Pochodne pierwszego rzędu funkcji wielu zmiennych

Ostatnio poprawiłem 26 listopada 2023 r.
Duża część zadań pochodzi od dr Marcina Kuczmy

Definicja 2.1 (przekształcenia wieloliniowego)
Przekształceniem n–liniowym prowadzącym z iloczynu kartezjańskiego n przestrzeni $V = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_n}$ w przestrzeń liniową $\mathbb{R}^l$ nazywamy takie przekształcenie $B\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^l$, że dla dowolnego numeru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i dowolnych $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^{k_j}$, $j \neq i$, przekształcenie przypisujące punktowi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k_i}$ punkt$B(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{p}_{i+1}, \ldots, \mathbf{p}_n)$ jest liniowe. Zbiór wszystkich przekształceń n–liniowych z $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_n}$ do $\mathbb{R}^l$ oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbb{R}^{k_n}; \mathbb{R}^l)$. ■

Iloczyn skalarny jest przekształceniem dwuliniowym z $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}$. Iloczyn wektorowy jest przekształceniem dwuliniowym z $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$. Wyznacznik macierzy wymiaru k można potraktować jako funkcję jej k kolumn. Ze znanych własności wyznacznika wynika od razu, że jest to funkcja k–liniowa. Zbiór $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbb{R}^{k_n}; \mathbb{R}^l)$ ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$: przekształcenia n–liniowe można dodawać i mnożyć przez skalary (liczby).

$\mathcal{L}(V; W)$ oznacza zbiór wszystkich przekształceń liniowych z przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową W. Załóżmy, że $\mathcal{B}\colon V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_2; W)$ jest przekształceniem liniowym. Przyjmijmy, że $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$. Jasne jest, że tak określone przekształcenie B z $V_1 \times V_2$ do W jest dwuliniowe. Jest też zrozumiałe, że dla każdego przekształcenia dwuliniowego $B\colon V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ można określić przekształcenie liniowe $\mathcal{B}\colon V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_2; W)$ tak, by spełniona była równość $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})(\mathbf{y})$. Opisana właśnie odpowiedniość między przekształceniami dwuliniowymi z $\mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ i przekształceniami liniowymi z $\mathcal{L}(V_1; \mathcal{L}(V_2; W))$ jest izomorfizmem tych przestrzeni liniowych. Studenci, którzy mieli kłopoty z algebrą liniową powinni to sprawdzić bardzo szczegółowo, tu nie ma żadnego problemu, ale tę kwestię każdy powinien dobrze zrozumieć. Dzięki opisanemu izomorfizmowi możemy utożsamiać przekształcenia dwuliniowe z macierzami tak, jak utożsamiamy przekształcenia liniowe z macierzami. W książce R. Sikorskiego używane są macierze wielowskaźnikowe (wielowymiarowe) po to, by można było przekształcenia wieloliniowe utożsamiać z macierzami wielowskaźnikowymi.

Pokazaliśmy poprzednio, że przekształcenie liniowe ma normę (to jego najmniejsza stała Lipschitza). W dowodzie użyliśmy normy euklidesowej $\|\ \|_2$. Można używać innej normy w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i być może jeszcze innej w przestrzeni $\mathbb{R}^l$. Przekształcenie liniowe w dalszym ciągu będzie lipschitzowskie. Ci studenci, którzy byli uprzejmi zrobić zadanie o równoważności zbieżności w dowolnej normie ze zbieżnością w normie euklidesowej mogą udowodnić to korzystając z tego twierdzenia. Dla wszystkich podaję dowód poniżej. W tym dowodzie $\|\ \|$ oznacza dowolną normę na $\mathbb{R}^k$, zaś $|\ |$ – normę na $\mathbb{R}^l$. Niech L oznacza przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^l$, a $(l_{i,j})$ jego macierz. Mamy wtedy

$$|L\mathbf{x}| = \Big|\sum_i \Big(\sum_j l_{i,j} x_j\Big) \mathbf{e}_i\Big| \leq \sum_i \Big|\Big(\sum_j l_{i,j} x_j\Big) \mathbf{e}_i\Big| \leq$$

$$\leq \sum_i \Big(\sum_j |l_{i,j}| \cdot |x_j|\Big) |\mathbf{e}_i| \leq \max_j |x_j| \cdot \sum_{i,j} |l_{i,j}| \cdot |\mathbf{e}_i|.$$

Gdybyśmy umieli oszacować $\max_j |x_j|$ z góry przez $\|\mathbf{x}\|$ dowód byłby zakończony. Wykażemy, że takie oszacowanie jest możliwe. Mamy

$$\|\mathbf{x}\| = \Big\|\sum_j x_j\mathbf{e}_j\Big\| \le \sum_j |x_j|\cdot\|\mathbf{e}_j\| \le \max_j |x_j|\cdot\sum_j \|\mathbf{e}_j\|.$$

Niech $C = \sum_j \|\mathbf{e}_j\|$. Mamy więc $\|\mathbf{x}\| \le C\max_j |x_j|$. Wynika stąd, że jeśli $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{0}$ w normie $\max_j |x_j|$, czyli $\lim_{n\to\infty}(\max_j |x_{j,n}|) = 0$, to również $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{x}_n\| = 0$. Oznacza to, że funkcja $\|\ \|\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,\infty)$ jest ciągła, jeśli w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ odległość zdefiniowana jest za pomocą normy $\max_j |x_j|$, a w $\mathbb{R}$ — normalnie. Zbiór $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k\colon \ \max_j |x_j| = 1\}$ jest domknięty i ograniczony (czyli zwarty), zatem funkcja ciągła określona na nim osiąga kres dolny. Niech $c = \inf\{\|\mathbf{x}\|\colon \ \max_j |x_j| = 1\}$. Ponieważ kres dolny c jest wartością funkcji ciągłej $\|\ \|$ na zbiorze nie zawierającym punktu $\mathbf{0}$, jedynego w którym funkcja $\|\ \|$ przyjmuje wartość 0, więc $c>0$. Załóżmy, że $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$. Mamy wtedy

$$\|\mathbf{x}\| = \Big\|\max_j |x_j|\cdot\frac{\mathbf{x}}{\max_j |x_j|}\Big\| = \max_j |x_j|\cdot\Big\|\frac{\mathbf{x}}{\max_j |x_j|}\Big\| \ge \max_j |x_j|\cdot c.$$

Uzyskaliśmy zatem nierówność $\max_j |x_j| \le \frac{1}{c}\|\mathbf{x}\|$, a z niej wnioskujemy, że

$$|\, L\mathbf{x}| \le \max_j |x_j|\cdot\sum_{i,j}|l_{i,j}|\cdot|\,\mathbf{e}_i| \le \tfrac{1}{c}\|\mathbf{x}\|\cdot\sum_{i,j}|l_{i,j}|\cdot|\,\mathbf{e}_i|,$$

a to oznacza, że liczba $\frac{1}{c}\cdot\sum_{i,j}|l_{i,j}|\cdot|\,\mathbf{e}_i|$ jest stałą Lipschitza dla przekształcenia liniowego L, które odwzorowuje przestrzeń $\mathbb{R}^k$ z metryką wyznaczoną przez normę $\|\ \|$ w przestrzeń $\mathbb{R}^l$ z metryką wyznaczoną przez pewną normę $|\ \ |$.

Jasne jest, że „po drodze” wykazaliśmy, że $\|\mathbf{x}_n\| \longrightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\mathbf{x}_n\|_1 \longrightarrow 0$ dla dowolnego ciągu $(\mathbf{x}_n)$ złożonego z punktów przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

W dalszym ciągu $\|L\|$ oznaczać będzie najmniejszą stałą Lipschitza przekształcenia liniowego L. Ta stała zależy od wyboru norm w dziedzinie i w obrazie i tylko w szczególnych przypadkach będziemy mówić o jakie normy chodzi, na ogół będzie to $\|\ \|_2$ jednak dwójki pisać nie będziemy.

Czas na wnioski.

Twierdzenie 2.2 (o normie przekształcenia wieloliniowego)
Jeśli $B\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1},\mathbb{R}^{k_2},\ldots,\mathbb{R}^{k_n};\mathbb{R}^l)$, to istnieje liczba rzeczywista C taka, że

$$\|B(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)\| \le C\|\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{x}_2\|\cdot\cdots\cdot\|\mathbf{x}_n\|$$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}_1\in\mathbb{R}^{k_1},\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^{k_2},\ldots,\mathbf{x}_n\in\mathbb{R}^{k_n}$.

Dowód.
Na razie załóżmy, że $n=2$. Przekształcenie dwuliniowe B może być potraktowane jako przekształcenie liniowe $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^{k_1}\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_2};\mathbb{R}^l)$. Mamy więc $\|\mathcal{B}(\mathbf{x}_1)\| \le \|\mathcal{B}\|\cdot\|\mathbf{x}_1\|$. Stąd wynika, że $\|B(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\| = \big\|\big(\mathcal{B}(\mathbf{x}_1)\big)(\mathbf{x}_2)\big\| \le \|\mathcal{B}(\mathbf{x}_1)\|\cdot\|\mathbf{x}_2\| \le \|\mathcal{B}\|\cdot\|\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{x}_2\|$, co kończy dowód. Dla większych n stosujemy indukcję i korzystamy z tego, że dla $n=2$ teza jest już udowodniona. ■

Na wykładzie było to udowodnione inaczej, ale od przybytku (dowodów) głowa nie boli (podobno).

Twierdzenie 2.3 (o ciągłości przekształcenia wieloliniowego)
Jeśli $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \dots, \mathbb{R}^{k_n}; R^l)$, to B odwzorowuje przestrzeń $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{k_n})$ w przestrzeń $\mathbb{R}^l$ w sposób ciągły.

Dowód. Niech $\mathbf{h}_j, \mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^{k_j}$ i niech $\|\mathbf{h}_j\| < 1$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
&\|B(\mathbf{p}_1+\mathbf{h}_1, \mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n) - B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)\| \le \\
&\le \|B(\mathbf{p}_1+\mathbf{h}_1, \mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n) - B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n)\| + \\
&\quad + \|B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3 \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n) - B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n)\| + \dots + \\
&\qquad + \|B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n) - B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n)\| = \\
&= \|B(\mathbf{h}_1, \mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n)\| + \|B(\mathbf{p}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n)\| + \dots + \\
&\qquad + \|B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{h}_n)\| \le \\
&\le \|B\| \cdot \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2\| \cdot \|\mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n\| + \|B\| \cdot \|\mathbf{p}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \cdot \|\mathbf{p}_3+\mathbf{h}_3\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n\| + \\
&\qquad + \|B\| \cdot \|\mathbf{p}_1\| \cdot \|\mathbf{p}_2\| \cdot \|\mathbf{p}_3\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{p}_{n-1}\| \cdot \|\mathbf{h}_n\| \le \\
&\le \|B\|(\|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2\| + \dots + \|\mathbf{h}_n\|)(1+\|\mathbf{p}_1\|)(1+\|\mathbf{p}_2\|)\dots(1+\|\mathbf{p}_n\|).
\end{aligned}$$

Z tej nierówności ciągłość B wynika od razu. ■

Jeśli komuś się ten dowód nie podoba, to może mu się przyjrzeć zakładając, że $B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ jest wyznacznikiem macierzy kwadratowej wymiaru n, której kolumnami są $\mathbf{x}_1$, …, $\mathbf{x}_n$ – to oczywiście nie jest sytuacja ogólna, ale dobry reprezentant trudności tu występujących. Jeśli i to nie pomoże można dowód ciągłości przeprowadzić zapisując wszystko we współrzędnych.

Zajmiemy się teraz różniczkowaniem funkcji wielu zmiennych. Zaczniemy od pojęcia pochodnej cząstkowej, bo jest ono najprostszym z tych, którymi przyjdzie nam się zająć. W tym rozdziale, jeśli nie napiszemy wyraźnie, że jest inaczej, odwzorowanie $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ będzie określone na zbiorze otwartym $G \subset \mathbb{R}^k$.

Definicja 2.4 (pochodnej cząstkowej)
Pochodną cząstkową pierwszego rzędu odwzorowania $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ze względu na zmienną x_i, $1 \le i \le k$, w punkcie $\mathbf{p} \in G$, nazywamy granicę $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{p})}{h}$, o ile istnieje; $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^k$ to wektor, którego wszystkie współrzędne z wyjątkiem i–tej są równe 0 a i–ta równa jest 1, czyli $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Tę pochodną cząstkową oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$. ■

Przykład 2.5 Niech $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2^3 + x_3 e^{x_4}$. Z definicji pochodnej cząstkowej wynika, że zachodzi następujący wzór:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2, x_3, x_4) - f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_1 + h + 2x_2^3 + x_3 e^{x_4} - (x_1 + 2x_2^3 + x_3 e^{x_4})}{h} = 1.
\end{aligned}$$

Pochodną $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ funkcji f obliczamy traktując x_1 jako argument funkcji f przy jednoczesnym traktowaniu zmiennych x_2, x_3, x_4 jako stałych (parametrów). Licząc analogicznie otrzymujemy jeszcze trzy równości: $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 6x_2^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = e^{x_4}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}(\mathbf{x}) = x_3 e^{x_4}$. ■

Przykład 2.6 Niech $f\binom{r}{\varphi} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ — tym razem współrzędne punktów piszemy pionowo, co – jak się okaże później — ma sens. Obliczymy pochodną względem zmiennej r:

$\frac{\partial f}{\partial r}\binom{r}{\varphi} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f\binom{r+h}{\varphi}-f\binom{r}{\varphi}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\binom{(r+h)\cos\varphi}{(r+h)\sin\varphi}-\binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$

Teraz kolej na pochodną względem zmiennej φ:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\binom{r}{\varphi} = \lim_{h\to 0}\frac{f\binom{r}{\varphi+h}-f\binom{r}{\varphi}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\binom{r\cos(\varphi+h)}{r\sin(\varphi+h)}-\binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}}{h} = \begin{pmatrix}\lim_{h\to 0}\frac{r\cos(\varphi+h)-r\cos\varphi}{h}\\ \lim_{h\to 0}\frac{r\sin(\varphi+h)-r\sin\varphi}{h}\end{pmatrix} = \binom{-r\sin\varphi}{r\cos\varphi}.$$

Widzimy więc, że w przypadku odwzorowania o wartościach w $\mathbb{R}^2$ otrzymaliśmy *wektor*, a nie liczbę! Rezultat ten jest dokładnie taki, jakiego należało się spodziewać. Jeśli funkcja o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^l$ ma w jakimś punkcie pochodną względem którejś ze swych k zmiennych, to ta pochodna cząstkowa jest wektorem l–wymiarowym. Właściwie na tym można by skończyć, ale warto jeszcze otrzymany rezultat zinterpretować fizycznie.[1] Można myśleć, że wartością funkcji f jest punkt płaszczyzny oddalony o r od punktu $\binom{0}{0}$ lub wektor zaczynający się w punkcie $\binom{0}{0}$ i kończący się w punkcie $f\binom{r}{\varphi} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ – traktujemy więc liczby r i φ jako tzw. współrzędne biegunowe punktu płaszczyzny. Przy obliczaniu pochodnej względem r traktujemy zmienną φ jako stałą. Możemy interpretować zmienną r jako czas. Po zmianie czasu o h znajdujemy się w punkcie $f\binom{r+h}{\varphi} = \binom{(r+h)\cos\varphi}{(r+h)\sin\varphi}$. Znaleźliśmy się więc w punkcie leżącym na tej samej półprostej wychodzącej z punktu $\binom{0}{0}$, ale w innej odległości od początku układu współrzędnych. Zmiana odległości równa jest zmianie czasu. Wobec tego prędkość skalarna powinna być równa 1 a wektor prędkości powinien być równoległy do półprostej, po której porusza się punkt. Wektor $\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ jest równoległy do półprostej wychodzącej z punktu $\binom{0}{0}$ i przechodzącej przez punkt $\binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$. Jego długość to 1. Jest to wektor równy *prędkości wektorowej* poruszającego się punktu. Podobnie można zinterpretować pochodną względem φ. Tym razem r się nie zmienia, natomiast zmienia się kąt jaki tworzy wektor o początku $\binom{0}{0}$ i końcu $\binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ z osią odciętych (poziomą osią układu współrzędnych). W tej sytuacji φ oznacza zarówno czas jak i ten kąt. Wobec tego ruch odbywa się po okręgu o środku $\binom{0}{0}$ i promieniu r. Chwilowa prędkość wektorowa jest więc wektorem stycznym do tego okręgu. Długość tego wektora to oczywiście r, bo prędkość kątowa równa jest 1. Wektorowi $\frac{\partial f}{\partial\varphi}\binom{r}{\varphi} = \binom{-r\sin\varphi}{r\cos\varphi}$ przysługują obie te własności. To właśnie jest wektor prędkości chwilowej w tym ruchu w momencie φ. ∎

Przykład 2.7 Niech $f\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\cos\psi\\ r\cos\varphi\sin\psi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$. Tym razem należy myśleć o tzw. współrzędnych sferycznych: r jest odległością od początku układu współrzędnych, φ – szerokością geograficzną na sferze o środku $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ i promieniu r, zaś ψ – długością geograficzną na tej sferze. Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi\\ \cos\varphi\sin\psi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi}\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\cos\psi\\ -r\sin\varphi\sin\psi\\ r\cos\varphi\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial f}{\partial \psi}\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r\cos\varphi\sin\psi\\ r\cos\varphi\cos\psi\\ 0\end{pmatrix}.$$

Pierwsza z nich, $\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix}$, to wektorowa prędkość w ruchu jednostajnym z prędkością skalarną 1, po promieniu wychodzącym z punktu $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ i przechodzącym przez punkt $\begin{pmatrix}r\cos\varphi\cos\psi\\ r\cos\varphi\sin\psi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$; druga z nich, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix}$, to prędkość wektorowa w ruchu po południku z pręd-

[1] Do przeczytania dalszej części tego przykładu wystarczy rozumieć pojęcie prędkości znane z lekcji fizyki w szkole.

kością kątową 1 (zachowujemy promień sfery i długość geograficzną, jedynie szerokość geograficzna zmienia się); trzecia to $\frac{\partial f}{\partial \psi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, to prędkość w ruchu po równoleżniku z prędkością kątową 1 (zachowujemy promień sfery i szerokość geograficzną, jedynie długość geograficzna zmienia się). W pierwszym przypadku prędkość skalarna równa jest 1, bo czas równy jest odległości od punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, w drugim prędkość skalarna równa jest promieniowi południka (bo prędkość kątowa jest równa 1) czyli r, w trzecim natomiast prędkość skalarna równa jest promieniowi równoleżnika (bo prędkość kątowa również w tym przypadku równa jest 1) czyli $r\cos\varphi$. Te prędkości skalarne równe są odpowiednio długościom wektorów $\frac{\partial f}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ i $\frac{\partial f}{\partial \psi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$. ■

Przykład 2.8 Niech $f\binom{x}{y} = \begin{cases} 0, & \text{jeli} \quad x = 0 = y; \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jeśli} \quad x \neq 0 \text{ lub } y \neq 0. \end{cases}$ Funkcja ta nie jest ciągła w punkcie $\binom{0}{0}$, bowiem dla $x \neq 0$ mamy $f\binom{x}{x} = \frac{1}{2}$ i jednocześnie $f\binom{0}{0} = 0 \neq \frac{1}{2}$. Oznacza to, że jeśli zbliżamy się do punktu $\binom{0}{0}$ wędrując wzdłuż prostej o równaniu $y = x$, to wartości badanej funkcji nie dążą do $0 = f\binom{0}{0}$. Oczywiście jest to jedyny punkt nieciągłości tej funkcji. Zbadamy teraz kwestię istnienia pochodnych cząstkowych funkcji f. We wszystkich punktach z wyjątkiem punktu $\binom{0}{0}$ pochodne cząstkowe istnieją, co wynika od razu z twierdzeń pozwalających na obliczanie pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Również w punkcie $\binom{0}{0}$ funkcja f ma pochodne cząstkowe. Wykażemy to. Mamy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\binom{h}{0} - f\binom{0}{0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$. Wykazaliśmy, że $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = 0$. W taki sam sposób wykazujemy, że $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = 0$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x \neq 0$ lub $y \neq 0$, to $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$ – wynika to natychmiast z twierdzenia o pochodnej ilorazu dwu funkcji jednej zmiennej. Analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$. Zachęcamy czytelnika do samodzielnego sprawdzenia tych wzorów oraz do sprawdzenia, że pochodne cząstkowe, które właśnie znaleźliśmy, są nieciągłe w punkcie $\binom{0}{0}$. ■

Przykład 2.8 pokazuje, że stwierdzenie istnienia pochodnych cząstkowych w jakimś punkcie, a nawet w całej dziedzinie funkcji nie pozwala jeszcze zbyt wiele na temat tej funkcji wywnioskować — z istnienia pochodnych cząstkowych nie wynika nawet ciągłość funkcji! Jasne jest, że potrzebne nam są własności pozwalające na stwierdzanie ciągłości funkcji i co więcej na stwierdzanie, że jej zachowanie w małym otoczeniu punktu *różniczkowalności* jest w przybliżeniu takie jak funkcji liniowej. To jest podstawowa idea w rachunku różniczkowym. Stosowaliśmy rozumowania oparte na tej właśnie idei wielokrotnie w przypadku funkcji jednej zmiennej. To one doprowadziły nas do sformułowania twierdzeń pozwalających na ustalanie w jakich przedziałach funkcja różniczkowalna jest monotoniczna, w jakich punktach może mieć lokalne ekstrema itd. Podamy teraz definicję różniczkowalności funkcji wielu zmiennych i warunek wystarczający dla różniczkowalności.

