B}(\mathbf{0},2\delta)$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że $\|r(\mathbf{x})-r(\mathbf{y})\|\le\frac12\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ dla $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$. Wykażemy, że istnieje taka funkcja $\gamma\colon\overline{B}(\mathbf{0},\delta)\longrightarrow\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$, że dla każdego $\mathbf{x}\in\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ zachodzi równość $g(\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x}))=\mathbf{x}$, co oznacza, że na kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ prawdziwy jest wzór $g^{-1}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x})$. Wynika stąd automatycznie, że kula $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$

zawarta jest w obrazie przekształcenia g, dokładniej w obrazie kuli $\overline{B}(\mathbf{0},2\delta)$ przy przekształceniu g. Równanie $\mathbf{x}=g(\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x}))=\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x})+r(\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x}))$ równoważne jest równaniu $\gamma(\mathbf{x})=-r(\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x}))$. Dla ustalonego $\mathbf{x}\in\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ i $\mathbf{y}\in\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ niech

$$G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=-r(\mathbf{x}+\mathbf{y}). \tag{$*$}$$

Mamy $\|G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|=\|-r(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|\le\frac{1}{2}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|\big)\le\delta$, więc $G_{\mathbf{x}}$ przekształca kulę $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ w siebie. Dalej: $\|G_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_1)-G_{\mathbf{x}}(y_2)\|=\|r(\mathbf{x}+\mathbf{y}_2)-r(\mathbf{x}+\mathbf{y}_1)\|\le\frac{1}{2}\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\|$, więc na mocy twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym $G_{\mathbf{x}}$ ma dokładnie jeden punkt stały $\gamma(\mathbf{x})$ w kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$. W ten sposób zdefiniowaliśmy przekształcenie γ: punktowi $\mathbf{x}$ przypisujemy punkt stały przekształcenia $G_{\mathbf{x}}$. Zachodzi nierówność $\|r(\mathbf{x}_1)-r(\mathbf{x}_2)\|\le\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$. Z niej i z uwagi o ciągłej zależności punktu stałego wynika ciągłość przekształcenia γ. Z twierdzenia o różniczce funkcji odwrotnej wynika, że funkcja ciągła g^{-1} jest różniczkowalna na kuli otwartej $B(\mathbf{0},\delta)$. Zbiór U może być określony jako $g^{-1}\big(B(\mathbf{0},\delta)\big)$. Dowód został zakończony. ■

Uwagi o dowodzie

1° Różnowartościowość funkcji g na kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ jest oczywista. Z lipschitzowskości funkcji g wynika bowiem nierówność

$$\|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{y})\|\ge\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|r(\mathbf{x})-r(\mathbf{y})\|\ge\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\tfrac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\tfrac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,$$

a z tego już łatwo wynika różnowartościowość g na kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$. Obraz kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ zawiera punkty odległe o δ, bo w co najmniej takiej odległości muszą się znaleźć obrazy końców średnicy kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$. Sugeruje to, że obraz kuli $B(\mathbf{0},\delta)$ zawiera pewną kulę o promieniu $\ge\frac{1}{2}\delta$. Jednak główna trudność dowodu właśnie na tym polega, by wykazać, że tak jest w rzeczywistości, twierdzenie Banacha zostało użyte właśnie po to, by wykazać, że przekształcenie g^{-1} może być określone na zbiorze otwartym.

2° Zamiast przekształcenia G określonego na kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\delta)$ można rozważyć przekształcenie na zbiorze złożonym z funkcji, mianowicie

$$\Gamma\colon C\big(\overline{B}(\mathbf{0},\delta);\overline{B}(\mathbf{0},\delta)\big)\longrightarrow C\big(\overline{B}(\mathbf{0},\delta);\overline{B}(\mathbf{0},\delta)\big)$$

zdefiniowane za pomocą wzoru $\Gamma(\gamma)(\mathbf{x})=-r(\mathbf{x}+\gamma(\mathbf{x}))$. W zbiorze $C\big(\overline{B}(\mathbf{0},\delta);\mathbb{R}^l\big)$ norma zdefiniowana jest za pomocą wzoru $\|\gamma\|=\sup\big\{\|\gamma(\mathbf{x})\|:\quad\mathbf{x}\in\overline{B}(\mathbf{0},\delta)\big\}$. Bez trudu sprawdzamy, że Γ rzeczywiście przekształca zbiór $C\big(\overline{B}(\mathbf{0},\delta);\overline{B}(\mathbf{0},\delta)\big)$ w siebie, że jest przekształceniem zwężającym. Ma więc punkt stały. Zupełność przestrzeni $C\big(\overline{B}(\mathbf{0},\delta);\mathbb{R}^l\big)$ wynika z tego, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. I już nic nie trzeba dowodzić. Można więc ominąć dowodzenie ciągłości odwzorowania odwrotnego dobierając odpowiednio dziedzinę przekształcenia zwężającego: zamiast kuli k–wymiarowej można rozważać przestrzeń złożoną z funkcji. ■

Definicja 3.5 (dyfeomorfizmu podzbiorów otwartych przestrzeni euklidesowych)
Jeśli $G\subseteq\mathbb{R}^k$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^k$, to przekształcenie $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}^l$ nazywane jest dyfeomorfizmem klasy C^1, jeżeli zbiór $f(G)$ jest otwarty w przestrzeni $\mathbb{R}^l$, f jest różnowartościowe, f i f^{-1} są klasy C^1. ■

Dyfeomorfizm to inaczej homeomorfizm klasy C^1 podzbiorów otwartych przestrzeni euklidesowych, którego przekształcenie odwrotne jest również klasy C^1.

Z definicji dyfeomorfizmu wynika od razu, że wymiary dziedziny i jej obrazu muszą być równe, czyli $k=l$. Można wykazać bez większych trudności, że każde dwa zbiory otwarte i wypukłe w $\mathbb{R}^k$ są dyfeomorficzne. Koło otwarte i pierścień kołowy bez brzegu dyfeomorficzne nie są, ale dowód tego odłożymy do następnego semestru.

Twierdzenie 3.6 (o funkcjach uwikłanych)
Załóżmy, że odwzorowanie $f\colon G \mapsto \mathbb{R}^l$ jest klasy C^1 i przekształca otwarty podzbiór G przestrzeni $\mathbb{R}^{k+l}$ w przestrzeń $\mathbb{R}^l$. Niech $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \in G$ będzie takim punktem, że macierz utworzona z pochodnych $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$, $1 \le i,j \le l$ ma wyznacznik różny od 0 oraz $f\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Istnieją wtedy takie otoczenia U punktu $\mathbf{p}$ w $\mathbb{R}^k$ i V punktu $\mathbf{q}$ w $\mathbb{R}^l$, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ istnieje dokładnie jedno $\mathbf{y} \in V$, dla którego zachodzi równość $f\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$. Odwzorowanie $g\colon U \longrightarrow V$ określone wzorem $f\binom{\mathbf{x}}{g(\mathbf{x})} = \mathbf{0}$ jest klasy C^1 w zbiorze U.[1]

Dowód tego twierdzenia podamy nieco później. Spróbujemy natomiast objaśnić jego treść. Zauważmy na wstępie, że jeśli zbiory $G_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ i $G_2 \subseteq \mathbb{R}^l$ są otwarte, to $G_1 \times G_2$ jest otwarty w $\mathbb{R}^{k+l}$ oraz, że każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}^{k+l}$ zawierający punkt $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ zawiera zbiór postaci $G_1 \times G_2$ zawierający punkt $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$, czyli dowolny zbiór otwarty można zastąpić zbiorem tej postaci. Dalej będziemy zakładać, że $G = G_1 \times G_2$. Zaczniemy od bardzo prostych przykładów. Gdyby chodziło jedynie o tak proste sytuacje, nikt żadnych twierdzeń ogólnych by nie formułował z braku potrzeby.