Definicja 2.9 (funkcji różniczkowalnej w punkcie)
Funkcja $f\colon \quad G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ określona na zbiorze G otwartym w $\mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna

w punkcie $\mathbf{p} \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie przekształcenie liniowe $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, że zachodzi równość $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$. Wtedy przekształcenie liniowe L nazywamy różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ i oznaczamy symbolem $Df(p)$ lub $df(p)$ lub $f'(p)$. ■

Uwaga 2.10 (o jednoznaczności różniczki.)
Zauważmy, że jeśli $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-L\mathbf{h}}{\|h\|} = \mathbf{0}$ i $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-\tilde{L}\mathbf{h}}{\|h\|} = \mathbf{0}$, to zachodzi też wzór $\mathbf{0} = \lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} - \lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-\tilde{L}\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\tilde{L}\mathbf{h}-L\mathbf{h}}{h}$. Ostatnia równość zachodzi wtedy jedynie, gdy $\tilde{L}\mathbf{h} = L\mathbf{h}$ dla wszystkich $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^k$. Jeśli bowiem $\tilde{L}\mathbf{h} \neq L\mathbf{h}$ dla pewnego $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^k$, to dla każdego $t > 0$ zachodzi wzór $\tilde{L}(t\mathbf{h}) = t\tilde{L}(\mathbf{h}) \neq tL(\mathbf{h}) = L(t\mathbf{h})$ więc również $\mathbf{0} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\tilde{L}(t\mathbf{h})-L(t\mathbf{h})}{\|t\mathbf{h}\|} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\tilde{L}\mathbf{h}-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\tilde{L}\mathbf{h}-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \neq \mathbf{0}$. Wynika stąd, że warunek nałożony na różniczkę spełniać może co najwyżej jedno przekształcenie liniowe. ■

Uwaga 2.11 (o definicji różniczkowalności)
Definicję różniczkowalności można też sformułować tak:
Funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p} \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ i taka funkcja $r\colon B[\mathbf{0},\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ciągła w punkcie $\mathbf{0}$, że $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i dla dowolnego wektora $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0},\varepsilon)$ zachodzi równość $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + L\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| r(\mathbf{h})$. ■

Twierdzenie 2.12 (warunek wystarczający dla różniczkowalności)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ określona na otwartym podzbiorze przestrzeni $\mathbb{R}^k$ ma pochodne cząstkowe względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ w każdym punkcie pewnej kuli otwartej $B(\mathbf{p},\varepsilon)$ o środku w punkcie $\mathbf{p}$ i wszystkie one są ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i zachodzi następująca równość:

$$Df(\mathbf{p})\mathbf{h} = \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})h_1 + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})h_2 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{p})h_k.$$

Dowód. By uniknąć komplikacji związanych z zapisem przeprowadzimy dowód w przypadku $l = 1$ i $k = 2$. Dowód w sytuacji ogólnej nie różni się niczym istotnym od tego, który zamierzamy podać — po prostu jest więcej współrzędnych zarówno w dziedzinie jak i w obrazie. Skorzystamy przy tym z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych. Niech $\mathbf{p} = \binom{p_1}{p_2}$, $\mathbf{h} = \binom{h_1}{h_2}$. Niech $\alpha(t) = f(\mathbf{p}+t\mathbf{e}_1) = f\binom{p_1+t}{p_2}$. Mamy $\alpha'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\binom{p_1+t}{p_2}$. Istnieje taka liczba θ_1, że $\alpha(h_1) - \alpha(0) = \alpha'(\theta_1)h_1$ i $0 < |\theta_1| < |h_1|$, zatem zachodzi równość $f(\mathbf{p}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{p}) = f\binom{p_1+h_1}{p_2} - f\binom{p_1}{p_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\binom{p_1+\theta_1}{p_2}h_1$. Niech $\beta(s) = f\binom{p_1+h_1}{p_2+s}$. Istnieje taka liczba σ_2, że $\beta(h_2) - \beta(0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\binom{p_1+h_1}{p_2+\sigma_2}h_2 = \beta'(\sigma_2)h_2$ i $0 < \sigma_2| < |h_2|$. Stąd

$$\tfrac{1}{\|\mathbf{h}\|}\Big(f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})h_1 - \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})h_2\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{\|\mathbf{h}\|}\Big(f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}+h_1\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{p}+h_1\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{p}) - \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})h_1 - \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})h_2\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{\|\mathbf{h}\|}\Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}+h_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2)h_2 + \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}+\theta_1\mathbf{e}_1)h_1 - \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})h_1 - \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})h_2\Big) =$$
$$= \tfrac{h_2}{\|\mathbf{h}\|}\Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_2}f(\mathbf{p}+h_1\mathbf{e}_1+\sigma_2\mathbf{e}_2) - \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})\Big) + \tfrac{h_1}{\|\mathbf{h}\|}\Big(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}f(\mathbf{p}+\theta_1\mathbf{e}_1) - \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})\Big) \xrightarrow[\|\mathbf{h}\|\to 0]{} \mathbf{0},$$

bo $\frac{|h_1|}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1$, $\frac{|h_2|}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1$ i pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ i $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ są ciągłe (jako funkcje zespołu zmiennych) w punkcie $\mathbf{p}$. Wykazaliśmy, że funkcja liniowa przypisująca wektorowi $\mathbf{h}$ liczbę $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})h_2$ jest różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$. ■

Uwaga 2.13
Dowód polega na tym, że zamiast przemieścić się z punktu $\mathbf{p}$ do punktu $\mathbf{p}+\mathbf{h}$ od razu, przemieszczamy się najpierw z punktu $\mathbf{p}$ do punktu $\mathbf{p}+h_1\mathbf{e}_1$, czyli równolegle do jednej osi układu współrzędnych, a potem dopiero z tego punktu do punktu $\mathbf{p}+\mathbf{h}$, drugie przemieszczenie odbywa się więc w kierunku równoległym do drugiej osi. Czynimy tak, by sprowadzić problem do różniczkowania funkcji jednej zmiennej, bo tam działa twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej pozwalające na wnioskowanie własności funkcji z odpowiednich własności pochodnych.

Pochodna cząstkowa obliczana jest po to, by uzyskać informacje o tym jak zmienia się funkcja w kierunku jednej z osi układu współrzędnych. Różniczkę, o ile istnieje, obliczamy po to, by dowiedzieć się jak zachowuje się funkcja w całym otoczeniu punktu. Pojęciem pośrednim jest pochodna kierunkowa.

Definicja 2.14 (pochodnej kierunkowej)
Pochodną funkcji $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ w punkcie $\mathbf{p}$, w kierunku wektora $\mathbf{v}$ nazywamy granicę
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t},$$
jeśli ta granica istnieje. Tę pochodną oznaczamy symbolem $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$. ■

Jasne jest, że właśnie uogólniliśmy pojęcie pochodnej cząstkowej: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{p})$. Pochodna kierunkowa w kierunku wektora $\mathbf{v}$ obliczana jest po to, by ocenić tempo zmian funkcji w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ na prostej przechodzącej przez punkt $\mathbf{p}$ równoległej do wektora $\mathbf{v}$. W punktach różniczkowalności funkcji pochodną kierunkową można znaleźć po obliczeniu różniczki funkcji:

Twierdzenie 2.15 (o istnieniu pochodnej kierunkowej)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}\in G$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^k$, to funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ pochodna kierunkową w kierunku wektora $\mathbf{v}$ i zachodzi równość:
$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})\mathbf{v}.$$

Dowód. Mamy
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})-Df(\mathbf{p})(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|}\cdot\frac{\|t\mathbf{v}\|}{t} + Df(\mathbf{p})\mathbf{v}\right) = Df(\mathbf{p})\mathbf{v}$$
— skorzystaliśmy tu z tego, że iloczyn wyrażenia $\frac{\|t\mathbf{v}\|}{t}$, ograniczonego, i wyrażenia dążącego do $\mathbf{0}$ ma granicę $\mathbf{0}$ oraz z tego, że $Df(\mathbf{p})(t\mathbf{v}) = tDf(\mathbf{p})\mathbf{v}$ i oczywiście z różniczkowalności funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$, z której wynika, że $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{p})-Df(\mathbf{p})(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|}\right) = \mathbf{0}$. W ten sposób zakończyliśmy dowód istnienia pochodnej w kierunku wektora $\mathbf{v}$. ■

Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że przy ustalonym punkcie $\mathbf{p}$ pochodna $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ jest liniową funkcją wektora $\mathbf{v}$, oczywiście jeśli funkcja f jest różniczkowalna w tym punkcie. Czytelnik zechce sprawdzić, że jeśli $f\binom{0}{0} = 0$ i $f\binom{x}{y} = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, gdy przynajmniej jedna z liczb x, y jest różna od 0, to $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = f(\mathbf{v})$ dla każdego wektora

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$. W tym przypadku pochodna w kierunku wektora $\mathbf{v}$ w punkcie $\mathbf{0}$ nie jest więc liniową funkcją wektora $\mathbf{v}$, a co za tym idzie, funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0}$. Zachęcamy do sprawdzenia, że f jest w tym punkcie ciągła.

Powtórzmy: z różniczkowalności funkcji w punkcie wynika istnienie pochodnych kierunkowych w tym punkcie we wszystkich kierunkach, w szczególności istnienie pochodnych cząstkowych. Z istnienia pochodnych cząstkowych nie wynika nawet ciągłość funkcji — widzieliśmy to w przykładzie czwartym. Istnieje funkcja, której pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach są równe 0 w pewnym punkcie i która nie jest ciągła w tym punkcie. Oznacza to, że zbadanie zachowania się funkcji na prostych przechodzących przez dany punkt to jedynie wstęp do zbadania zachowania się tej funkcji w **otoczeniu** tego punktu.

Twierdzenie 2.16 (warunek konieczny dla różniczkowalności)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ określona na otwartym podzbiorze przestrzeni $\mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p} \in G$, to ma ona w tym punkcie pochodną cząstkową względem każdej ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ i dla każdego $j = 1, 2, \ldots, k$ zachodzi wzór $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})\mathbf{e}_j$, gdzie $\mathbf{e}_j$ oznacza jak zwykle wektor, którego wszystkie współrzędne z wyjątkiem j–tej są równe 0, zaś j–ta współrzędna równa jest 1. ■

Podane poprzednio przykłady świadczą o istnieniu funkcji, które mają w pewnych punktach pochodne cząstkowe, chociaż nie są w nich różniczkowalne. Warunek dostateczny pozwala natomiast na stwierdzenie, że funkcje zdefiniowane za pomocą „standardowych wzorów" są różniczkowalne, o ile „jedna definicja obowiązuje w całej dziedzinie". W innych przypadkach kłopoty z różniczkowalnością pojawiać się mogą w punktach, w otoczeniu których obowiązują różne definicje wartości funkcji. Funkcje, które rozważaliśmy w przykładach 2.5 — 2.7 są dzięki warunkowi wystarczającemu dla różniczkowalności różniczkowalne — ich pochodne cząstkowe są ciągłe w całej przestrzeni. To samo dotyczy funkcji z przykładu 2.8 z wyłączeniem punktu $\binom{0}{0}$. Przykłady funkcji różniczkowalnych możemy teraz mnożyć, ale nie będziemy tego czynić.

Twierdzenie 2.17 (o ciągłości funkcji różniczkowalnej)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p} \in G$, to jest też ciągła w punkcie $\mathbf{p}$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$. Mamy wtedy:
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \Big(\tfrac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-Df(\mathbf{p})\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \|\mathbf{h}\| + f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{h} \Big) =$$
$$= \mathbf{0} + f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{0} = f(\mathbf{p}),$$
a to właśnie oznacza, że funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{p}$ — skorzystaliśmy tu z definicji różniczkowalności i z tego, że przekształcenie liniowe $Df(\mathbf{p})$ jest ciągłe. Dowód został zakończony. ■

Czytelnik z łatwością może przeoczyć różnicę między tym rozumowaniem i dowodem przeprowadzonym dla funkcji jednej zmiennej, bo polega ona jedynie na tym, że teraz wystąpiła norma wektora a poprzednio — wartość bezwzględna liczby rzeczywistej.

Jeśli $f\binom{r}{\varphi} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$, tak jak w przykładzie 2.6, to $Df\binom{r}{\varphi} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$ — pierwsza kolumna tej macierzy to pochodna odwzorowania f względem r, czyli pierwszej zmiennej, a druga kolumna to pochodna względem φ, czyli drugiej zmiennej. W pierwszym wierszu mamy pochodne cząstkowe pierwszej funkcji współrzędnej odwzorowania f, a w drugim – drugiej. Przypominamy, że na analizie rozpatrujemy macierze przekształcenia liniowego prawie zawsze względem standardowej bazy w $\mathbb{R}^k$. Formalnie rzecz biorąc różniczka funkcji w punkcie jest przekształceniem liniowym przestrzeni argumentów w przestrzeń wartości odwzorowania, jednak ponieważ używamy ustalonych baz, będziemy utożsamiać przekształcenie liniowe z jego macierzą względem tych baz.

Niech $f\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\cos\psi\\ r\cos\varphi\sin\psi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$, zajmujemy się więc odwzorowaniem z przykładu 2.7.

W tym przypadku mamy $Df\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi\\ \cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\end{pmatrix}$. Podobnie jak w przypadku poprzednim widzimy, że pierwsza kolumna to pochodna cząstkowa względem zmiennej r, druga — względem zmiennej φ, trzecia — względem zmiennej ψ. W pierwszym wierszu występują kolejno pochodne cząstkowe pierwszej funkcji współrzędnej odwzorowania f względem kolejnych zmiennych itd.

Twierdzenie 2.18 (o pochodnej przekształcenia wieloliniowego)
Jeśli B jest przekształceniem n–liniowym, to B jest różniczkowalne i zachodzi wzór
$$DB(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_n)(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_n) = \\ = B(\mathbf{h}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_n)+B(\mathbf{p}_1,\mathbf{h}_2,\mathbf{p}_3,\ldots,\mathbf{p}_n)+\cdots+B(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_{n-1},\mathbf{h}_n).$$

Dowód. Wyrażenie $B(\mathbf{p}_1+\mathbf{h}_1,\mathbf{p}_2+\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{p}_n+\mathbf{h}_n)$ można przedstawić jako sumę 2^n składników. Każdy z nich jest wartością funkcji B na n–elementowym ciągu, którego część wyrazów to punkty $\mathbf{p}_j$ a pozostałe to punkty $\mathbf{h}_j$. Jeśli $\mathbf{h}_j$ występuje dwa lub więcej razy, to po podzieleniu przez $\|\mathbf{h}\|$, czyli przez $\sqrt{\mathbf{h}_1^2+\mathbf{h}_2^2+\cdots+\mathbf{h}_n^2}$ otrzymujemy wyrażenie dążące do $\mathbf{0}$ przy $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$.[2] ■

Podamy teraz twierdzenia pozwalające na obliczanie pochodnych jednych funkcji, gdy znane są pochodne innych funkcji.

Twierdzenie 2.19 (o arytmetycznych własnościach różniczki)
Jeśli funkcje f i g określone na tym samym zbiorze otwartym są różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$, to:

a. jeśli f i g prowadzą w tę samą przestrzeń $\mathbb{R}^l$, to ich suma i różnica są różniczkowalne i zachodzi wzór $D(f+g)(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})+Dg(\mathbf{p})$;

b. jeśli wartości f leżą w $\mathbb{R}^l$, wartości g leżą w $\mathbb{R}^m$ i $h(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}))$, to funkcja $h\colon\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^{l+m}$ jest różniczkowalna i prawdziwy jest wzór
$$Dh(\mathbf{p})\mathbf{h} = (Df(\mathbf{p})\mathbf{h},Dg(\mathbf{p})\mathbf{h});$$

[2] Oczywiście $\mathbf{h}_1^2 = \mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_1$, mamy tu do czynienia z iloczynem skalarnym wektora $\mathbf{h}_1$ przez ten sam wektor $\mathbf{h}_1$.

c. jeżeli ich iloczyn $f\cdot g$ jest zdefiniowany (np. wartościami funkcji f są liczby rzeczywiste albo wartościami funkcji f i g są wektory tego samego wymiaru a iloczyn to iloczyn skalarny, lub wartości obu funkcji f, g to wektory trójwymiarowe a iloczyn, to iloczyn wektorowy, lub wartości funkcji f i g to macierze takich wymiarów, że mnożenie $f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})$ jest wykonalne), to $f\cdot g$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $\mathbf{p}$ i zachodzi

$$D(f\cdot g)(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot Dg(\mathbf{p})),\ \text{tzn.}$$

$$D(f\cdot g)(\mathbf{p})\mathbf{h} = Df(\mathbf{p})\mathbf{h}\cdot g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\cdot Dg(\mathbf{p})(\mathbf{h})\ \text{dla}\ \mathbf{h}\in\mathbb{R}^k,$$ [3]

ogólnie: jeżeli B jest przekształceniem dwuliniowym określonym na iloczynie kartezjańskim przeciwdziedzin funkcji f i g, to funkcja h określona za pomocą wzoru $h(\mathbf{x}) = B(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i zachodzi wzór $Dh(\mathbf{p})\mathbf{h} = B\big(Df(\mathbf{p})\mathbf{h}, g(\mathbf{p})\big) + B\big(f(\mathbf{p}), Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}\big)$.

Dowód. Dowód części **a** to proste ćwiczenie na zastosowanie definicji różniczki i twierdzenia mówiącego, że granica sumy to suma granic. Dowód części **b** wymaga jedynie zastosowania definicji różniczki i zrozumienia związku między zbieżnością w $\mathbb{R}^l$ i w $\mathbb{R}^m$ a zbieżnością w $\mathbb{R}^{l+m}$.