Przykład 3.7 Niech $f\binom{x}{y} = ax + by + c$. Mamy więc $k = l = 1$. Funkcja f określona jest na całej płaszczyźnie, więc $G_1 = \mathbb{R} = G_2$. Załóżmy, że $0 \ne \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = b$. Przy tym założeniu z równania $ax + by + c = 0$ można wyznaczyć $y = -\frac{ax+c}{b}$, czyli określić funkcję g. W przypadku liniowym różniczka jest niezależna od punktu. Nie ma też ograniczeń ani w dziedzinie (można przyjąć $U = \mathbb{R}$) ani w zbiorze wartości (można przyjąć $V = \mathbb{R}$). Przykład ten wyjaśnić ma nazwę twierdzenia: chodzi o określenie funkcji przypisującej iksom igreki, z tym że wzór nie jest dany w jawnej postaci (łatwo osiągalnej w przypadku liniowym). Jasne jest, że w tym przypadku warunek $b \ne 0$ jest również konieczny dla istnienia funkcji g. ∎

Przykład 3.8 Niech teraz $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \binom{2x+5y+3z-2}{3x+3y+2z-5}$. Tym razem $k = 1$, $l = 2$. Mamy $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 5y + 3z - 2) = 5$, $\frac{\partial}{\partial z}(2x + 5y + 3z - 2) = 3$, $\frac{\partial}{\partial y}(3x + 3y + 2z - 2) = 3$, $\frac{\partial}{\partial z}(3x + 3y + 2z - 2) = 2$, zatem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ne 0\,.$$

Możemy więc spróbować określić wielkości y i z jako funkcje zmiennej x. Chcąc znaleźć konkretne wzory trzeba rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 5y + 3z = 2 - 2x \\ 3y + 2z = 5 - 3x \end{cases} \tag{w}$$

w którym to układzie y, z są niewiadomymi, a x pełni rolę parametru. Otrzymujemy wzory $y = 5x - 11$, $z = 19 - 9x$. Podobnie jak poprzednio nie są tu potrzebne żadne ograniczenia na argument x ani zmienne y, z. Warunek z twierdzenia o funkcjach uwikłanych to warunek na to, by układ (w) równań liniowych miał dokładnie jedno rozwiązanie przy ustalonym x. ∎

[1] Oczywiście funkcja g jest zdefiniowana w poprzednim zdaniu: każdemu $\mathbf{x} \in U$ odpowiada dokładnie jeden $\mathbf{y} \in V$ …– to zdanie określa funkcję, której dziedziną jest zbiór U i której wartości leżą w zbiorze V. Nazwa twierdzenia bierze się stąd, że funkcja g nie jest zdefiniowana wzorem postaci $g(\mathbf{x}) = \ldots$, lecz jej wartość w punkcie $\mathbf{x}$ spełnia pewne równanie. Termin angielski: Implicit Function Theorem.

Przykład 3.9 Należy zwrócić uwagę na to, że ograniczenie dotyczące możliwości wyboru punktu dotyczy zarówno otoczenia punktu $\mathbf{p}$ jak i otoczenia punktu $\mathbf{q}$. Bez któregokolwiek z tych ograniczeń teza przestaje być prawdziwa. By o tym przekonać się wystarczy rozważyć funkcję $f\binom{x}{y} = x^2+y^2-25$, tutaj $k = l = 1$, $G_1 = G_2 = \mathbb{R}$. Mamy $f\binom{3}{4} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 2y$, zatem pochodne cząstkowe funkcji f są ciągłe wszędzie. Mamy $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{3}{4} = 8 \neq 0$. Teza twierdzenia może być wypowiedziana w tym przypadku tak: jeśli x jest liczbą (punktem) dostatecznie bliską 3 (tzn. $x \in U$), to istnieje dokładnie jedna liczba y bliska 4 ($y \in V$) taka, że $f\binom{x}{y} = 0$. Oczywiście bez trudu stwierdzamy, że $y = \sqrt{25-x^2}$, zatem $g(x) = \sqrt{25-x^2}$. Można oczywiście przyjąć np. $U = (2,4)$, $V = (3,5)$ (albo $U = (-5,5)$ i $V = (0,+\infty)$). Bez ograniczenia możliwości wyboru liczby y nie ma jednoznaczności jej wyboru: zakładając jedynie, że $y \in \mathbb{R}$ możemy napisać $y = \pm\sqrt{25-x^2}$, więc wybór jest na ogół dwuznaczny, zatem nie ma jak zdefiniować funkcji g. Gdybyśmy chcieli włączyć do dziedziny funkcji g punkt -5 lub punkt 5, to równanie $f\binom{x}{y} = 0$ nie definiowałoby już liczby y jednoznacznie, przyczyną tego jest równość $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{\pm 5}{0} = 0$, czyli niespełnienie założeń twierdzenia. Ponieważ jednak $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{\pm 5}{0} = \pm 10 \neq 0$, więc w pewnym otoczeniu punktu $\binom{\pm 5}{0}$ można potraktować zbiór zdefiniowany równaniem $0 = f\binom{x}{y}$ jako wykres funkcji, której argumentami są igreki zaś wartościami iksy. [2] ∎

Przykład 3.10 Niech $f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \binom{x^2+y^2+z^2-14}{x+y+z}$. Równanie $f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \binom{0}{0}$ opisuje zbiór, który jak łatwo można zauważyć jest częścią wspólną sfery o równaniu $x^2+y^2+z^2 = 14$ i płaszczyzny o równaniu $x+y+z = 0$, która przechodzi przez punkt $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, tzn. przez środek sfery. Oczywiście mamy do czynienia z okręgiem. Nie będziemy go jednak parametryzować, tj. znajdować przekształcenia z pewnego przedziału na ten okrąg (lub jego część). Wykażemy jedynie, że opis za pomocą układu równań jest dostatecznie dobry w tym sensie, że są spełnione założenia twierdzenia o funkcjach uwikłanych w każdym punkcie tego okręgu po ewentualnej zmianie współrzędnej pełniącej rolę zmiennej niezależnej. Mamy $Df\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Przypomnijmy, że rząd macierzy to maksymalny wymiar wyznacznika różnego od 0, który można otrzymać wykreślając z niej pewną liczbę wierszy i kolumn. Jasne jest, że rząd macierzy $Df(\mathbf{p})$ jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, w innych przypadkach jest on równy 2. Jeśli jednak $x = y = z$ i jednocześnie $x+y+z = 0$, to $x = y = z = 0$ i wobec tego $x^2+y^2+z^2-14 \neq 0$, zatem we wszystkich punktach $\mathbf{p}$ zbioru zdefiniowanego równaniem $f(\mathbf{p}) = \binom{0}{0}$ macierz $Df(\mathbf{p})$ ma rząd 2. Wobec tego zbiór ten jest lokalnie wykresem funkcji zmiennej x lub zmiennej y lub zmiennej z. ∎

Dowód TFU korzystający z twierdzenia o odwracaniu funkcji.
Niech $F\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ f\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\end{pmatrix}$. Mamy $DF\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} id_k & 0_{l,k}\\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\end{pmatrix}$, gdzie id_k oznacza macierz

[2] Nie trzeba oczywiście zakładać, że konkretny wyznacznik wymiaru l jest różny od 0. Założyć należy, że pewien wyznacznik wymiaru l macierzy DF jest różny od 0 i wybrać odpowiednio zmienne, które będą pełnić rolę argumentów. Twierdzenie zostało tak wypowiedziane, by nie komplikować oznaczeń. Ten przykład pokazać ma jak należy zmienić tezę, jeśli zmodyfikowane zostały założenia.