Zajmiemy się częścią **c**. Niech $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})$ oraz niech $g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varrho(\mathbf{h})$ przy czym r i ϱ są funkcjami ciągłymi w punkcie $\mathbf{0}$ oraz $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i $\varrho(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Możemy teraz napisać

$$B\big(f(\mathbf{p}+\mathbf{h}), g(\mathbf{p}+\mathbf{h})\big) = B\big(f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h}), g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|ro(\mathbf{h})\big) =$$
$$B\big(f(\mathbf{p}), g(\mathbf{p})\big) + B\big(Df(\mathbf{p})\mathbf{h}, g(\mathbf{p})\big) + B\big(f(\mathbf{p}), Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}\big) + B\big(Df(\mathbf{p})\mathbf{h}, Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}\big) +$$
$$+\|\mathbf{h}\|B\big(r(\mathbf{h}), g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varrho(\mathbf{h})\big) + \|\mathbf{h}\|B\big(f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h}), \varrho(\mathbf{h})\big).$$

Stąd i z twierdzenia o normie przekształcenia wieloliniowego wynika natychmiast, że

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \tfrac{1}{\|\mathbf{h}\|}\Big(B\big(Df(\mathbf{p})\mathbf{h}, Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}\big) + \|\mathbf{h}\|B\big(r(\mathbf{h}), g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varrho(\mathbf{h})\big) +$$
$$+\|\mathbf{h}\|B\big(f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h}), \varrho(\mathbf{h})\big)\Big) = \mathbf{0}.$$

Dowód części **c** został tym samym zakończony. ■

Twierdzenie 2.20 (o różniczce złożenia dwu funkcji)

Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ a funkcja f w punkcie $g(\mathbf{p})$ oraz że złożenie $f\circ g$ jest zdefiniowane, tj. dziedzina funkcji f zawiera zbiór wartości funkcji g. Wtedy złożenie $f\circ g$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$ i zachodzi równość: $D(f\circ g)(\mathbf{p}) = Df(g(\mathbf{p}))\cdot Dg(\mathbf{p})$, tu kropka oznacza mnożenie macierzy czyli składanie przekształceń liniowych. Jeśli $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ oraz $g = (g_1, g_2, \ldots, g_l)$, to $\frac{\partial(f_i\circ g)}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = \sum_{s=1}^{l}\frac{\partial f_i}{\partial y_s}(g(\mathbf{p}))\frac{\partial g_s}{\partial x_j}(\mathbf{p})$.

Dowód. Niech $g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})$ i $f(g(\mathbf{p}) + \mathbf{H}) = f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))\mathbf{H} + \|\mathbf{H}\|\varrho(\mathbf{H})$. Z różniczkowalności funkcji f i g wynika, że $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$ oraz $\lim\limits_{\mathbf{H}\to\mathbf{0}}\varrho(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$. Zdefiniujmy $\mathbf{H}(\mathbf{h}) = g(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{p})$. Zachodzi wtedy równość $\mathbf{H}(\mathbf{h}) = Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})$, zatem $\mathbf{H}(\mathbf{h}) \xrightarrow[\mathbf{h}\to\mathbf{0}]{} \mathbf{0}$. Mamy

[3] Mnożenie macierzy jest nieprzemienne, więc nie wolno zmieniać kolejności czynników iloczynu.

$f(g(\mathbf{p}+\mathbf{h})) = f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))\mathbf{H} + \|\mathbf{H}\|\varrho(\mathbf{H}) =$
$= f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))\Big(Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})\Big) + \|\mathbf{H}\|\varrho(\mathbf{H}) =$
$= f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + Df(g(\mathbf{p}))\|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h}) + \|\mathbf{H}\|\varrho(\mathbf{H}) =$
$= f(g(\mathbf{p})) + Df(g(\mathbf{p}))Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\Big[Df(g(\mathbf{p}))r(\mathbf{h}) + \big(Dg(\mathbf{p})\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} + r(\mathbf{h})\big)\varrho(\mathbf{H})\Big].$
Teza wynika od razu z tego że granicą wyrażenia w nawiasie kwadratowym jest $\mathbf{0}$.

Twierdzenie 2.21 (o różniczce funkcji odwrotnej)
Załóżmy, że funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest różniczkowalna w pewnym punkcie $\mathbf{p}$ zbioru otwartego $G \subseteq \mathbb{R}^k$, że jej zbiór wartości jest otwarty w $\mathbb{R}^l$, że różniczka $Df(\mathbf{p})$ jest izomorfizmem oraz że funkcja f jest różnowartościowa i funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła w punkcie $f(\mathbf{p})$. Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(\mathbf{p})$ i zachodzi równość $D(f^{-1})(f(\mathbf{p})) = [Df(\mathbf{p})]^{-1}$.

Dowód. Niech $\mathbf{H} = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$. Ta równość jest równoważna następującej: $f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \mathbf{H}$, a ta z kolei temu, że $\mathbf{p}+\mathbf{h} = f^{-1}(f(\mathbf{p})+\mathbf{H})$. Wobec tego mamy $\mathbf{h} = f^{-1}(f(\mathbf{p}) + \mathbf{H}) - f^{-1}(f(\mathbf{p}))$. Z ciągłości odwzorowania f wynika, że zachodzi równość $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{H} = \lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \big(f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})\big) = \mathbf{0}$, a z ciągłości f^{-1} wynika, że $\lim\limits_{\mathbf{H}\to\mathbf{0}} \mathbf{h} = \lim\limits_{\mathbf{H}\to\mathbf{0}} \big(f^{-1}(f(\mathbf{p}) + \mathbf{H}) - f^{-1}(f(\mathbf{p}))\big) = \mathbf{0}$. Widzimy więc, że $\lim\limits_{\mathbf{H}\to\mathbf{0}} \mathbf{h} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Z różnowartościowości funkcji f wynika, że $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Mamy zatem

$$\frac{f^{-1}(f(\mathbf{p})+\mathbf{H}) - f^{-1}(f(\mathbf{p})) - \big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}\mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{h}-\mathbf{p}-\big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}\big(f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})\big)}{\|f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})\|} =$$
$$= \frac{\mathbf{h}-\big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}\big(Df(\mathbf{p})\mathbf{h}+\|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})\big)}{\|Df(\mathbf{p})\mathbf{h}+\|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})\|} = \frac{-\big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}r(\mathbf{h})}{\|Df(\mathbf{p})\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}+r(\mathbf{h})\|} \xrightarrow[\mathbf{h}\to\mathbf{0}]{} 0,$$

bo licznik ostatniego ułamka dąży do 0, a mianownik jest od 0 oddzielony: $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r(\mathbf{h}) = 0$ i istnieje liczba $c > 0$ taka, że $\|Df(\mathbf{p})\mathbf{v}\| \geq c$ dla każdego wektora $\mathbf{v}$, którego długością jest 1. Stąd i z definicji różniczki wynika, że $\big(Df(\mathbf{p})\big)^{-1}$ jest różniczką przekształcenia f^{-1} w punkcie $f(\mathbf{p})$. ■

Twierdzenie o arytmetycznych własnościach różniczki jest nieomal oczywiste, jego stosowanie nie sprawia nikomu żadnych trudności. Z twierdzeniem o pochodnej złożenia zapoznamy się dokładniej nieco poźniej, teraz wypada stwierdzić, że jedną z głównych przyczyn definiowania iloczynu macierzy w znany sposób jest to, że wtedy teza twierdzenia o różniczce złożenia wygląda dokładnie tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej. Ta sama uwaga dotyczy twierdzenia o różniczce funkcji odwrotnej. Podajemy je, by pokazać pełną analogię teorii funkcji jednej i wielu zmiennych rzeczywistych. Zresztą tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej problemem jest różniczkowalność funkcji odwrotnej, wartość różniczki można znaleźć korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. Dodajmy jeszcze, że w twierdzeniu o różniczce funkcji odwrotnej wymiary przestrzeni wartości i przestrzeni argumentów muszą być równe, bo zakładamy, że te przestrzenie są izomorficzne.

Szczególnie ważne są funkcje wielu zmiennych o wartościach rzeczywistych. W tym przypadku często mówimy o gradiencie funkcji zamiast o jej różniczce w punkcie.

Definicja 2.22 (gradientu funkcji o wartościach rzeczywistych)
Jeśli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją określoną na podzbiorze otwartym G przestrzeni $\mathbb{R}^k$ różniczkowalną w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$, to gradientem funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy taki wektor grad $f(\mathbf{p})$, że dla każdego wektora $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi następująca równość $Df(\mathbf{p})\mathbf{h} = \text{grad } f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$. ■

Różnica między gradientem i różniczką wyda się wielu czytelnikom różnicą minimalną: gradient jest wektorem k–wymiarowym, natomiast różniczka $Df(\mathbf{p})$ jest przekształceniem liniowym z przestrzeni $\mathbb{R}^k$ w jednowymiarową przestrzeń liniową $\mathbb{R}$, czyli elementem przestrzeni $(\mathbb{R}^k)^*$. Ponieważ stosujemy standardowe bazy w przestrzeni $\mathbb{R}^k$, więc współrzędne wektora grad $f(\mathbf{p})$ są równe odpowiednim współrzędnym przekształcenia liniowego $Df(\mathbf{p})$. To nasz wybór, na razie naturalny. Gdy będziemy rozważać kwestie nieco ogólniejsze, np. funkcje określone jedynie na powierzchniach, to żadnej „naturalnej" metody wybierania bazy nie będzie, więc utożsamienie gradientu z różniczką za pomocą współrzędnych straci sens.

Rozważmy teraz funkcję $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalną w punkcie $\mathbf{p} \in G$. Niech $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ oznaczają takie wektory, że $\|\mathbf{v}\| = \|\text{grad } f(\mathbf{p})\|$ i $\mathbf{w} = \text{grad } f(\mathbf{p})$. Mamy wtedy

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \text{grad } f(\mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \le \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|^2 = f'_{\mathbf{w}}(p).$$

Wykazaliśmy więc

Twierdzenie 2.23 (o kierunku najszybszego wzrostu funkcji)
Pochodna funkcji f w kierunku gradientu funkcji w danym punkcie $\mathbf{p}$ jest największą ze wszystkich pochodnych w tym punkcie w kierunku wektorów o długości $\|\text{grad } f(\mathbf{p})\|$. ■

Zwykle mówimy, że gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji, bo pochodna mierzy tempo zmian funkcji, jeśli pochodna jest dodatnia to funkcja rośnie. Rozważanie jedynie wektorów o danej długości jest oczywiście konieczne, bo $f'_{\alpha\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \alpha f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ dla dowolnego punktu $\mathbf{p}$, dowolnego wektora $\mathbf{v}$ i dowolnej liczby rzeczywistej α, a my chcemy porównywać tempo wzrostu funkcji wzdłuż prostych przechodzących przez punkt $\mathbf{p}$ oczywiście przy założeniu, że po każdej prostej poruszamy się z tą samą prędkością – podany w tym zdaniu wzór stwierdza po prostu, że zmiana prędkości poruszania się po prostej przechodzącej przez $\mathbf{p}$ powoduje wzrost prędkości zmian funkcji w takim samym stosunku.

Jednym z naszych celów jest znajdowanie wartości najmniejszych i największych funkcji wielu zmiennych, których wartościami są liczby rzeczywiste, tzw. funkcji rzeczywistych. W przypadku funkcji jednej zmiennej punktem wyjścia do rozwiązywania zadań tego typu było twierdzenie o zerowaniu się pochodnej w punktach lokalnego ekstremum. Powtórzmy je teraz dla funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie 2.24 (o zerowaniu się pochodnych w punktach lokalnego ekstremum)
Jeśli funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $\mathbf{p}$ lokalne maksimum lub lokalne minimum i ma pochodną kierunkową $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ w kierunku wektora $\mathbf{v}$, to $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = 0$. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, to grad $f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Dowód. Wynika to natychmiast z tego, że jeśli f ma lokalne ekstremum w punkcie $\mathbf{p}$, to dla dowolnego wektora $\mathbf{v}$ funkcja g zdefiniowana wzorem $g(t) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ ma lokalne ekstremum w punkcie 0, a zatem $0 = g'(0) = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ – ostatni wzór wynika natychmiast z definicji obu pochodnych w nim występujących. ■

Definicja 2.25 (wektora stycznego do zbioru)
Niech $A \subset \mathbb{R}^k$ będzie dowolnym zbiorem. Wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ nazywać będziemy stycznym do zbioru A w punkcie $\mathbf{p} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \geq 0$ i ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów zbioru A zbieżny do $\mathbf{p}$, o wyrazach różnych od $\mathbf{p}$ taki, że $\mathbf{v} = t \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\|}$. Zbiór wektorów stycznych do zbioru A w punkcie $\mathbf{p} \in A$ oznaczamy symbolem $T_{\mathbf{p}}A$. ■

Z definicji wynika od razu, że mówić o wektorach stycznych do A w punkcie $\mathbf{p}$ można, jeśli istnieje co najmniej jeden ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów zbioru A o wyrazach różnych od $\mathbf{p}$, zbieżny do $\mathbf{p}$. Takie punkty nazywane są punktami skupienia zbioru A. Wektor $\mathbf{0}$ jest styczny do każdego zbioru w każdym jego punkcie skupienia. Jeśli $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}A$ oraz $s \geq 0$, to również $s\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}A$. Nie jest natomiast prawdą, że suma wektorów stycznych do zbioru A jest wektorem stycznym do zbioru A. Może się tak zdarzyć, ale nie musi. Następne twierdzenie wynika wprost z definicji wektora stycznego.

Twierdzenie 2.26 (o styczności wektora stycznego do krzywej zawartej w zbiorze A)
Niech $\mathbf{p}$ będzie punktem skupienia zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Niech $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie 0, $\delta > 0$, przy czym $\gamma(t) \in A$ dla $t > 0$ oraz $\gamma(0) = \mathbf{p}$. Wtedy wektor $\gamma'(0) = D\gamma(0) \cdot 1$ jest styczny do A w punkcie $\mathbf{p}$. ■

Można myśleć, że obraz funkcji γ to krzywa w $\mathbb{R}^k$ przechodząca przez punkt $\mathbf{p}$ i to taka, że jeśli posuwamy się wzdłuż niej w odpowiednim kierunku, to nie opuszczamy zbioru A. Wektor $\gamma'(0)$ można potraktować jako wektor prędkości (γ opisuje ruch pewnego punktu w ten sposób, że w chwili t poruszający się punkt znajduje się w położeniu $\gamma(t)$, w tej sytuacji wektor $\gamma'(0)$ jest wektorem prędkości chwilowej, więc musi być styczny do krzywej, po której punkt się porusza). Nasza definicja jest dosyć ogólna, więc nie każdy wektor styczny do zbioru może być potraktowany jako wektor styczny do krzywej zawartej w tym zbiorze. W wielu podręcznikach wektory styczne do zbioru są definiowane jako wektory styczne do krzywych zawartych w tym zbiorze, my wybieramy nieco ogólniejszą, mniej popularna definicję, bo w niektórych sytuacjach jest ona wygodniejsza i ułatwia omawianie pewnych kwestii.

Podaliśmy wiele twierdzeń i definicji, teraz czas na ich zilustrowanie.

Przykład 2.27 Niech $g\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = x + 2y + 3z - 6$ i niech $A = \{\mathbf{p}\colon \quad g(\mathbf{p}) = 0\}$, tzn zbiór A składa się z tych punktów $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$, że $x + 2y + 3z = 6$, jest więc, jak wiadomo, płaszczyzną. Punkt $\mathbf{q} := \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ leży na tej płaszczyźnie, bo $1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$. Równanie płaszczyzny przepisać możemy w postaci wektorowej: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}$, gdzie $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$. Niech $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}\right)$ będzie wektorem prostopadłym do wektora $\mathbf{u}$, tzn. $0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c$.

Niech $\gamma(t)=\mathbf{q}+t\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1+at\\1+bt\\1+ct\end{pmatrix}$. Wtedy $g(\gamma(t))=1+at+2(1+bt)+3(1+ct)-6=$ $=t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=t\cdot 0=0$, zatem $\gamma(t)\in A$. Wobec tego $\gamma'(t)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ jest wektorem stycznym do płaszczyzny A w punkcie $\mathbf{q}$. Wykazaliśmy więc, że każdy wektor prostopadły do $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ jest styczny do płaszczyzny A. Wykazaliśmy też, że jeśli wektor $\mathbf{v}$ jest prostopadły do wektora $\mathbf{u}$, to punkt $\mathbf{q}+\mathbf{v}$ leży na płaszczyźnie A. Wektor $\mathbf{v}$ może więc być potraktowany jako różnica dwóch punktów płaszczyzny A, czyli jako na niej leżący.

Zauważmy jeszcze, że innych wektorów stycznych do płaszczyzny nie ma: jeżeli $\mathbf{p}_n\in A$, czyli $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}_n-6=0$, to oczywiście $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{p}_n-\mathbf{q})=0$, zatem $\mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{p}_n-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_n-\mathbf{q}\|}=0$, jeśli więc $t\mathbf{v}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbf{p}_n-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_n-\mathbf{q}\|}$, to $\mathbf{u}\cdot t\mathbf{v}=0$, zatem również $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$.

Wykazaliśmy więc, że zbiór wektorów stycznych do płaszczyzny A składa się z wektorów leżących na tej płaszczyźnie (tj. będących różnicami punktów z tej płaszczyzny) oraz że wektor $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ jest do wszystkich tych wektorów, więc również do płaszczyzny A prostopadły. Czytelnik zauważył z pewnością, że wybór punktu płaszczyzny był całkowicie nieistotny dla tych rozważań. Istotne było jedynie to, że równanie płaszczyzny było postaci $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}-6=0$. Jasne jest, że równanie dowolnej płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ może być zapisane w ten sposób, zatem teza jest prawdziwa dla dowolnego punktu leżącego na dowolnej płaszczyźnie. Tę samą postać ma równanie prostej w $\mathbb{R}^2$, tylko wymiar jest mniejszy. Można też myśleć o większych wymiarach. Jeśli więc prosta na płaszczyźnie zdefiniowana jest za pomocą równania $ax+by+c=0$, to wektor $\binom{a}{b}$ jest do tej prostej prostopadły. Wróćmy jeszcze do płaszczyzny A. Zdefiniowana ona została za pomocą równania $g(\mathbf{x})=0$. Okazało się, że gradient funkcji g jest do tej płaszczyzny prostopadły. Oznacza to, że funkcja g najszybciej zmienia się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny A, natomiast w kierunku stycznym do płaszczyzny jej pochodne kierunkowe są równe 0, więc tempo zmian jest najmniejsze, co nikogo nie dziwić nie powinno, bo przecież na płaszczyźnie A funkcja g jest stała. Również ten efekt jest przejawem ogólniejszej prawidłowości, o czym przekonamy się niebawem. ■

Twierdzenie 2.28 (warunek konieczny styczności do poziomicy funkcji)
Jeśli funkcja $g\colon G\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i wektor $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ jest styczny w punkcie $\mathbf{p}$ do do zbioru $M:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k:\quad g(\mathbf{x})=g(\mathbf{p})\}$, zwanego poziomicą funkcji g zawierającą punkt $\mathbf{p}$, to $Dg(\mathbf{p})\mathbf{v}=0$, czyli grad $g(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}=0$.

Dowód. Załóżmy, że $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{p}}M$. Istnieją wtedy: liczba rzeczywista $s>0$ i ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów zbioru M różnych od $\mathbf{p}$, takie że $\mathbf{p}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{p}_n$ i $s\mathbf{v}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbf{p}_n-\mathbf{p}}{\|p_n-\mathbf{p}\|}$. Niech

$$g(\mathbf{p}+\mathbf{h})=g(\mathbf{p})+Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}+\|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})\,.$$

Mamy wtedy $g(\mathbf{p}_n)=g(\mathbf{p}+\mathbf{p}_n-\mathbf{p})=g(\mathbf{p})+Dg(\mathbf{p})(\mathbf{p}_n-\mathbf{p})+\|\mathbf{p}_n-\mathbf{p}\|r(\mathbf{p}_n-\mathbf{p})$ i wobec równości $g(\mathbf{p}_n)=g(\mathbf{p})$ możemy napisać: $0=Dg(\mathbf{p})(\mathbf{p}_n-\mathbf{p})+\|\mathbf{p}_n-\mathbf{p}\|r(\mathbf{p}_n-\mathbf{p})$. Po przejściu do granicy: $0=Dg(\mathbf{p})(s\mathbf{v})=sDg(\mathbf{p})\mathbf{v}$. Stąd teza wynika od razu. ■

Twierdzenie 2.29 (warunek dostateczny styczności do poziomicy)
Jeśli funkcja $g\colon G\to\mathbb{R}$ jest ciągła w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$ i różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$,

grad $g(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, $0 = Dg(\mathbf{p})\mathbf{v} = \text{grad } g(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$, to wektor $\mathbf{v}$ jest styczny w punkcie $\mathbf{p}$ do poziomicy funkcji g zawierającej punkt $\mathbf{p}$, tzn. do zbioru $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \quad g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{p})\}$.

Dowód. Niech $g(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| r(\mathbf{h})$. Z tego że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ wynika, że $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r(\mathbf{h}) = 0$. Z tego, że funkcja g jest ciągła wynika, że funkcja r też jest ciągła (ciągłość w punkcie $\mathbf{0}$ wynika z poprzedniego zdania). Niech $\mathbf{v}$ będzie jednostkowym wektorem prostopadłym do grad $g(\mathbf{p})$, czyli $0 = \text{grad } g(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = Dg(\mathbf{p})\mathbf{v}$ i $\|\mathbf{v}\| = 1$. Mamy wykazać, że $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$. Jeśli istnieje ciąg liczb dodatnich (t_n) taki, że $\mathbf{p} + t_n\mathbf{v} \in M$ dla wszystkich n naturalnych, to teza jest spełniona w oczywisty sposób.

Załóżmy więc, że takiego ciągu nie ma. Oznacza to, że w pobliżu punktu $\mathbf{p}$ nie ma innych punktów zbioru M leżących na prostej przechodzącej przez $\mathbf{p}$ równoległej do wektora $\mathbf{v}$. Pokażemy jednak, że „bardzo blisko" tej prostej takie punkty już są.[4] Z założenia wynika , że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < t < \delta$, to

$$g(\mathbf{p}) \neq g(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = g(\mathbf{p}) + Dg(\mathbf{p})(t\mathbf{v}) + \|t\mathbf{v}\| r(t\mathbf{v}) = g(\mathbf{p}) + \|t\mathbf{v}\| r(t\mathbf{v}).$$

Stąd wynika, że dla takich t mamy $r(t\mathbf{v}) \neq 0$. Niech $\varrho(t) = \sup\{|r(\mathbf{w})| : \quad \|\mathbf{w}\| \leq 2t\}$. Jest jasne, że $\varrho(t) \geq |r(t\mathbf{v})| > 0$ dla $t > 0$ oraz że $\lim\limits_{t\to 0^+} \varrho(t) = 0$. Istnieje więc taka liczba $\delta_1 \in (0, \delta)$, że dla $t \in (0, \delta_1)$ zachodzą nierówności:

$$\|t\mathbf{v} \pm t\sqrt{\varrho(t)} \,\text{grad } g(\mathbf{p})\| = \sqrt{t^2 + t^2\varrho(t)\|\text{grad } g(\mathbf{p})\|^2} \leq 2t < 1 \quad \text{i} \quad 0 < \varrho(t) < \tfrac{\|\text{grad } g(\mathbf{p})\|^4}{4}.$$

Wtedy $\Big|Dg(\mathbf{p})\Big(t\mathbf{v} \pm t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\Big)\Big| = \Big|\text{grad } g(\mathbf{p}) \cdot \Big(t\mathbf{v} \pm t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\Big)\Big| =$

$$= t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \big\|\text{grad } g(\mathbf{p})\big\|^2 > 2t\varrho(t) \geq$$

$$\geq \sqrt{t^2 + t^2\varrho(t) \cdot \big\|\text{grad } g(\mathbf{p})\big\|^2} \cdot \Big|r\big(t\mathbf{v} \pm t\varrho(t) \,\text{grad } g(\mathbf{p})\big)\Big| =$$

$$= \Big\|t\mathbf{v} \pm t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\Big\| \cdot \Big|r\big(t\mathbf{v} \pm t\varrho(t) \,\text{grad } g(\mathbf{p})\big)\Big|.$$

Stąd wynika, że suma liczb $Dg(\mathbf{p})\Big(t\mathbf{v} \pm t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\Big) = \pm t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \|\text{grad } g(\mathbf{p})\|^2$ i $\|t\mathbf{v} \pm t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\| \cdot r\Big(t\mathbf{v} \pm t\varrho(t) \,\text{grad } g(\mathbf{p})\Big)$ ma taki znak, jak pierwsza z nich, bo pierwsza ma większą wartość bezwzględną. Wobec tego dla $0 < t < \delta_1$ zachodzą nierówności:

$$g\Big(\mathbf{p} + t\mathbf{v} - t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\Big) < g(\mathbf{p}) < g\Big(\mathbf{p} + t\mathbf{v} + t\sqrt{\varrho(t)} \cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\Big).$$

Z ciągłości funkcji g wynika istnienie liczby $\tau(t) \in \big(-t\sqrt{\varrho(t)}, t\sqrt{\varrho(t)}\,\big)$, dla której zachodzi równość $g(\mathbf{p}) = g\big(\mathbf{p} + t\mathbf{v} + \tau(t) \,\text{grad } g(\mathbf{p})\big)$, zatem $\mathbf{p} + t\mathbf{v} + \tau(t) \,\text{grad } g(\mathbf{p}) \in M$. Ponieważ $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\tau(t)}{t} = 0$, więc $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t\mathbf{v} + \tau(t)\cdot \text{grad } g(\mathbf{p})}{\|t\mathbf{v} + \tau(t)\cdot \text{grad } g(\mathbf{p})\|} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{v}$. Wektor $\mathbf{v}$ jest więc styczny do zbioru M w punkcie $\mathbf{p}$, a wobec tego każdy otrzymany przez pomnożenie $\mathbf{v}$ przez liczbę nieujemną też jest styczny do M w punkcie $\mathbf{p}$. ■

Zadanie 2.1 Wykazać, że założenie ciągłości funkcji g w otoczeniu punktu $\mathbf{p}$, a nie tylko w tym punkcie, jest istotne dla prawdziwości udowodnionego twierdzenia. ■

[4] Znacznie bliżej prostej niż punktu $\mathbf{p}$, rozumowanie jest możliwe, bo człon $\|\mathbf{h}\| r(\mathbf{h})$ jest mały w porównaniu z $Dg(\mathbf{p})\mathbf{h}$. Z tej prostej zejdziemy w kierunku wektora grad $g(\mathbf{p})$ (prostopadłego do wektora $\mathbf{v}$) lub w dokładnie przeciwnym.

Przykład 2.30 Niech $g\binom{x}{y} = x^2+y^2-25$ i niech $A = \{\mathbf{x}\colon \quad g(\mathbf{x}) = 0\}$. Niech $\mathbf{q} = \binom{3}{4}$, więc $\mathbf{q} \in A$. Musi być spełniony warunek konieczny styczności do poziomicy, więc wektory styczne do A w punkcie $\mathbf{q}$ muszą być prostopadłe do wektora grad $g(\mathbf{q}) = 2\binom{3}{4}$, więc również do wektora $\binom{3}{4}$.a ponieważ funkcja g jest ciągła, więc każdy wektor $\mathbf{v}$ prostopadły do wektora $\binom{3}{4}$ jest styczny do M. Jest to zgodne z twierdzeniem znanym ze szkoły podstawowej (a może z gimnazjum), wg. którego prosta styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, w rozpatrywanym przypadku do wektora zaczynającego się w punkcie $\mathbf{0} = \binom{0}{0}$ i kończącego się w punkcie $\mathbf{q} = \binom{3}{4}$. Napiszmy teraz równanie tej stycznej. Punkt $\mathbf{x}$ leży na stycznej wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ jest prostopadły do wektora $\mathbf{q}$, tzn. gdy $(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} = 0$. Przyjmując $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$ otrzymujemy równanie $(x-3)\cdot 3 + (y-4)\cdot 4 = 0$, czyli $3x + 4y = 3^2 + 4^2 = 25$. ■

Przykład 2.31 Rozważmy teraz wykres $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ funkcji różniczkowalnej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i niech $\mathbf{p} = \binom{a}{f(a)}$ będzie punktem wykresu odpowiadającym liczbie a. Zdefiniujmy funkcję $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ za pomocą wzoru $g\binom{x}{y} = f(x) - y$. Oczywiście zbiór Γ zdefiniowany jest równaniem $g\binom{x}{y} = 0$. Funkcja g jest różniczkowalna, więc również ciągła. Znajdziemy przestrzeń styczną do Γ w punkcie $\mathbf{p}$. Mamy grad $g(\mathbf{p}) = \binom{f'(a)}{-1} \neq \mathbf{0}$. Wobec tego zbiór wektorów stycznych do Γ pokrywa się ze zbiorem wektorów prostopadłych do gradientu g, czyli równoległych do wektora $\binom{1}{f'(a)}$. Dowolny wektor styczny do wykresu Γ jest więc postaci $\tau\binom{1}{f'(a)}$, gdzie τ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Napiszmy równanie stycznej w punkcie $\mathbf{p}$ do wykresu Γ funkcji f. Punkt $\mathbf{x}$ leży na tej stycznej wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = (\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot \text{grad}\, g(\mathbf{p}) = (x-a)\cdot f'(a) + (y - f(a))\cdot(-1)$. Można to równanie przepisać w postaci $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, jest więc to równanie, z którym mieliśmy już do czynienia w przypadku funkcji jednej zmiennej. Widać więc, że nowa definicja wektora stycznego rozszerza zakres poprzednio stosowanej. ■

Przykład 2.32 Niech $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ będzie przekształceniem liniowym. Zachodzi wtedy $L(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = L\mathbf{p}+L\mathbf{h}$, zatem różniczką przekształcenia liniowego jest ono samo i to niezależnie od tego w jakim punkcie różniczki poszukujemy: $DL(\mathbf{p})\mathbf{h} = L\mathbf{h}$. Wynika to z definicji różniczki: $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{L(\mathbf{p}+\mathbf{h})-L\mathbf{p}-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$, bo licznik tego ułamka jest tożsamościowo równy $\mathbf{0}$. Podobnie jest w przypadku przekształcenia afinicznego, tj. przekształcenia F postaci $F(\mathbf{x}) = L\mathbf{x} + \mathbf{v}$, gdzie L oznacza ustalone przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^l$, a $\mathbf{v}$ – ustalony wektor l–wymiarowy. W tym przypadku $DF(\mathbf{p})\mathbf{h} = L\mathbf{h}$[5] dla każdego punktu $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ i każdego wektora $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^k$. Wynika to natychmiast z równości $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{F(\mathbf{p}+\mathbf{h})-F(\mathbf{p})-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{L(\mathbf{p}+\mathbf{h})+\mathbf{v}-(L\mathbf{p}+\mathbf{v})-L\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$, bo licznik ułamka jest równy $\mathbf{0}$ dla każdego $\mathbf{h}$. ■

Przykład 2.33 Niech $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - r^2$, $r > 0$. Niech $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad g(\mathbf{x}) = 0\}$. Zbiór S jest więc $k-1$–wymiarową sferą o promieniu r i środku w początku układu

[5] Często piszemy $Df(\mathbf{p}) = L$ pomijając argument $\mathbf{h}$. Przekształcenie liniowe to szczególny przypadek wieloliniowego, więc to powtórzenie fragmentu twierdzenia o różniczkowaniu przekształceń wieloliniowych.

współrzędnych. Niech $\mathbf{p}\in S$. Znajdziemy przestrzeń styczną do sfery S w punkcie $\mathbf{p}$. Wektory styczne muszą być prostopadłe do gradientu funkcji g.

Zróżniczkujemy funkcję g. Mamy
$g(\mathbf{x}+\mathbf{h})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}+\mathbf{h}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}-r^2=g(\mathbf{x})+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}+\|\mathbf{h}\|^2$. Zachodzi oczywista równość $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\dfrac{\|\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{h}\|}=0$.
Z tej równości i z definicji różniczki przekształcenia wynika, że $Dg(\mathbf{x})\mathbf{h}=2\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}$. Oznacza to, że $\operatorname{grad} g(\mathbf{x})=2\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, bo punkt $\mathbf{0}$ nie leży na sferze S. Wobec tego i wobec ciągłości funkcji g zbiór wektorów stycznych do S w punkcie $\mathbf{p}\in S$ to po prostu zbiór wektorów prostopadłych do $\mathbf{p}$. Możemy teraz napisać równanie „płaszczyzny” stycznej do tej sfery w punkcie $\mathbf{p}$. Punkt $\mathbf{x}$ leży na tej „płaszczyźnie” stycznej wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathbf{x}-\mathbf{p}$ jest styczny do sfery, tzn. $(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{p}=0$. To równanie można przepisać w postaci $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}$. Widać, że w zapisie wektorowym przypadek sfery jednowymiarowej, czyli okręgu na płaszczyźnie (przykład **6**), nie różni się niczym od płaszczyzny stycznej do sfery dwuwymiarowej umieszczonej w przestrzeni trójwymiarowej lub ogólnie sfery $(k-1)$–wymiarowej umieszczonej w przestrzeni k–wymiarowej. ■

Przykład 2.34 Niech $g\binom{x}{y}=xy$ i niech $M=\{\mathbf{x}\colon\quad g(\mathbf{x})=0\}$. Jasne jest, że w tym przypadku zbiór M składa się z dwu prostych: $x=0$ oraz $y=0$. Wobec tego przestrzeń styczna do zbioru M w punkcie $\mathbf{0}$ zawiera te dwie proste – wektor styczny do jednej z nich w punkcie $\mathbf{0}$ jest oczywiście styczny do zbioru M w tym punkcie. Wykażemy, że to już są wszystkie wektory styczne do zbioru M w tym punkcie. Tym razem stwierdzenie, że muszą być one prostopadłe do gradientu nic nie wnosi, bo gradientem jest wektor zerowy. Samo stwierdzenie jest oczywiste, bo ciąg zbieżny do punktu $\mathbf{0}$ musi zawierać podciąg złożony z punktów leżących na jednej z osi. Stąd wynika od razu, że wektor styczny do M musi być styczny do jednej z osi układu współrzędnych. ■

Przykład 2.35 Niech $g\binom{x}{y}=(x^2+y^2)^2-x^2+y^2$, $M=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\colon\quad g(\mathbf{x})=0\}$. Jasne jest, że $\mathbf{0}\in A$. Znajdziemy wszystkie wektory styczne do zbioru A w punkcie $\mathbf{0}$. Bez trudu stwierdzamy, że $\operatorname{grad} g\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}4x(x^2+y^2)-2x\\ 4y(x^2+y^2)+2y\end{pmatrix}$, zatem $\operatorname{grad} g\binom{0}{0}=\binom{0}{0}$.
Podobnie jak w przykładach poprzednich wektory styczne do zbioru M w punkcie $\mathbf{0}$ muszą być prostopadłe do wektora $\operatorname{grad} g(\mathbf{0})$, tylko że w tym przypadku nic z tego nie wynika, bo *każdy* wektor jest prostopadły zerowego. Równanie $g(\mathbf{x})=0$ to po prostu $y^4+(2x^2+1)y^2-x^2+x^4=0$. Potraktowawszy x jako parametr możemy je rozwiązać względem niewiadomej y^2:
$y^2=\frac12\left(-2x^2-1\pm\sqrt{(2x^2+1)^2+4x^2-4x^4}\right)=\frac12\left(-2x^2-1\pm\sqrt{1+8x^2}\right)$. Ponieważ $y^2\geq0$, więc mamy $y^2=\frac12\left(-2x^2-1+\sqrt{1+8x^2}\right)$. Wobec tego

$$y^2=\frac{1+8x^2-(1+2x^2)^2}{2\left(1+2x^2+\sqrt{1+8x^2}\right)}=\frac{2(x^2-x^4)}{1+2x^2+\sqrt{1+8x^2}},$$

zatem dla $|x|\leq1$ zachodzi jedna z dwu równości:

$$y_-=-\frac{x\sqrt{2(1-x^2)}}{\sqrt{1+2x^2+\sqrt{1+8x^2}}},\quad y_+=\frac{x\sqrt{2(1-x^2)}}{\sqrt{1+2x^2+\sqrt{1+8x^2}}}.$$

Bez trudu[6] stwierdzamy, że $y'_-(0) = -1$ i $y'_+(0) = 1$. Wynika stąd, ze wektorami stycznymi do zbioru A są wektory $\binom{1}{-1}$, $\binom{1}{1}$ oraz wszystkie wektory, które można otrzymać przez pomnożenie jednego z tych dwóch przez liczbę rzeczywistą. Wykażemy, że innych wektorów stycznych w tym punkcie do zbioru A nie ma. Wynika to od razu z tego, że ciąg zbieżny do punktu $\mathbf{0}$ musi zawierać podciąg złożony z punktów leżących na wykresie funkcji y_- lub z punktów leżących na wykresie funkcji y_+, więc wektor styczny wyznaczony przez ten ciąg będzie jednym z poprzednio znalezionych. ■

Przykład 2.36 Niech $g\binom{x}{y} = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$ i niech $M = \{\mathbf{x}: \quad g(\mathbf{x}) = 0\}$. Jasne jest, że $g(\mathbf{0}) = 0$. Znajdziemy przestrzeń styczną do zbioru M w punkcie $\mathbf{0}$. Mamy $\operatorname{grad} g\binom{x}{y} = \binom{4x^3-2x}{4y^3-2y}$, więc $\operatorname{grad} g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie z tego, że wektory styczne do M są prostopadłe do wektora $\operatorname{grad} g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, nic ciekawego nie wynika, więc postąpimy tak, jak w przykładzie 11. Potraktujemy y jako niewiadomą, x – jako parametr. Przy założeniu, że liczba $|x|$ jest dostatecznie mała[7] otrzymujemy wzór: $y^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4x^2-4x^4}\right)$, dla „dużych ” $|x|$ pod pierwiastkiem pojawia się liczba ujemna, więc równanie nie ma rozwiązań. Ponieważ $y^2 \geq 0$, więc w przypadku $x^2 < 1$ otrzymujemy równość $y^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4x^2-4x^4}\right)$. Punkty znalezione w ten sposób w przypadku $x \approx 0$ znajdą się w pobliżu punktu $\binom{0}{1}$ lub punktu $\binom{0}{-1}$. Wobec tego w pobliżu punktu $\binom{0}{0}$ nie ma innych punktów zbioru A. W takiej sytuacji mówimy, że punkt jest to *punkt izolowany* zbioru A. Nie ma więc ciągów zbieżnych do punktu $\mathbf{0}$ złożonych z elementów zbioru M. Wobec tego jedynym wektorem stycznym do zbioru A w punkcie $\mathbf{0}$ jest wektor zerowy. ■

Przykład 2.37 Niech $f(x) = \sqrt{|x|}$ i niech Γ będzie wykresem funkcji f. Znajdziemy wektory styczne do Γ w punkcie $\mathbf{0}$. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \binom{x_n}{f(x_n)} = \mathbf{0}$. Mamy więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{|x_n|}$. Założyć też należy, że $\mathbf{p}_n \neq \mathbf{0}$, a to oznacza, że $x_n \neq 0$. Ponieważ $\|\mathbf{p}_n\| = \sqrt{x_n^2 + |x_n|}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|\mathbf{p}_n\|} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|x_n|}}{\|\mathbf{p}_n\|} = 1$. Wynika stąd, że jedynym jednostkowym wektorem stycznym do Γ jest wektor $\binom{0}{1}$. Wszystkie inne otrzymujemy mnożąc ten wektor przez liczby nieujemne. ■

Przykład 2.38 Niech $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ponieważ równanie $y = \sqrt[3]{x}$ można przepisać w postaci równoważnej $y^3 = x$, więc wykres funkcji, która przypisuje liczbie x liczbę $\sqrt[3]{x}$ to to samo co wykres funkcji, która liczbie y przypisuje liczbę y^3 – po prostu w drugim przypadku osią argumentów jest oś pionowa, a osią wartości — pozioma, dokładnie przeciwnie niż w przypadku pierwszym. Styczna do wykresu funkcji jednej zmiennej była poszukiwana w przykładzie siódmym. Stosując tamten wynik możemy stwierdzić, że przestrzeń styczna do wykresu funkcji f w punkcie $\mathbf{0}$ to prosta równoległa do wektora $\binom{3\cdot 0^2}{1} = \binom{0}{1}$, czyli prosta pionowa. ■

Komentarz na temat definicji wektora stycznego

W wielu książkach autorzy stosują nieco inną definicję wektora stycznego. Rozpatrują

[6] Korzystamy z definicji pochodnej, bo liczymy pochodną tylko w jednym punkcie i to w punkcie $\mathbf{0}$.
[7] tu oznacza to, że $x^2 \leq 2 + \sqrt{5}$

mianowicie funkcje $\gamma\colon [t_0, t_0+\delta) \longrightarrow A$ mające prawostronną pochodną w punkcie t_0. Inni z kolei zakładają, że funkcja γ ma być określona na przedziale otwartym $(-\delta,\delta)$. W tym ostatnim przypadku jedynym wektorem stycznym w punkcie $\mathbf{0}$ do wykresu funkcji $\sqrt{|x|}$ jest wektor zerowy. Nasza definicja jest więc inna, ogólniejsza. Podaliśmy ją, bo choć nie jest przesadnie popularna, to jest najbardziej zbliżona do intuicji związanych z pojęciem styczności, bywa prostsza w użyciu. W przypadku zbiorów bardziej skomplikowanych, np. zbioru Cantora czy iloczynu kartezjańskiego zbioru Cantora przez odcinek, jest chyba najwygodniejsza. Dobrze też działa w najważniejszym przypadku, tzw. rozmaitości różniczkowych, w tym rozmaitości z brzegiem, o których porozmawiamy wiosną. ■

Przykłady: różniczkowanie, poszukiwanie ekstremów

Przykład 2.39 Znajdziemy najmniejszą i największą wartość wyrażenia xy^2z^3 założywszy, że $x,y,z\ge 0$ i $x+y+z=6$.