identyczności działającej na $\mathbb{R}^k$, $0_{l,k}$ oznacza macierz zerową, która ma l wierszy i k kolumn, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$ oznacza macierz utworzoną z pochodnych cząstkowych funkcji f względem pierwszych k zmiennych (oznaczanych przez $\mathbf{x}$) i wreszcie $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$ oznacza macierz pochodnych cząstkowych funkcji f względem ostatnich l zmiennych. Z założenia macierz $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ ma wyznacznik różny od 0. Stąd wynika, że różniczka $DF\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ ma wyznacznik różny od 0, bo równy $\det(id_k)\cdot\det\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{y}_0}\right) = 1\cdot\det\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\right)$. Możemy więc skorzystać z twierdzenia o odwracaniu funkcji. Funkcja F ograniczona do dostatecznie małego zbioru otwartego zawierającego punkt $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ ma funkcję odwrotną, którą oznaczymy przez H. Z definicji funkcji odwrotnej wynika, że dla każdego $\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$ z jej dziedziny zachodzi równość $F(H\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}) = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$. Ponieważ F nie zmienia pierwszych k współrzędnych punktu i identyczność również ich nie zmienia, więc H również nie może ich zmienić. Istnieje więc funkcją h, taka że $H\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ h\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\end{pmatrix}$. Nas interesują punkty $\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$, takie że $f\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, czyli $F\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}$. Mamy $F(H\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}) = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$. Wobec tego $F(H\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}) = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}$, zatem $F\binom{\mathbf{x}}{h\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}} = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}$. Ponieważ F jest funkcją różnowartościową, więc $h\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}$ to jedyny możliwy wybór punktu $\mathbf{y}$, dla którego $F\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}$. Przyjmujemy $g(\mathbf{x}) = h\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{0}}$. Trzeba opisać otoczenia, na których rozpatrujemy funkcje F i H. Otóż otoczenia te można zmniejszać. Można więc przyjąć, po ewentualnym zmniejszeniu, że otoczenie punktu $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ jest postaci $U\times V$, a otoczenie punktu $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{0}}$ równe jest $F\binom{U}{V}$. ■

Dowód korzystający bezpośrednio z tw. o Banacha o odwzorowaniu zwężającym
Niech $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)_{\substack{1\le i\le k,\\ 1\le j\le l}}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)_{1\le i,j\le l}$, zatem $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$ jest macierzą, która ma l wierszy i k kolumn, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$ jest macierzą kwadratową, która ma l kolumn i tyle samo wierszy. W twierdzeniu zakładamy, że $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ ma wyznacznik różny od 0, co oznacza, że przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^l$ do $\mathbb{R}^l$ zdefiniowane za pomocą tej macierzy jest różnowartościowe, przekształca $\mathbb{R}^l$ *na* $\mathbb{R}^l$, czyli jest izomorfizmem. Oznaczmy jeszcze $B = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ i $C = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$. Teraz możemy napisać $Df\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} = B\mathbf{u}+C\mathbf{v}$. Gdyby odwzorowanie f było liniowe, tzn. gdyby $f\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} = B\mathbf{u}+C\mathbf{v}$, to można by równanie $\mathbf{0} = f\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{v}}$ rozwiązać napisawszy $\mathbf{v} = -C^{-1}B\mathbf{u}$ i rzecz całą zakończyć. Oczywiście tak być nie musi, ale ponieważ zamierzamy wykazać jedynie, że dla dostatecznie małych $\mathbf{u}$ istnieją małe $\mathbf{v}$ takie, że $\mathbf{0} = f\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{v}}$, więc będziemy zakładać, że $\mathbf{v} = -C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}$ – rozwiązanie równania nieliniowego powinno być blisko rozwiązania równania liniowego. Dokładniej ustalamy $\mathbf{u}$ i szukamy $\mathbf{h}$ takiego, że $\mathbf{0} = f\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}}$. Niech $r\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} = f\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{v}} - B\mathbf{u} - C\mathbf{v}$. Równanie z niewiadomą $\mathbf{h}$ można zapisać w postaci $\mathbf{0} = f\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{v}} = B\mathbf{u}+C\mathbf{v}+r\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} = B\mathbf{u}+C\left(-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}\right)+r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}} = C\mathbf{h}+$ $+r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}}$, albo krócej

$$\mathbf{h} = -C^{-1}r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}} \qquad (RH)$$

Jeśli potraktujemy $\mathbf{u}$ jako stałą i przyjmiemy $\Gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}) = -C^{-1}r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}}$, to okazuje się, że równanie (RH) przybiera postać $\mathbf{h} = \Gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})$, czyli że $\mathbf{h}$ ma być punktem stałym $\Gamma_{\mathbf{u}}$. Wystarczy określić dziedzinę $\Gamma_{\mathbf{u}}$ tak, by przekształcenie odwzorowywało ją w siebie i by na tej dziedzinie było zwężające. Oczywiście dziedzina powinna być zupełna, więc domknięta w $\mathbb{R}^l$.

Ponieważ f ma ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$, więc odwzorowanie r też ma ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$. Mamy też $Dr\binom{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Z ciągłości pochodnych cząstkowych oraz ostatniej równości wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $\|\mathbf{u}\| < \delta$ i $\|\mathbf{w}\| < \delta$, to $\left\|Dr\binom{\mathbf{u}}{\mathbf{w}}\right\| < \varepsilon$. Niech $c = \|C^{-1}\|$, $b = \|B\|$. Oczywiście $c > 0$, $b \geq 0$. Możemy założyć, że $2c\varepsilon < \frac{1}{2}$ (ε możemy zmniejszać i do zmniejszonego dobierać $\delta > 0$). Załóżmy, że $\|\mathbf{u}\| \leq \frac{\delta}{2(1+c)(1+b)}$ i $\|\mathbf{h}\| \leq \frac{\delta}{2}$. Mamy więc $\|-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}\| \leq c\cdot b\cdot\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{h}\| \leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika wtedy, że

$$\|\Gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})\| = \left\|-C^{-1}r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}}\right\| \leq c\cdot\varepsilon\cdot\left\|\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}}\right\| \leq$$
$$\leq c\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2+\|-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}\|^2} \leq$$
$$\leq c\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2+(cb\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{h}\|)^2} \leq c\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{(\delta/2)^2+\delta^2} < 2c\varepsilon\delta < \tfrac{\delta}{2}\,.$$

Wykazaliśmy, że $\Gamma_{\mathbf{u}}\big(\overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2})\big) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2})$. Kula $\overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2})$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^l$, więc potraktowana jako przestrzeń metryczna jest zupełna. Z twierdzenia o wartości średniej i nierówności $\|Dr\| < \varepsilon$, $c\varepsilon < \frac{1}{4}$ wynika, że

$$\|\Gamma_{\mathbf{u}}(h)-\Gamma_{\mathbf{u}}(\widetilde{h})\| = \left\|C^{-1}r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\widetilde{\mathbf{h}}} - C^{-1}r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}}\right\| \leq$$
$$\leq \|C^{-1}\|\cdot\|Dr\|\cdot\|\mathbf{h}-\widetilde{\mathbf{h}}\| \leq c\varepsilon\|\mathbf{h}-\widetilde{\mathbf{h}}\| \leq \tfrac{1}{4}\|\mathbf{h}-\widetilde{\mathbf{h}}\|,$$

a to oznacza, że $\Gamma_{\mathbf{u}}$ spełnia warunek Lipschitza na kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2})$ ze stałą $\frac{1}{4}$. Z twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym wynika, że $\Gamma_{\mathbf{u}}$ ma dokładnie jeden punkt stały w kuli $\overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2})$. Wiemy więc już, że równanie (*RH*) ma dokładnie jedno rozwiązanie $\mathbf{h}$ spełniające warunek $\|\mathbf{h}\| \leq \frac{\delta}{2}$. Od tego momentu oznaczać będziemy to rozwiązanie przez $\mathbf{h}(\mathbf{u})$.

Trzeba wykazać, że odwzorowanie $\mathbf{h}$ przypisujące wektorowi $\mathbf{u} \in \overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2(1+c)(1+\varepsilon)})$ wektor $\mathbf{h}(\mathbf{u}) \in \overline{B}(\mathbf{0},\frac{\delta}{2})$ jest różniczkowalne. Z uwagi o ciągłej zależności punktu stałego wynika, że jest ono ciągłe, co więcej

$$\|\Gamma_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{h})-\Gamma_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{h})\| = \left\|-C^{-1}r\binom{\mathbf{u}_1}{-C^{-1}B\mathbf{u}_1+\mathbf{h}} + C^{-1}r\binom{\mathbf{u}_2}{-C^{-1}B\mathbf{u}_2+\mathbf{h}}\right\| \leq$$
$$\leq c\varepsilon\left\|-\binom{\mathbf{u}_1}{-C^{-1}B\mathbf{u}_1+\mathbf{h}}+\binom{\mathbf{u}_2}{-C^{-1}B\mathbf{u}_2+\mathbf{h}}\right\| = c\varepsilon\sqrt{\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|^2+\|C^{-1}B(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\|^2} \leq$$
$$\leq c\varepsilon\sqrt{1+c^2b^2}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|.$$

Stąd zaś i z przywołanej przed chwilą uwagi wynika, że

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{u}_1)-\mathbf{h}(\mathbf{u}_2)\| \leq \frac{c\varepsilon\sqrt{1+c^2b^2}\cdot\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|}{1-\frac{1}{4}} = L\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|$$

więc przekształcenie $\mathbf{h}$ jest ciągłe, a nawet lipschitzowskie ze stałą $L = \frac{4}{3}c\varepsilon\sqrt{1+c^2b^2}$.

Z wzoru $f\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})} = \mathbf{0}$ wynika, że jeśli $\mathbf{h}$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym, to zachodzi równość: $\mathbf{0} = \frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})} + \frac{\partial f}{\partial\mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})}\cdot Dh(\mathbf{u})$. Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{y}}\binom{\mathbf{p}+\mathbf{u}}{\mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})}$ jest izomorfizmem (δ i ε są dostatecznie małe a różniczka zależy w sposób ciągły od punktu), więc musi być spełniona równość

$$D\mathbf{h}(\mathbf{u}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{y}}\begin{pmatrix}\mathbf{p}+\mathbf{u}\\ \mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}\begin{pmatrix}\mathbf{p}+\mathbf{u}\\ \mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})\end{pmatrix}. \qquad (\textit{RÓŻ})$$

Niestety nie udowodniliśmy jeszcze różniczkowalności f, natomiast znaleźliśmy kandydata na różniczkę. To oczywiście ułatwia dalsze rozumowanie. W dalszej części dowodu wektor $\mathbf{u}$ nie będzie zmieniany. Wystarczy zatem wykazać, że

$$\lim_{\mathbf{w}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{h}(\mathbf{u}+\mathbf{w})-\mathbf{h}(\mathbf{u})-\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{y}}\begin{pmatrix}\mathbf{p}+\mathbf{u}\\ \mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}}\begin{pmatrix}\mathbf{p}+\mathbf{u}\\ \mathbf{q}+\mathbf{h}(\mathbf{u})\end{pmatrix}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \mathbf{0}$$

Ta równość to po prostu stwierdzenie, że macierz przez którą mnożony jest wektor $\mathbf{w}$, jest różniczką odwzorowania $\mathbf{h}$ w punkcie $\mathbf{u}$ — to definicja różniczkowalności. Niech

$$\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{v}} = f\binom{\mathbf{p+u+w}}{\mathbf{q+h(u)+v}} - f\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\mathbf{w} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\mathbf{v}.$$

Z różniczkowalności f wynika: $\lim \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{w}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2}}\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ przy $\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{v}} \longrightarrow \mathbf{0}$. Mamy więc

$$\mathbf{0} = F\binom{\mathbf{p+u+w}}{\mathbf{q+h(u+w)}} = f\binom{\mathbf{p+u+w}}{\mathbf{q+h(u)+\{h(u+w)-h(u)\}}} =$$

$$= f\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\mathbf{w} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\{\mathbf{h}(\mathbf{u}+\mathbf{w}) - \mathbf{h}(\mathbf{u})\} + \rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}} =$$

$$= \mathbf{0} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\mathbf{w} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\{\mathbf{h}(\mathbf{u}+\mathbf{w}) - \mathbf{h}(\mathbf{u})\} + \rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}}.$$

Wyznaczamy stąd $\mathbf{h}(\mathbf{u}+\mathbf{w}) - \mathbf{h}(\mathbf{u})$ korzystając z odwracalności macierzy $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}+\mathbf{w}) - \mathbf{h}(\mathbf{u}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\mathbf{w} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\right)^{-1}\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}}.$$

Zakończymy dowód, gdy wykażemy, że $\lim\limits_{\|\mathbf{w}\|\to 0}\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\right)^{-1}\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}} = \mathbf{0}$. Wystarczy udowodnić, że $\lim\limits_{\|\mathbf{w}\|\to 0}\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}} = \mathbf{0}$, bowiem przekształcenie liniowe $\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{p+u}}{\mathbf{q+h(u)}}\right)^{-1}$ jest ciągłe. Wiemy, że zachodzi następująca równość

$$\mathbf{0} = \lim_{\|\mathbf{w}\|\to 0}\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{w}\|^2+\|\mathbf{h(u+w)-h(u)}\|^2}}\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}} =$$

$$= \lim_{\|\mathbf{w}\|\to 0}\left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\rho\binom{\mathbf{w}}{\mathbf{h(u+w)-h(u)}} \cdot \frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{\|\mathbf{w}\|^2+\|\mathbf{h(u+w)-h(u)}\|^2}}\right).$$

Odwzorowanie $\mathbf{h}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, zatem zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{\sqrt{1+L^2}} = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{\|\mathbf{w}\|^2+(L\|\mathbf{w}\|)^2}} \le \frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{\|\mathbf{w}\|^2+\|\mathbf{h}(\mathbf{u}+\mathbf{w})-\mathbf{h}(\mathbf{u})\|^2}} \le 1$$

Z tego, że iloczyn dwóch czynników dąży do 0 i drugi z nich jest oddzielony od 0 wynika, że pierwszy dąży do 0. Wiemy więc, że różniczka istnieje, zatem pochodne cząstkowe istnieją. Ich ciągłość wynika z tego, że dane są za pomocą wzoru (*RÓŻ*), w którym występują funkcje ciągłe powiązane działaniami arytmetycznymi, więc wynik też jest funkcją ciągłą. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 3.11 *Zasadnicza trudność w tym dowodzie polega na wykazaniu, że rozwiązanie istnieje, ten problem rozwiązaliśmy za pomocą twierdzenia Banacha; to że funkcja* $\mathbf{h}$ *spełnia warunek Lipschitza to niejako automatyczne rozumowanie, tu właściwie dowód przebiega zgodnie z oczekiwaniami i nie ma wielkich możliwości zmian, to samo dotyczy różniczkowalności; zapis (ale nie rozumowanie) można nieco skrócić wprowadzając kilka dodatkowych oznaczeń, ale to rzecz gustu — autor tego tekstu nie przepada za wieloma zmianami oznaczeń. Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia o odwracaniu funkcji, można zamiast uwagi o ciągłej zależności punktu stałego, rozpatrywać przekształcenie na przestrzeni metrycznej, której elementami są funkcje określone na pewnej kuli domkniętej, w przypadku tego dowodu wygodnie jest posłużyć się funkcjami spełniającymi warunek Lipschitza z odpowiednio dobraną stałą.*

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika od razu twierdzenie o funkcji odwrotnej. Jeśli f jest klasy C^1 i $Df(\mathbf{p})$ jest izomorfizmem, to funkcja g zdefiniowana wzorem $g\binom{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ spełnia założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej: $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\binom{f(\mathbf{p})}{\mathbf{p}} = Df(\mathbf{p})$

jest izomorfizmem, $g\binom{f(\mathbf{p})}{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, więc $\mathbf{x}$ można wyznaczyć jako funkcję $\mathbf{y}$ w dostatecznie małym otoczeniu punktu $f(\mathbf{p})$ przy założeniu, że punkt $\mathbf{x}$ „dopasowywany” do punktu $\mathbf{y}$ jest poszukiwany w pobliżu $\mathbf{p}$.