Niech $C=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right):\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z=6\right\}$ i $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=xy^2z^3$. Funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}^3$, więc też na zbiorze C. Zbiór C jest ograniczony, bo jeśli punkt $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ znajduje się zbiorze C, to $0\le x\le 6$, $0\le y\le 6$, $0\le z\le 6$. Jest też domknięty, więc zwarty, więc funkcja ciągła określona na tym zbiorze przyjmuje w jakimś jego punkcie wartość najmniejszą i w jakimś punkcie wartość największą. C oczywiście nie zawiera żadnej kuli, więc nie można tu stosować twierdzenia o zerowaniu się gradientu w punktach lokalnego ekstremum.

Można natomiast wyznaczyć jedną z trzech zmiennych za pomocą dwu pozostałych, np. $x=6-y-z$ i rozważyć funkcję dwu zmiennych: $g\binom{y}{z}=(6-y-z)y^2z^3$ na zbiorze $D=\left\{\binom{y}{z}:\quad 0\le y,\ 0\le z,\ y+z\le 6\right\}$. Zbiór D, podobnie jak C, jest zwarty. Funkcja g jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny, więc również w punktach zbioru D i wobec tego przyjmuje w jakimś punkcie tego zbioru wartość najmniejszą i w jakimś punkcie — wartość największą. Łatwo zauważyć, że zbiór D jest trójkątem prostokątnym równoramiennym którego wierzchołkami są punkty $\binom{0}{0}$, $\binom{6}{0}$ i $\binom{0}{6}$.

Na brzegu tego trójkąta, czyli w punktach prostej $y=0$, w punktach prostej $z=0$ oraz w punktach prostej $y+z=6$ funkcja g przyjmuje wartość 0.

Wewnątrz trójkąta przyjmuje wartości dodatnie. Wobec tego jej najmniejszą wartością jest liczba 0, a wartość największa jest przyjęta w pewnym punkcie wewnętrznym. W tym punkcie wewnętrznym gradient funkcji g jest równy $\mathbf{0}$. Zachodzi równość $\operatorname{grad} g\binom{y}{z}=\begin{pmatrix}-y^2z^3+2yz^3(6-y-z)\\-y^2z^3+3y^2z^2(6-y-z)\end{pmatrix}$. Obie współrzędne mają być równe 0, a ponieważ szukamy punktów wewnątrz trójkąta D, więc musi być $y>0$ i $z>0$, zatem muszą być spełnione równości $-y+2(6-y-z)=0$ i $-z+3(6-y-z)=0$, czyli $3y+2z=12$ i $3y+4z=18$. Wobec tego musi być $z=3$ i $y=2$. Ponieważ wartość największa jest przyjmowana w pewnym punkcie i jedynym kandydatem jest punkt $\binom{2}{3}$, więc największą wartością funkcji g na zbiorze D jest liczba $g\binom{2}{3}=(6-2-3)2^23^3=108$. ■

Przykład 2.40 Niech $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^2+2y^2+3z^2-4x+8y-12z$. Jasne jest, że funkcja nie jest ograniczona z góry: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +\infty$. Nie jest jasne czemu równy jest kres dolny funkcji i czy jest on jej wartością. Jeśli kres jest wartością funkcji określonej na całej przestrzeni, to gradient tej funkcji w punkcie, w którym jest on przyjmowany jest wektorem zerowym. Mamy $\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 4y+8 \\ 6z-12 \end{pmatrix}$. Jasne jest, że ten wektor równy jest $\mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$, $y = -2$ i $z = 2$. Mamy $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -24$. Jeśli więc kres dolny jest wartością funkcji, to musi być równy -24. Wykażemy, że tak jest w rzeczywistości. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 24 = (x-2)^2 + 2(y+2)^2 + 3(z-2)^2 \geq 0$, co kończy dowód. W istocie rzeczy do znalezienia kresów rachunek różniczkowy w tym zadaniu nie był potrzebny, w rzeczywistości funkcja f w ostatnim kroku została potraktowana jako suma 3 wielomianów kwadratowych, każdy innej zmiennej, które zostały sprowadzone do postaci kanonicznych! Rachunek różniczkowy pomaga tu jedynie ustalić, jaki punkt jest podejrzany o to, że w nim kres jest osiągany, ale oczywiście te hipotezę można sformułować nie licząc żadnych pochodnych. ■

Przykład 2.41 Niech $f\binom{x}{y} = 2x^2 - 4xy + 10y^2 - 20x + 68y$. Podobnie jak w przykładzie poprzednim widać, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \binom{x}{0} = +\infty$, zatem funkcja nie jest ograniczona z góry, czyli jej kresem górnym jest $+\infty$. Jeśli kres dolny tej funkcji jest jej wartością, to w punkcie, w którym jest przyjmowany, gradient funkcji f jest wektorem zerowym. Mamy $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{4x-\ 4y-20}{-4x+20y+68}$. Ma więc być $4x - 4y - 20 = 0 = -4x + 20y + 68$. Rozwiązując ten układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi otrzymujemy $x = 2$, $y = -3$. Jedynym kandydatem na punkt, w którym mógłby być osiągnięty kres dolny tej funkcji, jest więc punkt $\binom{2}{-3}$. Niech $u = x - 2$, $v = y + 3$. Mamy więc

$$f\tbinom{x}{y} = f\tbinom{u+2}{v-3} = 2(u+2)^2 - 4(u+2)(v-3) + 10(v-3)^2 - 20(u+2) + 68(v-3) =$$
$$= 2u^2 - 4uv + 10v^2 - 122 = 2(u-v)^2 + 8v^2 - 122$$

– ostatnie przekształcenie to po prostu sprowadzenie wielomianu kwadratowego zmiennej u, którego współczynniki zależą od parametru v, do postaci kanonicznej. Jasne jest, że najmniejszą wartością otrzymanego wyrażenia jest liczba -122 i że wartość ta jest przyjmowana jedynie wtedy, gdy $u = v$ i $v = 0$, tzn. $u = 0 = v$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie można było nie liczyć pochodnych, lecz potraktować od razu funkcję jako wielomian zmiennej u z parametrem v, sprowadzić go do postaci kanonicznej i rzecz całą zakończyć. ■

Przykład 2.42 Niech $f\binom{x}{y} = 2x^2 - 4xy + y^2 - 20x + 14y$. Z oczywistej równości $\lim\limits_{x\to+\infty} \binom{x}{0} = +\infty$ wynika, że $\sup f = +\infty$. Postępując tak jak w poprzednim przykładzie znajdujemy $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{4x-4y-20}{-4x+2y+14}$. Ten wektor równy jest $\binom{0}{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$ i $y = -3$. Podstawmy $x = u + 2$, $y = v - 3$. Wtedy
$f\binom{x}{y} = 2(u+2)^2 - 4(u+2)(v-3) + (v-3)^2 - 20(u+2) + 14(v-3) = 2u^2 - 4uv + v^2 - 41 =$
$= 2(u-v)^2 - v^2 - 41$. W odróżnieniu od przykładów poprzednich wyrażenie $2(u-v)^2 - v^2$ bywa ujemne, więc liczba -41 nie jest kresem dolnym funkcji f. Co więcej, mamy $f\binom{v}{v} = -v^2 - 41 \xrightarrow[v\to\infty]{} -\infty$, zatem kresem dolnym funkcji f jest $-\infty$, co oznacza, że funkcja f nie jest ograniczona również z dołu. Oczywiście również w tym przykła-

dzie użycie pochodnych nie jest konieczne, można od razu potraktować funkcję jako wielomian zmiennej x zależny od parametru y. ■

Przykład 2.43 Teraz uogólnimy rezultaty trzech ostatnich przykładów. Mielismy w każdym z nich do czynienia z konkretnym wielomianem drugiego stopnia dwu zmiennych, czyli z funkcją f, którą można zdefiniować wzorem

$$f\binom{x}{y} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

przy założeniu, że co najmniej jedna z liczb A, B, C jest różna od 0; dwójki we współczynnikach pojawiają się ze względu na wygodę oraz tradycję. Wyrażenia x^2, xy, y^2 nazywamy jednomianami drugiego stopnia zmiennych x i y (dla ustalenia stopnia iloczynu dodajemy stopnie czynników, nawet jeśli jeden jest zmiennej x a drugi — zmiennej y). Rozważymy kolejno trzy przypadki: $AC - B^2 > 0$, $AC - B^2 = 0$ i $AC - B^2 < 0$. Pierwszy z nich nazywany jest eliptycznym, drugi – parabolicznym, a trzeci – hiperbolicznym. Mamy $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = 2\binom{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}$. W przypadku eliptycznym i w przypadku hiperbolicznym istnieje dokładnie jeden punkt, w którym $\operatorname{grad} f$ jest wektorem zerowym, w przypadku parabolicznym takiego punktu może nie być albo jest ich nieskończenie wiele. Jeśli $\operatorname{grad} f\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{0}$, to po zastosowaniu podstawienia $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ otrzymujemy wielomian kwadratowy zmiennych u, v, w którym część kwadratowa ma te same współczynniki A, B, C, natomiast część liniowa znika, o wyrazie wolnym nic powiedzieć nie można. Po dokonaniu tego podstawienia otrzymujemy funkcję zmiennych u i v, której gradient jest wektorem zerowym w punkcie $\mathbf{0} = \binom{0}{0}$, a więc funkcję postaci $Au^2 + 2Buv + Cv^2 + \widetilde{F}$.

Przypadek eliptyczny.

Ponieważ $AC - B^2 > 0$, więc $AC > 0$, zatem $A \neq 0 \neq C$. Możemy wobec tego napisać:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + \widetilde{F} = A\left(u + \tfrac{B}{A}v\right)^2 - \tfrac{B^2}{A}v^2 + Cv^2 + \widetilde{F} = $$
$$= A\left(\left(u + \tfrac{B}{A}v\right)^2 + \tfrac{AC-B^2}{A^2}v^2\right) + \widetilde{F}.$$[8]

Jeśli $A > 0$, to funkcja f przyjmuje w punkcie $\mathbf{0}$ wartość $\widetilde{F}$, a w pozostałych punktach wartości większe niż $\widetilde{F}$ – wynika to stąd, że kwadrat liczby rzeczywistej $\neq 0$ jest dodatni, zaś $0^2 = 0$. Najmniejszą wartością funkcji f w tym przypadku jest liczba $\widetilde{F}$, jest ona przyjmowana w jednym tylko punkcie (zerowania się gradientu), funkcja jest oczywiście nieograniczona z góry. Przypadek $A < 0$ jest w pełni analogiczny, nierówności zmieniają kierunki, więc w tym przypadku funkcja ma wartość największą, a z dołu nie jest ograniczona.

Przypadek hiperboliczny.

Teraz może zdarzyć się, że $A = 0 = C$. Jeśli tak jest, to wprowadzamy nowe zmienne $\widetilde{x} = x + y$ oraz $\widetilde{y} = x - y$, czyli $x = \frac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{2}$ oraz $y = \frac{\widetilde{x}-\widetilde{y}}{2}$. Po podstawieniu część kwadratowa wygląda tak: $\frac{B}{2}\widetilde{x}^2 - \frac{B}{2}\widetilde{y}^2$. Przyjmując $\widetilde{A} = \frac{B}{2}$, $\widetilde{B} = 0$ oraz $\widetilde{C} = \frac{B}{2}$ otrzymujemy znów wielomian kwadratowy, dla którego $\widetilde{A}\widetilde{C} - \widetilde{B}^2 < 0$, przy czym $\widetilde{A} \neq 0$. Możemy więc od razu założyć, że $A \neq 0$, co uchroni nas przed zmianą oznaczeń nie zmniejszając przy tym ogólności rozważań. Przyjmujemy więc dalej, że $A > 0$. Przekształcając tak jak w przypadku eliptycznym otrzymujemy

[8] Wyróżnik wielomianu $Au^2+2Buv+Cv^2$ zmiennej u równy jest $4v^2\left(B^2 - AC\right)$, więc gdy $v \neq 0$, to wielomian ten nie ma pierwiastków!

$\widetilde{f}\binom{u}{v} = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + \widetilde{F} = A\left(u + \frac{B}{A}v\right)^2 - \frac{B^2}{A}v^2 + Cv^2 + \widetilde{F} =$
$= A\left(\left(u + \frac{B}{A}v\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A^2}v^2\right) + \widetilde{F}.$

Widać, że $\lim\limits_{u\to\infty} f\binom{u}{0} = +\infty$, zatem funkcja $\widetilde{f}$ nie jest ograniczona z góry. Mamy też $\lim\limits_{v\to\infty} f\binom{-vB/A}{v} = -\infty$, więc również z dołu ta funkcja nie jest ograniczona. Kresem dolnym tej funkcji jest więc $-\infty$, a górnym $+\infty$. Wykres tej funkcji jest dwuwymiarową powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej przypominającą wyglądem przełęcz w górach, co miłośnikom jazdy konnej kojarzyć może się z siodłem. Omówmy to nieco dokładniej. Jeśli $v = 0$, to rozważamy funkcję $Au^2 + \widetilde{F}$, której wykresem jest parabola skierowana ramionami ku górze. Jeśli ograniczymy naszą uwagę do prostej o równaniu $u + \frac{B}{A}v = 0$, to otrzymamy funkcję $\frac{AC-B^2}{A}v^2 + \widetilde{F}$, której wykresem jest parabola skierowana ramionami ku dołowi. Ta druga ma punkt wspólny z pierwszą, po prostu jest podwieszona na pierwszej, ale znajduje się w innej płaszczyźnie pionowej[9], mianowicie zawierającej prostą $u + \frac{B}{A}v = 0$. Zmiana wielkości $u + \frac{B}{A}v$ powoduje przesunięcie zwisającej paraboli do góry wzdłuż paraboli Au^2. Wykres naszej funkcji składa się więc z parabol zwisających z paraboli $Au^2 + \widetilde{F}$ w dół, równoległych do prostej $u + \frac{B}{A}v = 0$, umieszczonych w płaszczyznach pionowych.

Jasne jest, że w tym przypadku funkcja nie ma w punkcie zerowania się swego gradientu ani lokalnego maksimum ani lokalnego minimum: wędrując z punktu $\mathbf{0}$ w kierunku prostej $v = 0$ zwiększamy wartość funkcji, zaś wędrując w kierunku prostej $u + \frac{B}{A}v = 0$ zmniejszamy wartość funkcji.

Przypadek paraboliczny

Podobnie jak w przypadku eliptycznym co najmniej jedna z liczba A, C musi być różna od 0, bo gdyby obie były zerami, to z równości $AC - B^2 = 0$ wynikałoby, że również $B = 0$, co nie jest możliwe w świetle naszego założenia. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A \neq 0$, a nawet $A > 0$. Przypadek $A < 0$ pozostawiamy czytelnikowi. Mamy więc

$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F =$
$= A\left(u + \frac{B}{A}v + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)v^2 + 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)v + F - \frac{D^2}{A} =$
$= A\left(u + \frac{B}{A}v + \frac{D}{A}\right)^2 + 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)v + F - \frac{D^2}{A}.$

Są dwa przypadki $E - \frac{BD}{A} = 0$ i $E - \frac{BD}{A} \neq 0$. W pierwszym funkcja przyjmuje najmniejszą wartość $F - \frac{D^2}{A}$ w każdym punkcie prostej $Au + By + D = 0$ i oczywiście jest nieograniczona z góry. W drugim przypadku funkcja jest nieograniczona z góry: $\lim\limits_{u\to\infty} f\binom{u}{0} = +\infty$. Jest też nieograniczona z dołu, bo jedna z granic $\lim\limits_{v\to\infty} f\binom{-(Bv+D)/A}{v}$, $\lim\limits_{v\to-\infty} f\binom{-(Bv+D)/A}{v}$ równa jest $-\infty$, a drugą jest $+\infty$. W tych przypadkach wykres funkcji można wyobrazić sobie jako dolinę: w przypadku $E - \frac{BD}{A} = 0$ dno doliny jest poziome, a w przypadku $E - \frac{BD}{A} \neq 0$ — nie. ■

Komentarz

W przypadku funkcji jednej zmiennej podaliśmy kryterium pozwalające na stwierdzenie, czy funkcja ma w punkcie zerowania się pochodnej lokalne ekstremu czy też nie.

[9] Jeśli $B = 0$, to te pionowe płaszczyzny są prostopadłe, pierwsza ma równanie $v = 0$, a druga – $u = 0$

Podobne twierdzenia można formułować dla funkcji dwu i większej liczby zmiennych. Szczególnie ważny jest przypadek najprostszy, gdy problem można wyjaśnić badając pochodne drugiego rzędu. Zajmiemy się tym nieco później. Wypada jednak stwierdzić, że twierdzenia omówione w ostatnim przykładzie stanowią podstawę do sformułowania odpowiednich tez w przypadku funkcji dwu zmiennych.

Warto też stwierdzić, że czytelnicy zaznajomieni z twierdzeniem Sylvestera o formach kwadratowych dodatnio określonych mogą zauważyć, że ostatni przykład zawiera dowód tego twierdzenia w przypadku funkcji dwu zmiennych. Udowodnimy zresztą to twierdzenie za chwilę, by przekonać czytelnika, że nic tajemniczego w nim nie ma, choć oczywiście jego dowód nie jest konieczny do zdania egzaminu z analizy przez studenta ekonomii. ■

Twierdzenie 2.44 (Sylvestera o formach kwadratowych dodatnio określonych)
Niech f będzie formą kwadratową określoną przez macierz symetryczną $A = (a_{i,j})$ wymiaru k, tzn. dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ zachodzi równość $a_{i,j} = a_{j,i}$, zatem

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j} x_i x_j,$$

kropka oznacza tu iloczyn skalarny. Niech $M_l = \det(a_{i,j})_{i,j \le l}$. Wtedy $f(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M_l > 0$ dla $l = 1, 2, \ldots, k$. Mówimy wtedy, że forma f jest dodatnio określona.

Dowód. (J.Musielak)[10]
Zastosujemy indukcję względem k. Dla $k = 1$ mamy $f(x) = a_{1,1}x^2$, zatem forma jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{1,1} > 0$. Dla $k = 2$ mamy

$$f(\mathbf{x}) = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,1}x_2x_1 + a_{2,2}x_2^2 = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2.$$

Oczywiście musi być $a_{1,1} = f(\mathbf{e}_1) > 0$, czyli musi być $M_1 > 0$. Funkcję f możemy potraktować jako wielomian kwadratowy zmiennej x_1 zależny od parametru x_2. Ma on przyjmować jedynie wartości dodatnie dla $x_2 \neq 0$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest, jak wiadomo z nauki w liceum, $0 < -\frac{\Delta}{4} = a_{1,1}a_{2,2}x_2^2 - a_{1,2}^2x_2^2$, czyli $M_2 > 0$. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla wszystkich form kwadratowych określonych na przestrzeni wymiaru mniejszego niż $k+1$. Wykażemy, że zachodzi również dla form określonych na przestrzeni wymiaru k. Mamy

$$f(\mathbf{x}) = a_{1,1}x_1^2 + 2x_1 \left(\sum_{j=2}^{k+1} a_{1,j}x_j \right) + \sum_{i,j=2}^{k+1} a_{i,j}x_ix_j.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $f(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ jest $a_{1,1} > 0$ oraz
$0 < -\frac{\Delta}{4} = a_{1,1} \left(\sum_{i,j=2}^{k+1} a_{i,j}x_ix_j \right) - \left(\sum_{j=2}^{k+1} a_{1,j}x_j \right)^2 =$
$$= \sum_{i,j=2}^{k+1} a_{1,1}a_{i,j}x_ix_j - \sum_{j=2}^{k+1} a_{1,i}a_{1,j}x_ix_j = \sum_{i,j=2}^{k+1} b_{i,j}x_ix_j,$$
gdzie $b_{i,j} = a_{1,1}a_{i,j} - a_{1,i}a_{1,j}$. Ostatnie wyrażenie jest formą kwadratową k zmiennych,

[10] Wg. książki Mostowskiego i Starka, Elementy Algebry Wyższej, Warszawa, PWN 1963, wyd 5. Podajemy ten właśnie dowód, bo jest on chyba najbardziej elementarny z tych, które autor widział, wymaga jedynie podstawowych wiadomości o wielomianach kwadratowych jednej zmiennej i wyznacznikach.

więc na mocy założenia indukcyjnego warunkiem koniecznym i dostatecznym jego dodatniej określoności jest $\begin{vmatrix} b_{2,2} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,k+1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & \ldots & b_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k+1,2} & b_{k+1,3} & \ldots & b_{k+1,k+1} \end{vmatrix} > 0$.

Dla $l \in \{2, \ldots, k+1\}$ mamy $0 < \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,l} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & \ldots & b_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l,2} & b_{l,3} & \ldots & b_{l,l} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 & a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3} & \ldots & a_{1,1}a_{2,l} - a_{1,2}a_{1,l} \\ a_{1,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{1,3} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}^2 & \ldots & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1}a_{l,2} - a_{1,2}a_{1,l} & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} & \ldots & a_{1,1}a_{l,l} - a_{1,l}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,l} \\ 0 & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 & a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,2}a_{1,3} & \ldots & a_{1,1}a_{2,l} - a_{1,2}a_{1,l} \\ 0 & a_{1,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{1,3} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}^2 & \ldots & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{1,1}a_{l,2} - a_{1,2}a_{1,l} & a_{1,1}a_{3,l} - a_{1,3}a_{1,l} & \ldots & a_{1,1}a_{l,l} - a_{1,l}^2 \end{vmatrix}.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że wyznacznik można obliczać rozwijając go względem pierwszej kolumny. Teraz pomnożymy pierwszy wiersz przez $a_{1,2}$ i dodamy do drugiego, potem pierwszy wiersz przez $a_{1,3}$ i dodamy do trzeciego, itd. Ponieważ te operacje nie zmieniają wartości wyznacznika, więc $0 < \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,l} \\ a_{1,2} & a_{1,1}a_{2,2} & a_{1,1}a_{2,3} & \ldots & a_{1,1}a_{2,l} \\ a_{1,3} & a_{1,1}a_{3,2} & a_{1,1}a_{3,3} & \ldots & a_{1,1}a_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,l} & a_{1,1}a_{l,2} & a_{1,1}a_{l,3} & \ldots & a_{1,1}a_{l,l} \end{vmatrix}$.

Pomnożymy teraz pierwszy wiersz przez liczbę $a_{1,1} > 0$, nie zmienia to znaku wyznacznika, bo mnożenie wiersza przez liczbę to to samo, co mnożenie wyznacznika przez tę liczbę. W otrzymanym wyznaczniku wszystkie wyrazy w kolumnach drugiej, trzeciej itd. zawierają czynnik $a_{1,1}$, więc z tych kolumn można go wyłączyć, co oznacza podzielenie wyznacznika przez liczbę $a_{1,1}^{l-1} > 0$. Znak pozostaje niezmieniony, a otrzymany wyznacznik to $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,l} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,l} \\ a_{1,3} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,l} & a_{l,2} & a_{l,3} & \ldots & a_{l,l} \end{vmatrix}$. Tym samym zakończyliśmy dowód. ■

Przykład 2.45 Niech $f\binom{x}{y} = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $t \neq 0$, to $f(t\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ dla dowolnego $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, własność ta nazywana jest jednorodnością stopnia 0 funkcji. Wynika stąd, że w celu znalezienia kresów funkcji f wystarczy rozpatrywać jej wartości w punktach dowolnie ustalonego okręgu o środku w punkcie $\mathbf{0}$, np. okręgu o promieniu 1. Okrąg ten jest oczywiście zbiorem domkniętym i ograniczonym, czyli zwartym. Wobec tego nasza funkcja przyjmuje w jakimś punkcie tego okręgu swą największą wartość i w jakimś innym punkcie tego okręgu swą wartość najmniejszą. Wobec tego, że funkcja ta jest jednorodna stopnia 0, ta najmniejsza wartość jest **najmniejszą wartością w całej dziedzinie funkcji** i przyjmowana jest nie tylko w jednym punkcie, ale we wszystkich punktach prostej przechodzącej przez ten punkt i $\mathbf{0}$, z wyjątkiem oczywiście punktu $\mathbf{0}$. Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$. Widać, że gradient jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = y^2$, czyli gdy $x = \pm y$. Podstawiając $x = y$ otrzymujemy $f\binom{x}{x} = \frac{1}{2}$ oraz $f\binom{x}{-x} = -\frac{1}{2}$. Wynika stąd, że największą wartością tej funkcji jest $\frac{1}{2}$ zaś najmniejszą $-\frac{1}{2}$. Szukanie kresów zostało zakończone.

Nadmienić wypada, że rozwiązane przed chwilą zadanie można rozwiązać nic o pochodnych nie wiedząc. Znajdziemy kres górny wartości funkcji. Mamy znaleźć najmniejszą liczbę k, taką że jeśli $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zachodzi nierówność $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq k$, tzn. $kx^2 - xy + ky^2 \geq 0$. Na podstawie twierdzenia Sylvestera lub elementarnej wiedzy o wielomianach kwadratowych stwierdzamy, że musi być $k \geq 0$ oraz $k^2 - \frac{1}{2^2} \geq 0$. Najmniejszą liczbą o tych własnościach jest $\frac{1}{2}$, więc ta liczba jest kresem górnym funkcji $\frac{xy}{x^2+y^2}$. Widać, że drugi sposób dostępny jest uczniom liceów.

Uwaga: okazało się, że wektor grad $f\binom{x}{y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\binom{-y}{x}$ *więc jest prostopadły do wektora* $\binom{x}{y}$*, wobec tego pochodna kierunkowa w kierunku wektora* $\binom{x}{y}$ *i każdego do niego równoległego równa jest 0, zatem funkcja* f *jest stała na półprostej wychodzącej z* $\mathbf{0}$ *i przechodzącej przez* $\binom{x}{y}$*, korzystaliśmy z tego w rozwiązaniu, a teraz pokazaliśmy inne, bardziej „uczone" uzasadnienie tego stwierdzenia.* ■

Przykład 2.46 Niech $f\binom{x}{y} = xy^2e^{-x-2y}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. w zbiorze $C = \left\{\binom{x}{y}: \quad x \geq 0, y \geq 0\right\}$. We wszystkich punktach brzegu zbioru funkcja przyjmuje wartość 0, wewnątrz wartości są dodatnie. Kresem dolnym jest więc liczba 0. Zajmiemy się kresem górnym. Mamy grad $f\binom{x}{y} = \binom{y^2(1-x)}{xy(2-2y)}e^{-x-2y}$. Jedynym punktem zerowania się gradientu funkcji f wewnątrz dziedziny jest punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wartość funkcji w tym punkcie równa jest e^{-3}. Z wzoru $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots$ wynika, że w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych zachodzi $e^{x+2y} \geq \frac{(x+2y)^4}{4!}$. Z niej wynika, że

$$f\binom{x}{y} = xy^2e^{-x-2y} = \frac{xy^2}{e^{x+2y}} \leq \frac{4!xy^2}{(x+2y)^4} \leq \frac{4!}{x+2y} < e^{-3} \text{ gdy } x + 2y > 4!e^3.$$

Wobec tego kres górny funkcji w pierwszej ćwiartce jest taki sam jak w zbiorze

$$\left\{\binom{x}{y}: \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y \leq 4!e^3\right\}.$$

Ten ostatni zbiór jest zwarty, więc f jako funkcja ciągłą przyjmuje w jakimś jego punkcie wartość największą, która jest oczywiście większa lub równa e^{-3}. Wobec tego, że na brzegu tego zbioru zachodzi co najmniej jedna z równości: $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 4!e^3$, wartość największa przyjmowana jest w punkcie wewnętrznym. Jedynym kandydatem jest punkt $\binom{1}{1}$, bo w innych gradient nie jest wektorem zerowym. Wobec tego kresem górnym tej funkcji jest e^{-3}, ten kres jest wartością funkcji f. Zadanie zostało rozwiązane.

Drugi sposób znalezienia kresu górnego.
Do momentu znalezienia gradientu rozumujemy tak, jak w poprzednim rozwiązaniu. Mamy więc $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = y^2(1-x)e^{-x-2y}$. Jeśli więc potraktujemy y jako stałą, to wraz ze wzrostem x funkcja f rośnie na przedziale $[0,1]$ i maleje na półprostej $[1,+\infty)$. Wobec tego jej największą wartością jest $f\binom{1}{y} = y^2e^{-1-2y}$. Teraz znajdujemy największą wartość funkcji y^2e^{-1-2y}, której pochodną jest $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{y} = 2y(1-y)e^{-1-2y}$, więc największą wartością tej funkcji jest jej wartość w punkcie $y=1$, czyli $f\left(\binom{1}{1}\right) = e^{-3}$.

To zadanie można od razu sprowadzić do poszukiwania wartości największych i najmniejszych funkcji jednej zmiennej, bo interesująca nas funkcja jest iloczynem dwu funkcji nieujemnych: funkcji xe^{-x} zmiennej x oraz funkcji y^2e^{-2y} zmiennej y, ta obserwacja oczywiście upraszcza rozwiązanie! ■

Przykład 2.47 Niech $f\binom{x}{y} = (x+3y)e^{-x^2-3y}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. w zbiorze $C = \left\{\binom{x}{y} : \quad x\geq 0, y \geq 0\right\}$. Zauważmy, że we wszystkich punktach zbioru C wartości funkcji są liczbami nieujemnymi przy czym tylko w punkcie $\binom{0}{0}$ wartością jest 0, w pozostałych punktach wartości są dodatnie. Wynika stąd od razu, że kresem dolnym funkcji jest liczba 0. Znajdziemy kres górny funkcji f. Najpierw znajdziemy gradient funkcji: grad $f\binom{x}{y} = \binom{1-2x(x+3y)}{1-x-3y}\cdot e^{-x^2-3y}$. Jest on równy $\mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac{1}{2}$ i jednocześnie $y=\frac{1}{6}$. Wartością funkcji w tym punkcie jest $e^{-3/4}$. Z wzoru $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots$ wynika, że jeśli $x,y\geq 0$, to $e^{x^2+3y} \geq \frac{(x^2+3y)^2}{2!}$. Wobec tego

$$f\binom{x}{y} = (x+3y)e^{-x^2-3y} \leq \frac{2!(x+3y)}{(x^2+3y)^2} = \frac{2x+6y}{x^4+6x^2y+9y^2} \leq \frac{\sqrt{2^2+6^2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+6x^2y+9y^2} = \frac{\sqrt{40}\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+6x^2y+9y^2}.$$

Mianownik jest sumą składników stopnia 2 lub większego, więc dla „dużych" argumentów powinien być większy od licznika. Załóżmy, że $x+y>10$, $x\geq 0$, $y\geq 0$. Wtedy

$$x^4+6x^2y+9y^2-(x^2+y^2) = x^4+(6y-1)x^2+8y^2 \geq x^4+(59-6x)x^2 =$$
$$= x^2\left((x-3)^2+50\right) \geq 0,$$

wobec tego $f\binom{x}{y} \leq \frac{\sqrt{40}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Jeśli $x+y>100$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, to

$$x^2+y^2 \geq \tfrac{1}{2}(x+y)^2 > 5000, \qquad \text{więc } f\binom{x}{y} \leq \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5000}} < \frac{1}{10} < \frac{1}{4} = 1-\frac{3}{4} \leq e^{-3/4}.$$

Wobec tego kres górny funkcji f w zbiorze C jest równy kresowi górnemu tej funkcji w zbiorze $D = \left\{\binom{x}{y} : \quad x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 100\right\}$, który jest zwarty. Kres górny funkcji f jest więc jej wartością w pewnym punkcie tego zbioru. Może to być punkt wewnętrzny, w którym gradient jest równy $\mathbf{0}$ lub też punkt z brzegu tego zbioru. W punktach brzegu musi zachodzić jedna z trzech równości $x=0$, $y=0$, $x+y=100$. Ostatni przypadek nie jest interesujący, bo już wykazaliśmy, że w takich punktach wartości funkcji są mniejsze niż $f\binom{1/2}{1/6} = e^{-3/4}$. Załóżmy więc, że $y=0$. Mamy teraz do czynienia z wyrażeniem xe^{-x^2}, którego pochodna równa jest $(1-2x^2)e^{-x^2}$, więc jest dodatnia w przedziale $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ natomiast w każdym punkcie półprostej $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ pochodna ta jest ujemna. Wynika stąd, że wyrażenie xe^{-x^2} przyjmuje swą największa wartość w punkcie $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tą największą wartością jest $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Liczba ta jest mniejsza niż $e^{-3/4}$, można to sprawdzić bez użycia sprzętu elektronicznego podnosząc obie liczby do potęgi 4 i korzystając z nierówności $e < 4$. Trzeba jeszcze zbadać wyrażenie ye^{-3y}. Jego pochodna to $(1-3y)e^{-3y}$, jest ona dodatnia na przedziale $(0, \frac{1}{3})$, ujemna — na półprostej $(\frac{1}{3}, +\infty)$, zatem wyrażenie to przyjmuje swą wartość największą w punkcie $y = \frac{1}{3}$ i wartość ta jest równa $\frac{1}{3}e^{-1}$ i jest ona mniejsza niż $e^{-3/4}$. Wykazaliśmy w ten sposób, że kresem górnym funkcji f w zbiorze C jest liczba $e^{-3/4} = f\binom{1/2}{1/6}$.

Drugi sposób znalezienia kresu górnego.
Podobnie jak w przykładzie poprzednim możemy znaleźć kres górny funkcji f badając kolejno dwie funkcje jednej zmiennej. Najpierw potraktujemy wyrażenie $(x+3y)e^{-x^2-3y}$ jako funkcję zmiennej y a $x \geq 0$ jako ustalony parametr. Pochodna tego wyrażenia to $(1-x-3y)e^{-x^2-3y}$. Jeśli $x \geq 1$, to pochodna ta jest ujemna dla $y > 0$, więc wyrażenie $(x+3y)e^{-x^2-3y}$ maleje ze wzrostem zmiennej y, więc jego największą wartością jest xe^{-x^2}. Jeśli $0 \leq x < 1$, to w przedziale $(0, \frac{1-x}{3})$ pochodna jest dodatnia a na półprostej $(\frac{1-x}{3}, +\infty)$ – ujemna, wobec tego w tym przypadku największą jego wartością jest $\left(x + 3\frac{1-x}{3}\right) e^{-x^2-3(1-x)/3} = e^{-x^2+x-1}$. Trzeba teraz znaleźć kres górny funkcji zmiennej x określonej w przedziale $[0,1)$ wzorem e^{-x^2+x-1} a na półprostej $[1, +\infty)$ – wzorem xe^{-x^2}. W pierwszym przypadku możemy skorzystać z równości $-x^2+x-1 = -(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$, a w drugim stwierdzamy po obliczeniu pochodnej, że na interesującej nas półprostej $[1, +\infty)$ funkcja maleje. Stąd wynika, że największą wartością tej funkcji zmiennej x jest wartość w punkcie $x = \frac{1}{2}$ i jest ona równa $e^{-3/4}$. ■

Przykład 2.48 Niech $f\binom{x}{y} = (x+y)e^{-x^2-3y}$. Znajdziemy kresy tej funkcji w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, tj. w zbiorze $C = \left\{\binom{x}{y} \colon \quad x \geq 0, y \geq 0\right\}$. Będziemy postępować tak, jak w przykładzie poprzednim, bowiem funkcja jest podobna. Mamy $\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{1-2x(x+y)}{1-3x-3y} \cdot e^{-x^2-3y}$. Ten gradient zeruje się jedynie w punkcie $\binom{3/2}{-7/6}$, który to punkt leży *poza* pierwszą ćwiartką. Wewnątrz pierwszej ćwiartki funkcja jest dodatnia, na brzegu też z wyjątkiem punktu $\mathbf{0}$, w którym wartością f jest liczba 0. Wobec tego kresem dolnym jest 0. Należy znaleźć kres górny. Mamy nierówność $e^{x^2+3y} \geq \frac{(x^2+3y)^2}{2!} = \frac{1}{2}(x^4+6x^2y+9y^2)$ w każdym punkcie zbioru C. Jeśli założymy dodatkowo, że $x+y \geq 10$, to $\frac{1}{2}(x^4+6x^2y+9y^2) \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, co wykazaliśmy w poprzednim przykładzie. Wobec tego $f\binom{x}{y} = (x+y)e^{-x^2-3y} \leq \frac{2(x+y)}{x^2+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Mamy też $f\binom{1}{1} = 2e^{-4} > \frac{2}{3^4} > \frac{1}{50}$. Jeśli więc $\sqrt{x^2+y^2} \geq 2\sqrt{2}\cdot 50$ $\left(x, y \geq 0 \to x+y \geq \sqrt{x^2+y^2}\right)$, to $f\binom{x}{y} < f\binom{1}{1}$, zatem kres górny funkcji f w zbiorze C równy jest kresowi górnemu funkcji f w zbiorze $D = \left\{\binom{x}{y} \colon \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{2}\cdot 50,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$. Ten zbiór jest zwarty, więc kres górny funkcji ciągłej f w tym zbiorze jest jej wartością w pewnym punkcie tego zbioru. Nie może to być jego punkt wewnętrzny, bo gradient się nie zeruje. Musi więc to być punkt brzegowy. W grę wchodzą teoretycznie trzy możliwości: $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2}\cdot 50$, $x = 0$ i $y = 0$. Pierwsza została już wykluczona, bo w punktach dla których $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2}\cdot 50$, wartość funkcji f jest mniejsza niż jej wartość w punkcie $\binom{1}{1}$. Jeśli $x = 0$, to mamy do czynienia z wyrażeniem ye^{-3y}, którego największą wartością jest $\frac{1}{3}e^{-1}$, co można łatwo sprawdzić (zob. przykład poprzedni). Jeśli $y = 0$, to mamy do czynienia z wyrażeniem xe^{-x^2}, które przyjmuje swą największą wartość w punkcie $\frac{1}{\sqrt{2}}$, wartość ta równa jest $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Ta ostatnia liczba, większa niż $\frac{1}{3}e^{-1}$, jest kresem górnym funkcji f w zbiorze D, więc również w zbiorze C. Podobnie jak w poprzednich przykładach można rzecz całą sprowadzić do kolejnego badania dwu funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, najpierw np. zmiennej y, potem zmiennej x. Zachęcamy czytelnika do samodzielnego rozwiązania tego zadania drugim sposobem.