Zadanie. Zbadać, czy przekształcenie na zbiorze funkcji określone wzorem

$$\Gamma(\mathbf{h})(\mathbf{u}) = -C^{-1} r\binom{\mathbf{u}}{-C^{-1}B\mathbf{u}+\mathbf{h}(\mathbf{u})}$$

jest zwężające, jeśli rozpatrujemy funkcje klasy C^1 określone na kuli domkniętej o dostatecznie małym promieniu (mówimy, że funkcja jest klasy C^1 na kuli domkniętej, jeśli można ją przedłużyć na pewną kulę otwartą w taki sposób, że na tej otwartej przedłużenie będzie klasy C^1).

A może ograniczyć różne pochodne? A może nic już nie pomoże?

Jeśli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ odwzorowuje zbiór otwarty $G \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ w przestrzeń $\mathbb{R}^l$ przy czym f jest klasy C^1 i $Df(\mathbf{p})$ jest epimorfizmem dla pewnego punktu $\mathbf{p} \in G$, to można wybrać k spośród jego $k+l$ współrzędnych, nazwać je kolejno $x_1(\mathbf{p}), x_2(\mathbf{p}), \ldots, x_k(\mathbf{p})$, pozostałe nazwać $\mathbf{y}_1(\mathbf{p}), y_2(\mathbf{p}), \ldots, y_l(\mathbf{p})$, współrzędne w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ nazywane będą $x_1, x_2, \ldots, x_k$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_l$. W taki sposób, że przekształcenie liniowe $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{p})$ będzie izomorfizmem (bo jądro $Df(\mathbf{p})$ jest k–wymiarowe, zatem wymiar dopełniającej podprzestrzeni równy jest l). Można więc zastosować twierdzenie o funkcji uwikłanej do funkcji $F = f - f(\mathbf{p})$ $(F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}))$. Z tego twierdzenia wynika, że zbiór $\{\mathbf{x}\colon \quad F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x}\colon \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p})\}$ przecięty z dostatecznie małym otoczeniem punktu $\mathbf{p}$ jest wykresem funkcji, która przyporządkowuje „iksom” „igreki”.

Definicja 3.12 (rozmaitości zanurzonej w przestrzeni euklidesowej)
Zbiór $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ nazywany jest k–wymiarową rozmaitością klasy C^1 zanurzoną w $\mathbb{R}^{k+l}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$ istnieje otoczenie $U_{\mathbf{p}} \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$, liczby naturalne $i_1, i_2, \ldots, i_k$ i funkcje $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \ldots, \varphi_{j_l}$ klasy C^1 zmiennych $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ takie, że zbiór $M \cap U_{\mathbf{p}}$ składa się z punktów, których współrzędne o numerach $i_1, i_2, \ldots, i_k$ są zmiennymi niezależnymi zaś pozostałe l współrzędnych to

$$\varphi_{j_1}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}), \varphi_{j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}), \ldots,\ \varphi_{j_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}),$$

zatem rozmaitość jest *LOKALNIE* wykresem funkcji klasy C^1 pewnych k zmiennych. ■

W definicji rozmaitości zakładamy, że $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \{1, 2, \ldots, k+l\}$. Wybór liczb $i_1, i_2, \ldots, i_k$ zależny jest na ogół od punktu $\mathbf{p}$, liczby $j_1, j_2, \ldots, j_l$ to te spośród $1, 2, \ldots, k+l$, które pozostały po wybraniu $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^{k+l}$ nazywane są czasem hiperpowierzchniami, czasem ten termin zarezerwowany jest dla przypadku $l = 1$, liczba l nazywana jest kowymiarem rozmaitości zanurzonej w $\mathbb{R}^{k+l}$. Często zamiast mówić rozmaitość zanurzona w $\mathbb{R}^{k+l}$ mówić będziemy o podrozmaitości $\mathbb{R}^{k+l}$. Jeśli dla wszystkich punków zbioru M można wybrać jedno otoczenie U, o którym jest mowa w definicji, to M nazywać będziemy płatem k–wymiarowym w $\mathbb{R}^{k+l}$.

Przykłady rozmaitości to sfera k_1 w $\mathbb{R}^k$, w szczególności okrąg na płaszczyźnie, wykres funkcji. Jeśli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest odwzorowaniem klasy C^1 z podzbioru otwartego przestrzeni $\mathbb{R}^{k+l}$ i dla pewnego punktu $\mathbf{p} \in G$ zbiór $M = \{\mathbf{x} \in G\colon \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p})\}$ składa się z takich punktów $\mathbf{x}$, że $Df(\mathbf{x})$ jest epimorfizmem, to M jest podrozmaitością $\mathbb{R}^{k+l}$. Później poznamy jeszcze inne rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^{k+l}$. Udowodnimy też twierdzenia charakteryzujące rozmaitości w nieco inny sposób.

Rozmaitości to zbiory o stosunkowo prostej strukturze. Podamy teraz twierdzenie, które opisuje zbiór wektorów stycznych do rozmaitości w pewnym jej punkcie.

Twierdzenie 3.13 (o wektorach stycznych do podrozmaitości $\mathbb{R}^{k+l}$)

a. Jeśli $U \subseteq \mathbb{R}^k$ jest zbiorem otwartym, odwzorowanie $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest klasy C^1, $M = \left\{\binom{\mathbf{x}}{\varphi(\mathbf{x})}\colon \quad \mathbf{x} \in U\right\}$, $\mathbf{p} = \binom{\mathbf{q}}{\varphi(\mathbf{q})} \in M$, to: $\quad T_{\mathbf{p}}M = \left\{\binom{\mathbf{v}}{D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}}\colon \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k\right\}$.

b. Jeśli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest przekształceniem klasy C^1 ze zbioru G otwartego w $\mathbb{R}^{k+l}$, $\mathbf{p} \in G$ jest takim punktem, że dla każdego $\mathbf{z}$ z równości $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{p})$ wynika, że $Df(\mathbf{z})$ jest epimorfizmem, $M = \{\mathbf{z}\colon \quad f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{p})\}$, to: $\quad T_{\mathbf{p}}M = \ker Df(\mathbf{p})$.