Zadanie rozpatrywane w tym przykładzie jest pozornie prawie tożsame z poprzednim. Jednak czasem pozory mylą! ■

Przykład 2.49 Niech $f\binom{x}{y} = 6x^5+15x^4-50x^3-90x^2+\frac{1}{4}(-e^{2y}+x^2(x+3)^2)^2$. Znaleźć punkty, w których funkcja f ma lokalne ekstrema oraz $\sup f$ i $\inf f$. Skorzystamy z równości:
$\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = 30x^4+60x^3-150x^2-180x+x(x+3)(2x+3)\left(-e^{2y}+x^2(x+3)^2\right)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = -e^{2y}\left(-e^{2y}+x^2(x+3)^2\right)$.
W punkcie, w którym funkcja f ma lokalne ekstremum jej pochodne cząstkowe muszą się zerować, czyli
$0 = -e^{2y}+x^2(x+3)^2$ oraz
$0 = 30x^4+60x^3-150x^2-180x = 30x(x+1)(x+3)(x-2)$,
druga równość wynika z tego, że $0 = \frac{\partial f}{\partial x}$ oraz z pierwszej! Wobec tego x to jedna z liczb -3, 2, -1, 0. Ponieważ liczba 0 nie jest wartością funkcji wykładniczej, więc funkcja f ma dwa punkty krytyczne[11]: $\binom{-1}{\ln 2}$ i $\binom{2}{\ln 10}$. Niech $g\binom{x}{y} = 6x^5+15x^4-50x^3-90x^2$ i $h\binom{x}{y} = \frac{1}{4}(-e^{2y}+x^2(x+3)^2)^2$. Jest jasne, że najmniejszą wartością funkcji h jest 0, przy czym $h\binom{-1}{\ln 2} = 0 = h\binom{2}{\ln 10}$. Funkcję g potraktujemy jako funkcję jednej zmiennej x. Ma ona cztery punkty krytyczne: -3, -1, 0, 2. W punktach -3, 0 ma lokalne maksima, a w punktach -1, 2 – lokalne minima (g to wielomian piątego stopnia!). Wobec tego funkcja g, jako funkcja dwu zmiennych, ma również lokalne minima w punktach $\binom{-1}{\ln 2}$ oraz $\binom{2}{\ln 10}$, przy czym są to minima niewłaściwe (lokalnie najmniejsze wartości są przyjmowana we wszystkich punktach prostych $x=1$ oraz $x=2$). Wobec tego, że każda z funkcji g, h ma lokalne minima w punktach $\binom{-1}{\ln 2}$ i $\binom{2}{\ln 10}$, to funkcja $f=g+h$ również ma minima w tych punktach. Ponieważ są to jedyne punkty zerowania się gradientu funkcji f, więc jeśli rozważymy koło K o małym promieniu i środku np. w punkcie $\binom{-1}{\ln 2}$, to dla każdego punktu $\binom{x}{y}\in K$ musi być $f\binom{x}{y}\neq f\binom{-1}{\ln 2}$, więc $f\binom{x}{y} > f\binom{-1}{\ln 2}$, zatem funkcja f ma w obu tych punktach lokalne minima jedynie w tych punktach. Są to więc lokalne minima właściwe.

Zachodzi oczywista równość: $\lim\limits_{y\to\infty} f\binom{0}{y} = \infty$, więc kresem górnym funkcji f jest $+\infty$. Mamy też $\lim\limits_{x\to-\infty} f\binom{x}{\ln x(x+3)} = -\infty$, a zatem kresem dolnym funkcji f jest $-\infty$.

Wykazaliśmy więc, że funkcja f różniczkowalna w całej płaszczyźnie jest nieograniczona zarówno z góry jak i z dołu, jej gradient zeruje się jedynie w dwóch punktach, w każdym z nich funkcja ma lokalne minimum właściwe. Funkcji o takich własnościach, której dziedziną jest prosta $\mathbb{R}$ oczywiście nie ma. Widzimy więc, że przy badaniu funkcji wielu zmiennych występują istotnie nowe zjawiska. ■

[11] tj. takie, w których gradient jest wektorem zerowym

Przykład 2.50 *W tym przykładzie będzie nieco więcej przekształceń, można mniej uwagi poświęcić ich kontroli, natomiast warto prześledzić tok rozumowania!*
Niech $f\binom{x}{y} = \left(1 - \frac{(x+y-1)^2}{4xy}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}$ dla $\binom{x}{y} \in G$, dziedzinę G określamy wzorem $G = \left\{\binom{x}{y}:\quad x>0,\ y>0,\ x+y>1,\ |x-y|<1\right\}$[12]. Znajdziemy kresy f.
Z nierówności $y-1<x$ i $x+y>1$ otrzymujemy $\frac{(x+y-1)^2}{4xy} < \frac{4x^2}{4xy} = \frac{x}{y}$. Analogicznie $\frac{(x+y-1)^2}{4xy} < \frac{y}{x}$. Wobec tego $\frac{(x+y-1)^2}{4xy} < \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 1$, zatem f przyjmuje na zbiorze G jedynie wartości dodatnie. Funkcję f można określić wzorem

$$f\binom{x}{y} = \left(1 - \frac{(x+y-1)^2}{4xy}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}$$

na całym brzegu zbioru G z wyjątkiem punktów $\binom{1}{0}$ i $\binom{0}{1}$. Mamy $\frac{(x+y-1)^2}{4xy} = \frac{x+y-1}{4x}\cdot$ $\cdot\left(1+\frac{x-1}{y}\right)$. Wyrażenie $\frac{x+y-1}{4x}$ dąży 0 przy $\binom{x}{y} \longrightarrow \binom{1}{0}$. Drugi czynnik $1+\frac{x-1}{y}$ jest ograniczony w zbiorze G, bo $-y<x-1<y$. Wobec tego $\frac{(x+y-1)^2}{4xy}$ dąży do 0 przy $\binom{x}{y} \longrightarrow \binom{1}{0}$. Wobec tego zdefiniujemy $f\binom{1}{0} = \sqrt{2}$ i, ze względu na symetrię, $f\binom{0}{1} = f\binom{1}{0} = \sqrt{2}$. W ten sposób otrzymujemy funkcję f, która jest ciągła nie tylko w punktach zbioru G, ale również w punktach najmniejszego zbioru domkniętego $\overline{G}$ zawierającego G. W zbiorze G zachodzi nierówność $|x-y|<1$, zatem jeśli $x\to\infty$, to $\frac{x}{y}\to 1$.
Jeśli więc $x\to\infty$, to $f\binom{x}{y} = \left(-\frac{1+(x-y)^2}{4x} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \longrightarrow \sqrt{2}$.[13]
Dołączymy do zbioru $\overline{G}$ „punkt w nieskończoności”, który oznaczymy przez ∞. Ten powiększony zbiór jest zwarty (z każdego ciągu punktów tego zbioru można wybrać podciąg, którego granica jest w tym zbiorze). Zdefiniujmy $f(\infty)=\sqrt{2}$. Funkcja f jest ciągła na zbiorze $\overline{G}\cup\{\infty\}$. Przyjmuje więc w pewnym punkcie tego zbioru wartość największą i w pewnym punkcie – wartość najmniejszą.

Jeśli wartość największa lub najmniejsza jest przyjmowana w punkcie wewnętrznym dziedziny f, to gradient w tym punkcie zeruje się. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = -\frac{2(x+y-1)x-(x+y-1)^2}{4x^2y}\cdot\sqrt{1+x^2+y^2} + \left(1-\frac{(x+y-1)^2}{4xy}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Równanie $0 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}$ jest równoważne równaniu

$$(x^2-(y-1)^2)(1+x^2+y^2) = x^2(4xy-(x+y-1)^2) \tag{1}$$

Analogicznie równanie $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 0$ równoważne jest równaniu

$$(y^2-(x-1)^2)(1+x^2+y^2) = y^2(4xy-(x+y-1)^2). \tag{2}$$

Z tego układu równań wynika, że $4xy-(x+y-1)^2=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2-(y-1)^2=0$ oraz $y^2-(x-1)^2-0$. Dodając te dwa równania stronami i dzieląc rezultat przez 2 otrzymujemy $x+y=1$, więc żaden punkt wewnętrzny nie wchodzi w grę.

[12] Zbiór G to nieskończony pas ograniczony dwiema półprostymi równoległymi tworzącymi kąt 45° z osią OX, ograniczony „z dołu” odcinkiem prostopadłym do wzmiankowanych półprostych.
[13] y z mianownika został „przesunięty” pod $\sqrt{\ }$, więc w mianowniku wyrażenia podpierwiastkowego pojawił się y^2. Poza tym zapis jest podporządkowany dalszym rozważaniom, oczywiście autor najpierw doprowadził rozumowanie do końca a potem je zapisywał.

Jeśli $4xy - (x + y - 1)^2 \neq 0$, to mnożymy równanie (1) przez y^2, równanie (2) przez x^2, wtedy prawe strony stają się równe, więc lewe też i wobec tego otrzymujemy równość $y^2(x^2 - (y-1)^2) = x^2(y^2 - (x-1)^2)$, więc $y^2(y-1)^2 = x^2(x-1)^2$. Przenosimy wszystko na prawą stronę równania i rozkładamy na czynniki:
$$0 = x^2(x-1)^2 - y^2(y-1)^2 = (x^2 - x - y^2 + y)(x^2 - x + y^2 - y) = \\ = (x-y)(x+y-1)(x^2+y^2-x-y).$$

Jeśli $x = y$, to $(2x-1)(1+2x^2) = x^2(4x^2 - (2x-1)^2) = x^2(4x-1)$, więc $x = 1 = y$.

Jeśli $x + y = 1$, to punkt $\binom{x}{y}$ nie leży wewnątrz G.

Zajmiemy się ostatnim przypadkiem $x^2 + y^2 = x + y$. Po dodaniu równań (1) i (2) otrzymujemy $(2y + 2x - 2)(1 + x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(4xy - (x + y - 1)^2)$, więc $2(x + y - 1)(x + y + 1) = (x + y)(x + y + 2xy - 1)$, zatem
$0 = 2(x+y)^2-2-2xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) = x^2+y^2+2xy-2-2xy(x+y)+(x+y) =$
$= 2(x+y-1)(1-xy)$. Stąd $x+y = 1$ lub $xy = 1$. Wewnątrz G nie może być $x+y = 1$. Jeśli $xy = 1$, to $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = x+y+2xy = x+y+2$, więc $x+y = -1$ lub $x + y = 2$. Oczywiście wewnątrz G zachodzi nierówność $x + y > 1$, zatem $x + y = 2$, co w połączeniu z $xy = 1$, daje $x = 1 = y$. Wobec tego funkcja f wewnątrz G może przyjmować największą lub najmniejszą wartość jedynie w punkcie $\binom{1}{1}$. Mamy $f\binom{1}{1} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Zajmiemy się brzegiem G. Jeśli $x+y = 1$, to $f\binom{x}{y} = \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{2 - 2x(1-x)}$. W tym przypadku $0 \leq x \leq 1$, więc największą wartością jest $\sqrt{2} = f\binom{0}{1} = f\binom{1}{0}$ a najmniejszą — liczba $\sqrt{\frac{3}{2}} = f\binom{1/2}{1/2}$. Kolej na następny fragment brzegu: teraz $y = x+1$, $x \geq 0$. W tej sytuacji mamy $f\binom{x}{y} = \frac{1}{x+1} \cdot \sqrt{1 + x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{2 - 2\frac{x}{(x+1)^2}}$. Funkcja $\frac{x}{(x+1)^2}$ rośnie na przedziale $[0, 1]$ i maleje na półprostej $[1, \infty)$, zatem jej kresem dolnym na półprostej $[0, +\infty)$ jest $0 = f(0) = \lim\limits_{x\to\infty} = \frac{x}{(x+1)^2}$, a górnym $\frac{1}{4} = \frac{1}{(1+1)^2}$. Wobec tego kresem górnym funkcji f na półprostej $y = x + 1$, $x \geq 0$ jest liczba $\sqrt{2} = f\binom{0}{1} = f(\infty)$, a dolnym liczba $\sqrt{\frac{3}{2}} = f\binom{1}{2}$. Z tego, że f jest symetryczna, tzn. $f\binom{x}{y} = f\binom{y}{x}$, wynika, że te same liczby są kresami na półprostej $y = x-1$, $1 \leq x < \infty$.

Możemy teraz podsumować nasze rozważania. Na zbiorze $\overline{G} \cup \{\infty\}$ funkcja f osiąga kresy. Kandydatami na kres górny są liczby $f\binom{1}{1}$, $f\binom{1}{0}$, $f\binom{0}{1}$ i $f(\infty)$, na dolny — liczby $f\binom{1}{1}$, $f\binom{1/2}{1/2}$, $f\binom{1}{2}$. Ostatecznie możemy stwierdzić, że
$$\sup_G f = \sqrt{2} = f\binom{1}{0} = f\binom{0}{1} = f(\infty) = \Big(\lim_{x\to\infty} f\binom{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} f\binom{x}{x-1}\Big),$$
$$\inf_G f = f\binom{1}{2} = f\binom{1/2}{1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} < \tfrac{3\sqrt{3}}{4} = f\binom{1}{1}. \ \blacksquare$$

Komentarz do powyższego przykładu.
Rozważmy płaszczyznę P o równaniu $Ax + By + z = D$. O liczbach A, B, D zakładamy, że $D < 0$, $A < D < 0$,$B < D < 0$, $D < 1 + A$, $D < 1 + B$, $A + B + 1 < D$, Wtedy P przecina prostą $y = z = 0$ w punkcie $\begin{pmatrix} D/A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, prostą $x = z = 0$ – w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ D/B \\ 0 \end{pmatrix}$, prostą $x = 1$, $y = 0$ – w punkcie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D-A \end{pmatrix}$, prostą $x = 0$, $y = 1$ – w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D-B \end{pmatrix}$, prostą $x = 1 = z$ – w punkcie $\begin{pmatrix} 1 \\ (D-A-1)/B \\ 1 \end{pmatrix}$, prostą $y = z = 1$

– w punkcie $\begin{pmatrix} (D-B-1)/A \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Widzimy więc, że dzięki założeniom o liczbach A, B, D płaszczyzna P przecina 6 z 12 krawędzi sześcianu o krawędzi 1 i wierzchołkach $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – reszta wierzchołków jest już jednoznacznie wyznaczona. Przekrój sześcianu jest więc sześciokątem. Bez trudu sprawdzić można, że jego pole równe jest $\left(1 - \frac{D^2}{2AB} - \frac{(A+B+1-D)^2}{2AB}\right)\sqrt{A^2+B^2+1}$ oraz że przy ustalonych A, B pole to jest największe, gdy $D = \frac{A+B+1}{2}$ i równe $\left(1 - \frac{(A+B+1)^2}{4AB}\right)\sqrt{A^2+B^2+1} = f\binom{A}{B}$. Z dokładnością do izometrii każdy sześciokątny przekrój sześcianu można opisać w podany przez nas sposób, po prostu wybraliśmy 6 krawędzi, które ma przeciąć płaszczyzna przekroju. W przykładzie 25 znaleźliśmy kres górny pól tych sześciokątów. Okazało się, że wśród tych sześciokątów nie ma sześciokąta o największym polu. Do kresu górnego pole zbliża się, gdy sześciokąt zaczyna przypominać np. prostokąt o wierzchołkach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Można udowodnić, że ten właśnie prostokąt ma największe pole ze wszystkich przekrojów płaskich sześcianu jednostkowego. ■

Przykład 2.51 *(suma odległości od trzech danych punktów)*

Niech $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3} \in \mathbb{R}^2$ będą różnymi punktami. Znajdziemy na płaszczyźnie punkt, którego suma odległości od punktów $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$ jest najmniejsza.

Zdefiniujmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_3\|$. Z nierówności trójkąta wynika natychmiast, że $\Big|\|\mathbf{x}_1-\mathbf{p}_1\| - \|\mathbf{x}_2-\mathbf{p}_1\|\Big| \le \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$. Z tej nierówności wynika, że pierwszy składnik ($\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_1\|$) spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. To samo dotyczy dwóch następnych. Wobec tego funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą 3, jest więc ciągła. Jeżeli $\|\mathbf{x}\| \ge \|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\|$, to zachodzi nierówność

$$f(\mathbf{x}) \ge \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{p}_3\| \ge 2(\|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\|) >$$
$$> \|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\| = f(\mathbf{0}).$$

Zbiór $K = \{\mathbf{x}\colon \quad \|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\|\}$, czyli koło domknięte o środku w punkcie $\mathbf{0} = (0,0,0)$ i promieniu $\|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\|$, jest zwarty jako domknięty i ograniczony, a wobec tego funkcja ciągła f przyjmuje w pewnym jego punkcie $\mathbf{q}$ kres dolny, czyli $|f(\mathbf{x})| \ge f(\mathbf{q})$, jeśli $\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\|$. Jeśli $\|\mathbf{x}\| \ge \|\mathbf{p}_1\| + \|\mathbf{p}_2\| + \|\mathbf{p}_3\|$, to $|f(\mathbf{x})| > |f(\mathbf{0})| \ge |f(\mathbf{q})|$. Wobec tego $f(\mathbf{q})$ jest najmniejszą wartością funkcji f na *całej* płaszczyźnie, a nie tylko na kole K. Ponieważ na brzegu koła K funkcja przyjmuje wartości większe (*nie równe*) od $|f(q)|$, więc punkt $\mathbf{q}$ leży wewnątrz koła K. Wynika stąd, że w punkcie $\mathbf{q}$ funkcja f jest nieróżniczkowalna lub że jej gradient w tym punkcie jest wektorem zerowym.