Dowód. a. Wykażemy, że jeżeli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ jest wektorem niezerowym, to wektor $\binom{\mathbf{v}}{D\varphi(\mathbf{v})}$ jest styczny do M w punkcie $\binom{\mathbf{q}}{\varphi(\mathbf{q}).}$ Definiujemy $\gamma(t) = \binom{\mathbf{q}+t\mathbf{v}}{\varphi(\mathbf{q}+t\mathbf{v})}$. Wtedy $\gamma'_+(0) = \gamma'(0) \in T_{\mathbf{p}}M$. Jest jasne, że $\gamma'(0) = \binom{\mathbf{v}}{D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}}$. Wykażemy, że jeśli wektor $\binom{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$ jest styczny do M w punkcie $\mathbf{p}$, to $\mathbf{u} = D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}$. Załóżmy, że $\binom{\mathbf{q}_n}{\varphi(\mathbf{q}_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \binom{\mathbf{q}}{\varphi(\mathbf{q})}$ oraz że dla pewnej liczby $t > 0$ zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{q}_n - \mathbf{q}}{\sqrt{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})\|^2}} = t\mathbf{v}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})}{\sqrt{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})\|^2}} = t\mathbf{u}$. Możemy założyć, że ciąg $\left(\frac{\mathbf{q}_n-\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|}\right)$ jest zbieżny (jeśli nie, to wybieramy zeń podciąg zbieżny, co jest możliwe, bo sfera jednostkowa jest zwarta). Niech $\mathbf{v} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{q}_n-\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|}$. Z liniowości i ciągłości $D\varphi(\mathbf{q})$ wynika, że zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D\varphi(\mathbf{q})(\mathbf{q}_n-\mathbf{q})}{\|(\mathbf{q}_n-\mathbf{q})\|} = D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}$. Potem korzystamy z różniczkowalności φ w punkcie $\mathbf{q}$, z liniowości $D\varphi(\mathbf{q})$ i z definicji różniczki, by otrzymać równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|} = {}$ $= D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v} = \varphi'_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$. Stąd wynikają równości

$$t\mathbf{v} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{q}_n-\mathbf{q}}{\sqrt{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})\|^2}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1+\|\varphi'_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\|^2}} \qquad \text{oraz}$$
$$t\mathbf{u} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})}{\sqrt{\|\mathbf{q}_n-\mathbf{q}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{q}_n)-\varphi(\mathbf{q})\|^2}} = \frac{D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}}{\sqrt{1+\|\varphi'_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\|^2}}\,.$$

Wobec tego $t\sqrt{1+\|\varphi'_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\|^2}\,\mathbf{u} = D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v} = t\sqrt{1+\|\varphi'_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})\|^2}\,\mathbf{v}$, więc $\mathbf{u} = D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}$. Udowodniliśmy pierwszą części twierdzenia.

b. Po ewentualnej zmianie numeracji współrzędnych w $\mathbb{R}^{k+l}$ można przyjąć, że w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ pierwsze k współrzędnych wyznacza pozostałe l, czyli że istnieje taka funkcja φ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, klasy C^1, o wartościach z $\mathbb{R}^l$, że część wspólna zbioru M z dostatecznie małym otoczeniem punktu $\mathbf{p}$ jest wykresem funkcji φ, rozpatrywanej na odpowiednim otoczeniu punktu $\mathbf{q}$, przy czym $\binom{\mathbf{q}}{\varphi(\mathbf{q})} = \mathbf{p}$. Niech $\mathbf{z} = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$, przy czym $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$. Ponieważ $f(\mathbf{p}) = f\binom{\mathbf{x}}{\varphi(\mathbf{x})}$ w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{q}$, więc $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\binom{\mathbf{x}}{\varphi(\mathbf{x})} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\binom{\mathbf{x}}{\varphi(\mathbf{x})}D\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Z części **a** wynika, że wektory styczne do M w punkcie $\mathbf{p} = \binom{\mathbf{q}}{\varphi(\mathbf{q})}$ mają postać $\binom{\mathbf{v}}{D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}}$, zatem – na mocy poprzedniej równości – są w jądrze $Df(\mathbf{p})$. Jeśli $Df(\mathbf{p})\mathbf{w} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{w} = \binom{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$, to $\mathbf{0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p})\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{p})\mathbf{u}$, zatem $\mathbf{u} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p})\mathbf{v} = D\varphi(\mathbf{q})\mathbf{v}$. Dowód części **b** został zakończony. ■

Kilka zadań

Zadanie 3.1 Niech f oznacza funkcję różniczkowalną określoną na pewnym zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^k$. Obliczyć

a. $\frac{\partial g}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial g}{\partial y}$, jeśli $g(x,y) = f(x^2, y^3)$, $k = 2$;

b. $\frac{\partial g}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial g}{\partial y}$, jeśli $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$, $k = 1$;

c. $\frac{\partial g}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial g}{\partial y}$, jeśli $g(x,y) = f(x\cos y, x\sin y)$, $k = 2$;

d. $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial g}{\partial z}$, jeśli $g(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, $k = 2$.

Zadanie 3.2 Znaleźć dyfeomorfizm kwadratu otwartego na koło bez brzegu.

Zadanie 3.3 Znaleźć dyfeomorfizm półpłaszczyzny otwartej na koło otwarte.

Zadanie 3.4 Znaleźć dyfeomorfizm płaszczyzny bez domkniętej półprostej na koło otwarte.

Zadanie 3.5 Niech $\varphi\colon (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Niech
$$K = \{(x,y,z)\colon \quad y = 0,\ z = \varphi(x)\}.$$
Niech M będzie zbiorem otrzymanym przez obrót krzywej K o $360°$ wokół osi OZ.
(a) Wykazać, że zbiór M jest dwuwymiarową rozmaitością (włożoną w $\mathbb{R}^3$).
(b) Załóżmy, że $\varphi(2) = 1$, $\varphi'(2) = -5$. Wykazać, że $\mathbf{p} := (-1, \sqrt{3}, 1) \in M$ i napisać równanie płaszczyzny stycznej do M w punkcie $\mathbf{p}$.

Zadanie 3.6 Niech $f_a(y) = ay + e^y$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie f_a jest dyfeomorfizmem prostej na siebie, dla jakich $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie f_a jest dyfeomorfizmem prostej na otwarty podzbiór właściwy prostej, dla jakich $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie f_a nie jest dyfeomorfizmem?
Znaleźć dyfeomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$, jeśli $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x^2 = 1 \Longrightarrow y < 0\}$.

Zadanie 3.7 Niech L oznacza prostą, która przechodzi przez punkty $(1,0,0)$ i $(2,1,1)$. Przez każdy punkt prostej L prowadzimy prostą przecinającą pod kątem prostym oś $OZ := \{(0,0,z)\colon \quad z \in \mathbb{R}\}$. Niech M będzie sumą wszystkich tych prostych.
Napisać równanie zbioru M.
Sprawdzić, czy zbiór M jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^3$.
Podać równanie płaszczyzny stycznej do zbioru M przechodzącej przez punkt $(2,1,1)$.

Zadanie 3.8 Znaleźć dyfeomorfizm płaszczyzny bez dwu domkniętych półprostych równoległych na płaszczyznę.

Zadanie 3.9 Znaleźć dyfeomorfizm zbioru $\{(x,y)\colon \quad 1 < x^2+y^2 < 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}} < y < x\sqrt{3}\}$ na płaszczyznę.

Zadanie 3.10 Wykazać, że nie istnieje dyfeomorfizm przekształający zbiór otwarty zawierający kwadrat domknięty na pewien zbiór otwarty w taki sposób, że obrazem tego kwadratu jest koło domknięte.

Zadanie 3.11 Znaleźć dyfeomorfizm przekształcający zbiór $\{(x,y)\colon \quad 0<y<\sqrt{x}\}$ na wnętrze kwadratu o wierzchołkach w punktach: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Zadanie 3.12 Wyjaśnić, czy zbiór $M=\{(x,y,z)\colon \quad x^2+z^2=1=y^2+z^2\}$ jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć zbiór wektorów stycznych do M w punkcie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Zadanie 3.13 Niech L będzie liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^k$ na siebie. Wykazać, że $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}\|L\mathbf{x}\|=\infty$. Niech $f(\mathbf{x})=\dfrac{L\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}}{\left\|L\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}\right\|}$ i $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. Dla jakich izomorfizmów L funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0}$.

Zadanie 3.14 Uzasadnić, że układ równań $\begin{cases} 3x^2y+t^2x-ty^2=3 \\ tx^2+xy^2-2t^2y=0 \end{cases}$ wyznacza w otoczeniu punktu $(t_0,x_0,y_0)=(1,1,1)$ zmienne x, y jednoznacznie jako funkcje zmiennej t, klasy C^1: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Obliczyć $x'(1)$, $y'(1)$.

Zadanie 3.15 Niech $F(x,y,z)=xe^z+(x^2+y^2)z^2-z+1$.
(a) Udowodnić, że istnieje otoczenie U punktu $(0,0)$ oraz funkcja $z\colon\ U\to\mathbb{R}$ klasy C^1, dla której równość $F(x,y,z(x,y))=0$ spełniona jest dla wszystkich $(x,y)\in U$. Obliczyć $g'(0)$, gdzie $g(t)=z(t,\sin 2t)$.
(b) Czy istnieje funkcja $z\colon(-1,1)\times(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ *nieciągła w punkcie* $(0,0)$, dla której równość $F(x,y,z(x,y))=0$ spełniona jest dla wszystkich $(x,y)\in(-1,1)\times(-1,1)$?

Zadanie 3.16 Niech $f(x,y)=x^3-36xy+y^3$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \quad f(x,y)=0\}$, $Q_1=\{(x,y)\colon \quad x>0<y\}$,
$Q_2=\{(x,y)\colon \quad x<0<y\}$, $Q_3=\{(x,y)\colon \quad x<0>y\}$ i $Q_4=\{(x,y)\colon \quad x>0>y\}$.
(a) Wykazać, że $M\cap Q_1$ jest zbiorem ograniczonym, a $M\cap Q_4$ — nieograniczonym .
(b) Znaleźć $\max\{y\colon \quad (x,y)\in M\cap Q_1\}$ oraz zbiór $M\cap Q_3$.
(c) Znaleźć przestrzeń $T_{(18,18)}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(18,18)$.
(d) Wykazać, że istnieje taka liczba $\delta>0$ i funkcja $\alpha\colon(-\delta,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$, klasy C^∞, że jeśli $|x|<\delta \quad$ i $|y|<\delta$, to: $f(x,y)=0\iff x=\alpha(y)\cdot y^2$ lub $y=\alpha(x)\cdot x^2$. Obliczyć $\alpha(0)$.
(e) Wyjaśnić, czy zbiór $\overline{M\cap Q_2}\cup\{(x,y)\in M\cap Q_1\colon \quad y<x\}$ jest rozmaitością w $\mathbb{R}^2$.
(f) Znaleźć przestrzeń $T_{(0,0)}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 3.17 Uzasadnić, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,-1)$ równanie $xy=2+z\ln y$ wyznacza y jako funkcję pozostałych zmiennych: $y=y(x,z)$, klasy C^1. Obliczyć pochodne cząstkowe tej funkcji w punkcie $(x_0,z_0)=(2,-1)$.

Zadanie 3.18 Niech $\gamma\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ będzie taką różnowartościową funkcją klasy C^∞, że zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ jest domkniętym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i dla każdego $t\in\mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $D\gamma(t)$ jest różnowartościowe.
Dowieść, że dla każdej pary liczb $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, istnieje taka liczba $\delta>0$, że dla dowolnych liczb $s,t\in[a,b]$ odcinki o długościach δ i środkach $\gamma(s)$ i $\gamma(t)$, prostopadłe odpowiednio do wektorów $\gamma'(s)$ i $\gamma'(t)$, są rozłączne.
Dowieść, że z założeń o funkcji γ wynika, że zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ jest jednowymiarową rozmaitością lub podać przykład świadczący o tym, że $\gamma(\mathbb{R})$ może nie być rozmaitością.

Zadanie 3.19 Niech $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$.
Wykazać, że istnieje taka liczba $\delta \in (0,1)$, że jeśli $|x-1| < \delta$ i $|y-1| < \delta$, to istnieje dokładnie jedna liczba $z > 0$, dla której spełniona jest równość $f(x,y,z) = 3e$.
Dowieść, że przyporządkowanie liczby $z > 0$ parze liczb x, y jest funkcją klasy C^∞.
Znaleźć $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

Zadanie 3.20 Załóżmy, że $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ są rozmaitościami wymiarów $m_1 > 0$ i $m_2 > 0$ oraz że dla każdego punktu $x \in M_1 \cap M_2$ zachodzi równość

$$\mathbb{R}^k = T_x M_1 + T_x M_2,$$

gdzie $T_x M_1 + T_x M_2 = \{v_1 + v_2 : \quad v_1 \in T_x M_1 \ \text{ i } \ v_2 \in T_x M_2\}$.
Udowodnić, że $M_1 \cap M_2$ jest rozmaitością wymiaru $m_1 + m_2 - k$.
Podać przykład dwu rozmaitości $M_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ wymiaru m_1 i $M_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ wymiaru m_2, dla których zbiór $M_1 \cap M_2$ jest rozmaitością wymiaru $m_1 + m_2 - k$, chociaż istnieją takie punkty $x \in M_1 \cap M_2$, że $T_x M_1 + T_x M_2 \subset \mathbb{R}^k$.

Zadanie 3.21 Odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorami: $F(x,y) = (u,v)$, gdzie $u = x(x^2 - 3y^2)$, $v = y(y^2 - 3x^2)$. Wyznaczyć wszystkie takie punkty $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, że F odwzorowuje różnowartościowo na pewne otoczenie punktu (x_0, y_0) na otoczenie punktu $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$. Jednym z takich punktów jest $(1,1)$; zatem w pewnym otoczeniu punktu $F(1,1) = (-2,-2)$ jest określone odwzorowanie odwrotne: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, przekształcające otoczenie punktu $(-2,-2)$ na otoczenie punktu $(1,1)$. Uzasadnić, że jest ono klasy C^1 i obliczyć $\dfrac{\partial y}{\partial u}(-2,-2)$.

Zadanie 3.22 Odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorami: $F(x,y) = (u,v)$, gdzie $u = x^2 + y - y^2$, $v = 2xy + y$. Dla każdego punktu (x_0, y_0), w którym różniczka DF jest osobliwa, wyjaśnić, czy ów punkt ma otoczenie, przekształcane przez F bijektywnie na otoczenie punktu $F(x_0, y_0)$.

Zadanie 3.23 Podać przykład dyfeomorfizmu, odwzorowującego płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ (zmiennych x, y) na następujący podzbiór $U = \{(u,v)\colon \ u > v > 0, \quad uv < 1\}$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (zmiennych u, v); znalezione odwzorowanie należy wyrazić albo wprost wzorem, albo jako złożenie (np. $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$) kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem.

Zadanie 3.24 Podać przykład dyfeomorfizmu, odwzorowującego płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ (zmiennych x, y) na następujący podzbiór $U = \{(u,v)\colon \ u > v^2, \ \ u + v < 6\}$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (zmiennych u, v); znalezione odwzorowanie należy wyrazić albo wprost wzorem, albo jako złożenie (np. $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$) kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem.

Zadanie 3.25 Zdefiniujmy zbiór $U = \{(x,y)\colon \quad \max(y, x+y) > 0\}$. Znaleźć dyfeomorfizm $f\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{na} U$.
Wynik powinien być zapisany za pomocą wzoru zawierającego niezbyt wiele funkcji elementarnych powiązanych jedna z drugą znakami $+$, $-$, $\cdot$, $:$ lub $\circ$.

Zadanie 3.26 Podać przykład przekształcenia, będącego dyfeomorfizmem zbioru U na zbiór V:

$U = \{(x,y)\colon\ x>0,\ y>0,\ \ 1<x{+}y<2\}, \qquad V=\{(u,v)\colon\ u>0\}\cup\{(u,v)\colon\ v>0\}.$

Znalezione odwzorowanie należy wyrazić albo wprost wzorem albo jako złożenie kilku dyfeomorfizmów (np. $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$), z których każdy jest wyrażony wzorem.

Zadanie 3.27 Podać przykład dyfeomorfizmu, odwzorowującego płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ (zmiennych x, y) na podzbiór $U = \{(u,v)\colon\ v>0\}\cup\{(u,v)\colon\ u<0<v+1\}$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (zmiennych u, v); znalezione odwzorowanie należy wyrazić albo wprost wzorem, albo jako złożenie (np. $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$) kilku dyfeomorfizmów, z których każdy jest wyrażony wzorem.

Zadanie 3.28 Niech $W = \{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k\colon\ \ x_i>0 \text{ dla } i=1,2,\ldots,k\}$. Odwzorowanie $f\colon W \longrightarrow W$ dane jest wzorem

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\Big(\frac{x_kx_2}{x_1},\frac{x_1x_3}{x_2},\frac{x_2x_4}{x_3},\ldots,\frac{x_{k-2}x_k}{x_{k-1}},\frac{x_{k-1}x_1}{x_k}\Big).$$

Wykazać, że f przekształca dyfeomorficznie zbiór W na siebie.

Zadanie 3.29 W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozważamy zbiory otwarte

$U=\{(u,v,s,t)\colon\ u^2+v^2>0,\ \ t>0\}, \quad X=\{(x,y,z,w)\colon\ x^2+y^2>0,\ \ w>0\}$

(zmienne w dziedzinie i w obrazie oznaczono różnymi literami dla wygody; rozważamy „dwie kopie” przestrzeni $\mathbb{R}^4$). Określamy odwzorowanie $F\colon U\to X$ wzorami

$F(u,v,s,t)=(x,y,z,w)$, gdzie $x=tu,\ \ y=tv,\ \ z=s,\ \ w=u^2+v^2$.

Wykazać, że F jest dyfeomorfizmem zbioru U na (cały) zbiór X (najprościej: wyznaczyć F^{-1}). Niech $T=\{(x,y,z,w)\in X\colon\ x^2+y^2+z^2+3=4\sqrt{x^2+y^2},\ \ w=1\}$. Wyznaczyć jego przeciwobraz: $F^{-1}(T)=\{(u,v,s,t)\colon\ \ldots\ldots\}$ za pomocą możliwie prostych równań.

Zadanie 3.30 Niech $F\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem klasy C^1, którego różniczka $DF(\mathbf{x})$ jest w każdym punkcie $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ operatorem liniowym o normie $\|DF(\mathbf{x})\|\le 1/2$. Dowieść, że odwzorowanie $G(\mathbf{x})=\mathbf{x}+F(\mathbf{x})$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^k$ na $\mathbb{R}^k$.

Zadanie 3.31 Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $O=(0,0,0)$ do punktu $A=(1,0,0)$. W tym samym czasie punkt Q jedzie, też jednostajnie, wzdłuż odcinka BC od punktu $B=(0,1,0)$ do punktu $C=(0,1,1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Podać przykład parametryzacji powierzchni M, uzasadniający, że to rozmaitość dwuwymiarowa w $\mathbb{R}^3$ (dokładnie sprawdzić wymagane warunki).

Zadanie 3.32 Niech $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz=0,\ x,y,z>0\}$. Uzasadnić, że to rozmaitość. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do M w punkcie $\big(\frac14,\ \frac14\sqrt3,\ \frac18\sqrt3\big)$. Podać przykładową parametryzację.

Zadanie 3.33 Definiujemy $M=\{(x,y,z)\colon\ \ x^2+y^2+3z^2=xy+6z^{1/3},\ z\neq0\}$ oraz $N=M\cup\{(0,0,0)\}$. Czy zbiór M jest dwuwymiarową rozmaitością? Czy zbiór N jest dwuwymiarową rozmaitością?

Zadanie 3.34 Niech $f_\lambda(x,y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.
a. Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x,y)\colon \quad f_0(x,y) = c\}$ jest rozmaitością, dla jakich c jest spójny?
b. Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x,y)\colon \quad f_1(x,y) = c\}$ jest rozmaitością, dla jakich c jest spójny?
c. Znaleźć afiniczną przestrzeń styczną do zbioru $\{(x,y)\colon \quad f_1(x,y) = 0\}$ w punkcie $(3,-6)$ oraz przestrzeń styczną do zbioru $\{(x,y)\colon \quad f_1(x,y) = 0\}$ w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 3.35 Udowodnić, że zbiór $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z = 16\}$ jest rozmaitością. Znaleźć $T_{(3,2,0)}S$.

Zadanie 3.36 Czy krzywa będąca obrazem odwzorowania

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto (x,y) = (t^3 - 3t^2 + 3t + 5, t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t) \in \mathbb{R}^2$$

jest podrozmaitością w $\mathbb{R}^2$ klasy C^1?

Zadanie 3.37 Niech $M = \{(x,y)\colon \quad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 10x^2 - 6y^2 = -9\}$.
Wyjaśnić, czy M jest rozmaitością włożoną w$\mathbb{R}^2$. Jeśli nie, to znaleźć najmniejszy taki zbiór A, że zbiór $M \setminus A$ jest rozmaitością włożoną w płaszczyznę.
Znaleźć $T_\mathbf{p}M$, gdy $\mathbf{p} = (3,0)$ i gdy $\mathbf{p} = (0,\sqrt{3})$.

Zadanie 3.38 Pokazać, że w otoczeniu punktu $(1,1)$ równanie $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ może być jednoznacznie rozwiązane ze względu na x i że otrzymana funkcja $x = \varphi(y)$ jest klasy C^1 w otoczeniu $y = 1$.
Obliczyć $\varphi'(1)$.
Czy równanie może być jednoznacznie rozwiązane ze względu na zmienną y w otoczeniu punktu $(1,1)$?

Zadanie 3.39 Niech $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad x^3 - 12xy + 8y^3 = 0\}$.
(a) Wykazać, że M **nie** jest rozmaitością (zanurzoną w $\mathbb{R}^2$).
(b) Znaleźć punkty, po usunięciu których ze zbioru M, stanie się on rozmaitością.
(c) Znaleźć przestrzeń $T_{(3,\frac{3}{2})}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(3,\frac{3}{2})$.
(d) Znaleźć przestrzeń $T_{(0,0)}M$ styczną do zbioru M w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 3.40 Dowieść, że wnętrze każdego wielokąta wypukłego na płaszczyźnie jest zbiorem dyfeomorficznym z całą płaszczyzną.

Zadanie 3.41 Czy zbiory $\{(x,y,z)\colon\ x^6 + y^5 + z^4 = 0\}$, $\{(x,y,z)\colon\ x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$ są dwuwymiarowymi rozmaitościami w $\mathbb{R}^3$?

Zadanie 3.42 Niech $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Wykazać, że dla każdego (x,y) kolumny macierzy $Df(x,y)$ są wzajemnie prostopadłymi wektorami o równej długości.
Wykazać, że dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ macierz $Df(x,y)$ jest nieosobliwa (jej wyznacznik jest $\neq 0$), choć funkcja f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 3.43 Znaleźć dyfeomorfizm przekształcający wnętrze trójkąta o wierzchołkach w punktach: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ na wnętrze kwadratu o wierzchołkach w punktach: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.