Załóżmy, że $\mathbf{q} \ne \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Wtedy $\operatorname{grad} f(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Zachodzi wzór $\operatorname{grad}(\|\mathbf{x}\|) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, który można sprawdzić np. obliczając pochodne cząstkowe funkcji $\|\mathbf{x}\|$, inne wyprowadzenie można znaleźć w przykładzie 2.33. Zachodzi on dla $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$, w punkcie $\mathbf{0}$ funkcja nie ma pochodnych cząstkowych, więc jest w nim nieróżniczkowalna. Stąd wynika, że funkcja f jest nieróżniczkowalna w punktach $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ oraz że w pozostałych punktach zachodzi równość $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_1\|} + \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_2\|} + \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}_3}{\|x-\mathbf{p}_3\|}$. W szczególności

$$\mathbf{0} = \operatorname{grad} f(\mathbf{q}) = \tfrac{\mathbf{q}-\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_1\|} + \tfrac{\mathbf{q}-\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_2\|} + \tfrac{\mathbf{q}-\mathbf{p}_3}{\|q-\mathbf{p}_3\|}.$$

Niech $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_1-\mathbf{q}\|}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_2-\mathbf{q}\|}$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{p}_3-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_3-\mathbf{q}\|}$. Długością każdego z wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ jest 1. Mamy też wzór $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3 = -\operatorname{grad} f(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Wobec tego $1 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 = (-\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3)\cdot(-\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3)) = \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3 = 2+2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3$, zatem $\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3 = -\frac12$. Analogicznie $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = -\frac12$ oraz $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3 = -\frac12$.[14] Niech $\ell_j = \|\mathbf{p}_j-\mathbf{q}\|$ dla $j=1,2,3$. Mamy zatem $\mathbf{p}_j-\mathbf{q} = \ell_j\mathbf{v}_j$ i wobec tego $\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2-\mathbf{q}-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}) = \ell_2\mathbf{v}_2-\ell_1\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3-\mathbf{q}-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q}) = \ell_3\mathbf{v}_3-\ell_1\mathbf{v}_1$. Możemy więc napisać $(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1) = (\ell_2\mathbf{v}_2-\ell_1\mathbf{v}_1)\cdot(\ell_3\mathbf{v}_3-\ell_1\mathbf{v}_1) = -\frac12\ell_2\ell_3+\frac12\ell_1\ell_3+\frac12\ell_1\ell_2+\ell_1^2 > -\frac12\ell_2\ell_3$, $\|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\|^2 = (\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1) = (\ell_2\mathbf{v}_2-\ell_1\mathbf{v}_1)\cdot(\ell_2\mathbf{v}_2-\ell_1\mathbf{v}_1) = \ell_2^2+\ell_2\ell_1+\ell_1^2$. Podobnie $\|\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1\|^2 = (\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1) = (\ell_3\mathbf{v}_3-\ell_1\mathbf{v}_1)\cdot(\ell_3\mathbf{v}_3-\ell_1\mathbf{v}_1) = \ell_3^2+\ell_3\ell_1+\ell_1^2$. Wobec tego $\|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\| = \sqrt{\ell_2^2+\ell_2\ell_1+\ell_1^2} > \ell_2$ i $\|\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1\| = \sqrt{\ell_3^2+\ell_3\ell_1+\ell_1^2} > \ell_3$. Stąd wynika, że:

$$(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1) > -\tfrac12\ell_2\ell_3 > -\tfrac12\|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\|\cdot\|\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1\|. \tag{T1}$$

Analogicznie:

$$(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) > -\tfrac12\ell_3\ell_1 > -\tfrac12\|\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2\|\cdot\|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\|. \tag{T2}$$

oraz

$$(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3) > -\tfrac12\ell_1\ell_2 > -\tfrac12\|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3\|\cdot\|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3\|. \tag{T3}$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli gradient funkcji f przyjmuje wartość $\mathbf{0}$ w jakimś punkcie, to zachodzą nierówności T1, T2, T3. Wynika stąd od razu, że jeśli co najmniej jedna z nich nie zachodzi, to funkcja f przyjmuje swą najmniejszą wartość w jednym z punktów nieróżniczkowalności, tzn. w jednym z punktów $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$.

Teraz wykażemy, że jeśli zachodzi nierówność T1, to funkcja f nie przyjmuje swej najmniejszej wartości w punkcie $\mathbf{p}_1$. Niech $\mathbf{w}_2 = \mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}_2\|\cdot\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_2\cdot\|\mathbf{w}_3\|$. Mamy $\mathbf{w}\cdot\frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_2+\frac{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}\|\mathbf{w}_3\| = \|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_2$. Analogicznie $\mathbf{w}\cdot\frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \|\mathbf{w}_2\|\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_2$. W nowych oznaczeniach nierówność T1 wygląda tak:

$$\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3 > -\tfrac12\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|.$$

Zachodzi również wzór:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}} = \sqrt{(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_2\cdot\|\mathbf{w}_3\|)\cdot(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_2\cdot\|\mathbf{w}_3\|)} =$$
$$= \sqrt{2\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|\cdot(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3)}.$$

Niech $h(t) = t\|\mathbf{w}\|+\|t\mathbf{w}-\mathbf{w}_2\|+\|t\mathbf{w}-\mathbf{w}_3\|$ dla $t\ge0$. Z wzoru na pochodną złożenia wynika, że $h'(t) = \|\mathbf{w}\|+\frac{t\mathbf{w}-\mathbf{w}_2}{\|t\mathbf{w}-\mathbf{w}_2\|}\cdot\mathbf{w}+\frac{t\mathbf{w}-\mathbf{w}_3}{\|t\mathbf{w}-\mathbf{w}_3\|}\cdot\mathbf{w}$. Stąd i z poprzednio uzyskanych równości wynika, że

$$h'(0) = \|\mathbf{w}\|-\mathbf{w}\cdot\tfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}-\mathbf{w}\cdot\tfrac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} =$$
$$= \sqrt{2\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|\cdot(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3)}-2(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3).$$

Wobec tego $h'(0)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\| < 2(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3)$ — by przekonać się o tym wystarczy podnieść do kwadratu obie strony nierówności

$$\sqrt{2\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|\cdot(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3)} < 2(\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3)$$

z następnie podzielić otrzymaną nierówność przez $\|\mathbf{w}_2\|\cdot\|\mathbf{w}_3\|+\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_3$, ta ostatnia liczba jest dodatnia na mocy T1 (na mocy nierówności Schwarza jest nieujemna, ale my

[14] Ponieważ iloczyn skalarny wektorów jest równy iloczynowi ich długości i kosinusa kąta między nimi, więc kosinus kąta między dowolnymi dwoma spośród tych trzech wektorów jednostkowych jest równy $-\frac12$, a to oznacza, że wektory te tworzą kąty 120°. W uwadze po przykładzie czytelnik może znaleźć więcej na ten temat.

musimy wiedzieć, że nierówność jest ostra). Wobec tego $h'(0) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-\frac{1}{2}\|\mathbf{w}_2\| \cdot \|\mathbf{w}_3\| < \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3$. Widzimy więc, że nierówność $h'(0) < 0$ równoważna jest nierówności T1. Wobec tego $h'(0) < 0$, a stąd wynika od razu, że funkcja f nie przyjmuje swej najmniejszej wartości w punkcie $\mathbf{p}_1$.

Analogicznie z nierówności T2 wynika, że funkcja f nie przyjmuje swej najmniejszej wartości w punkcie $\mathbf{p}_2$, a z nierówności T3, że funkcja f nie przyjmuje swej najmniejszej wartości w punkcie $\mathbf{p}_3$. Wobec tego, jeśli spełnione są wszystkie trzy warunki, to funkcja f nie przyjmuje swej najmniejszej wartości w żadnym z punktów $\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$,$\mathbf{p}_3$ a ponieważ w jakimś punkcie przyjmuje wartość najmniejszą, więc jej gradient jest równy $\mathbf{0}$ w pewnym punkcie $\mathbf{q}$. Na razie nie ma żadnego powodu, by twierdzić, że gradient funkcji f przyjmuje wartość $\mathbf{0}$ tylko w jednym punkcie. Wykażemy, że jeśli gradient funkcji f przyjmuje wartość $\mathbf{0}$ w punkcie $\mathbf{q}$, to dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi nierówność $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{q})$. Stąd wynika oczywiście, że gradient może się zerować w co najwyżej jednym punkcie, więc w dokładnie jednym.

Niech $\mathbf{x} \neq \mathbf{q}$ i niech $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{q}$. Z równości $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ wynika związek $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_3 = 0$. Z tego, że suma trzech liczb jest równa 0 wynika, że albo dwie z nich są nieujemne a jedna ujemna albo dwie są ujemne a trzecia jest dodatnia. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że w pierwszym przypadku $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 \geq 0$ i jednocześnie $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 \geq 0$ a w drugim: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 > 0 > \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 \geq \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_3$. W obu przypadkach mamy $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 \geq 0$. Istnieje dokładnie jedna para liczb rzeczywistych taka, że $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$, bo wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ są liniowo niezależne. Mnożąc skalarnie tę równość kolejno przez $\mathbf{v}_1$ i przez $\mathbf{v}_2$ otrzymujemy równości

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1 = \alpha - \tfrac{1}{2}\beta \text{ i } \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 = \alpha\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2 = -\tfrac{1}{2}\alpha + \beta.$$

Potraktujmy te równości jako układ równań z niewiadomymi α, β. Rozwiązując go otrzymujemy $\alpha = \frac{4}{3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2$ i $\beta = \frac{2}{3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2$. Oczywiście zachodzą nierówności $\alpha, \beta \geq 0$, przy czym $\alpha \neq 0$ lub $\beta \neq 0$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{q} + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \\
&= \|(\alpha - \ell_1)\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2\| + \|\alpha\mathbf{v}_1 + (\beta - \ell_2)\mathbf{v}_2\| + \|(\alpha + \ell_3)\mathbf{v}_1 + (\beta + \ell_3)\mathbf{v}_2\| = \\
&= \sqrt{(\alpha - \ell_1)^2 - \beta(\alpha - \ell_1) + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 - \alpha(\beta - \ell_2) + (\beta - \ell_2)^2} + \\
&\qquad + \sqrt{(\alpha + \ell_3)^2 - (\alpha + \ell_3)(\beta + \ell_3) + (\beta + \ell_3)^2} = \\
&= \sqrt{\ell_1^2 + \ell_1(\beta - 2\alpha) + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} + \sqrt{\ell_2^2 + \ell_2(\alpha - 2\beta) + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} + \\
&\qquad + \sqrt{\ell_3^2 + \ell_3(\alpha + \beta) + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} = \\
&= \sqrt{\left(\ell_1 + \tfrac{\beta}{2} - \alpha\right)^2 + \tfrac{3}{4}\beta^2} + \sqrt{\left(\ell_2 + \tfrac{\alpha}{2} - \beta\right)^2 + \tfrac{3}{4}\alpha^2} + \sqrt{\left(\ell_3 + \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}(\alpha - \beta)^2} > \\
&> \left|\ell_1 + \tfrac{\beta}{2} - \alpha\right| + \left|\ell_2 + \tfrac{\alpha}{2} - \beta\right| + \left|\ell_3 + \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2}\right| \geq \left|\ell_1 + \tfrac{\beta}{2} - \alpha + \ell_2 + \tfrac{\alpha}{2} - \beta + \ell_3 + \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2}\right| = \\
&\qquad = |\ell_1 + \ell_2 + \ell_3| = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = f(\mathbf{q}).
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że zawsze istnieje dokładnie jeden punkt $\mathbf{q}$, dla którego suma odległości od trzech danych punktów $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ jest najmniejsza. Jeżeli spełnione są wszystkie trzy nierówności T1, T2, T3, to jest to punkt scharekteryzowany równością $\frac{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_1-\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_2-\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{p}_3-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_3-\mathbf{q}\|} = \mathbf{0}$. Jeśli nie wszystkie nierówności T1, T2, T3 mają miejsce, to jest nim jeden z punktów $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$. ∎

Komentarz geometryczny:

Z równości $\frac{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_1-\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_2-\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{p}_3-\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}_3-\mathbf{q}\|} = \mathbf{0}$ wynika, że

$$\mathbf{q}=\frac{\frac{\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_1\|}+\frac{\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_2\|}+\frac{\mathbf{p}_3}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_3\|}}{\frac{1}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_1\|}+\frac{1}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_2\|}+\frac{1}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_3\|}}=\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2+\alpha_3\mathbf{p}_3,$$

gdzie $\alpha_j=\dfrac{\frac{1}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}_j\|}}{\frac{1}{\|x-\mathbf{p}_1\|}+\frac{1}{\|x-\mathbf{p}_2\|}+\frac{1}{\|x-\mathbf{p}_3\|}}$, dla $j=1,2,3$. Liczby α_1, α_2, α_3 są dodatnie i ich suma jest równa 1. Wobec tego punkt $\mathbf{q}$ leży wewnątrz trójkąta o wierzchołkach $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ (być może zdegenerowanego do odcinka), bowiem po wprowadzeniu nowych oznaczeń mamy

$$\mathbf{q}=\mathbf{p}_1+(\alpha_2+\alpha_3)\Big(\big(\mathbf{p}_2+\tfrac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)\big)-\mathbf{p}_1\Big);$$

punkt $\mathbf{p}_2+\frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)$ otrzymujemy przesuwając się z punktu $\mathbf{p}_2$ w kierunku punktu $\mathbf{p}_3$ o wektor $\frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)$ krótszy od wektora $\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2$, więc ten punkt leży na odcinku o końcach $\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$; analogicznie przekonujemy się, że punkt $\mathbf{q}$ leży na odcinku o końcach $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{p}_2+\frac{\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3}(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2)$. Stwierdziliśmy więc, że jeśli gradient funkcji f zeruje się w pewnym punkcie $\mathbf{q}$, to ten punkt musi leżeć wewnątrz trójkąta o wierzchołkach $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$. Wykazaliśmy, że wtedy zachodzi równość $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1=-\frac{1}{2}$. Iloczyn skalarny to iloczyn długości wektorów i kosinusa kąta między nimi. Wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ mają długość 1, więc kosinusy kątów między nimi równe są $-\frac{1}{2}$, a to oznacza, że każdy z tych trzech kątów równy jest $120°$. Wobec tego trójkąt nie może być zdegenerowany, czyli punkty $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ nie mogą leżeć na jednej prostej. Zauważmy jeszcze, że w każdym z trójkątów $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{q}$, $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{q}$, $\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1\mathbf{q}$ suma kątów ostrych równa jest $60°$, zatem każdy z tych sześciu kątów jest mniejszy niż $60°$. Wynika stąd, że każdy z kątów trójkąta $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ jest mniejszy niż $2\cdot 60°$. To samo wyrażają nierówności T1, T2, T3. W ostatnim fragmencie rozumowania rozważamy punkt $\mathbf{x}\neq\mathbf{q}$. Leży on w jednym z trzech obszarów na które dzielą płaszczyznę półproste wychodzące z punktu $\mathbf{q}$ w kierunku wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, oczywiście może leżeć na którejś z tych półprostych. Założyliśmy, że leży w obszarze ograniczonym półprostymi wyznaczonymi przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $(\alpha,\beta\geq 0)$ i wykazaliśmy, że suma odległości punktu $\mathbf{x}$ od punktów $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ jest większa niż suma odległości punktu $\mathbf{q}$ od od punktów $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$. Wykazaliśmy też, że jeśli kąt w trójkącie $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ jest mniejszy niż $120°$, to wychodząc z jego wierzchołka wzdłuż dwusiecznej (wektor $\mathbf{w}=\|\mathbf{w}_2\|\mathbf{w}_3+\mathbf{w}_2\|\mathbf{w}_3\|$ leży na dwusiecznej kąta utworzonego przez wektory $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, bo iloczyny skalarne $\mathbf{w}\cdot\frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$ i $\mathbf{w}\cdot\frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|}$ są równe) zmniejszamy sumę odległości od wierzchołków, zatem minimum nie może być przyjmowane w takim wierzchołku, czyli jeśli suma odległości osiąga swe minimum w jednym z wierzchołków trójkąta $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$, to ten kąt jest $\geq 120°$. W przypadku, gdy jeden z kątów trójkąta $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ jest $\geq 120°$ nie ma punktu, w którym gradient jest wektorem zerowym, więc minimum musi być przyjmowane w jednym z wierzchołków, w grę wchodzi tylko ten, który jest wierzchołkiem kąta $\geq 120°$.

Zauważmy jeszcze, że wystarczy, by dwa z tych kątów $\sphericalangle\mathbf{p}_1\mathbf{q}\mathbf{p}_2$, $\sphericalangle\mathbf{p}_2\mathbf{q}\mathbf{p}_3$, $\sphericalangle\mathbf{p}_3\mathbf{q}\mathbf{p}_1$ były równe $120°$, wtedy trzeci też musi być im równy. W przypadku pierwszym, tj. gdy wszystkie kąty w trójkącie $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ są mniejsze od $120°$, punktem tym jest punkt $\mathbf{q}$, z którego widać wszystkie boki trójkąta pod kątami $120°$. Taki punkt istnieje: zbiór punktów, z których dany odcinek (np. $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1$) widać pod kątem $120°$ jest suma łuków dwóch okręgów leżących po przeciwnych stronach prostej, na której leży ten odcinek, wystarczy wykazać, że któreś łuki mają punkt wspólny, co nie jest trudne dla osób, które coś wiedzą o geometrii płaszczyzny.

To zadanie można rozwiązać czysto geometrycznie, ale chociaż rozumowanie geometryczne nie jest skomplikowane, to nie można rozwiązania czysto geometrycznego uznać za łatwe – znane autorowi jest oparte na pomyśle (trudność polega na tym, by wpaść na pomysł, potem jest już proste). Geometryczne rozwiązanie tego zadania można znaleźć np. w popularnej książce „ O liczbach i figurach" autorstwa H.Rademachera i O.Toeplitza, wydanej przez PWN w 1956 r, str 46. W książce H.Steinhausa „Kalejdoskop matematyczny", PZWS 1956, na stronach 115 –117 można znaleźć „fizyczne" wyjaśnienie przyczyny, dla której minimum sumy odległości jest przyjmowane w punkcie opisanym powyżej.

Rachunek różniczkowy pozwolił na szybkie i dosyć automatyczne ograniczenie liczby kandydatów na punkt, w którym funkcja osiąga swą najmniejszą wartość – to bardzo ważne. Daleko nie każdy student widzi od razu w jakim punkcie minimum jest osiągane. Mając hipotezę łatwiej wykazać jej prawdziwość lub ją obalić. Ten ostatni fragment rozumowania można często sobie uprościć, jeśli ma się jakieś intuicje związane z badanym problemem. Starałem się pokazać w tym komentarzu, że każdy krok rozumowania przeprowadzanego w prezentowanym rozwiązaniu ma podtekst geometryczny. Geometryczna jest bowiem natura tego zadania. Jasne jest, że rozpatrując zagadnienia ekonomiczne można przewidywać jak powinno przebiegać rozwiązanie zadania o treści ekonomicznej. Oczywiście nie zawsze mamy właściwe intuicje i po to szczegółowo uzasadniamy każde zdanie, by mieć pewność uzyskania prawidłowego rozwiązania niezależnego od naszych wyobrażeń. Tak też postępują fizycy, chemicy itd.

Na zakończenie tych opowieści przedstawimy najważniejszy fragment rozwiązania geometrycznego. Załóżmy, że punkt $\mathbf{x}$ leży wewnątrz trójkąta $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ oraz że $\sphericalangle \mathbf{p}_2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 < 120°$. Obróćmy trójkąt $\mathbf{p}_3\mathbf{x}\mathbf{p}_1$ o $60°$ tak, by półprosta $\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3}$ znalazła się między półprostymi $\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ i $\overrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3'}$, gdzie $\mathbf{p}_3'$ oznacza obraz punktu $\mathbf{p}_3$ w tym obrocie. Trójkąt $\mathbf{p}_1\mathbf{x}\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'$ jest obrazem $\mathbf{x}$ w rozpatrywanym obrocie, jest równoramienny, kąt między ramionami równy jest $60°$, więc ten trójkąt jest równoboczny. Mamy więc $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_3\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_1\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_2\| = \|\mathbf{x}'-\mathbf{p}_3'\|+\|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_2\|$. Punkt $\mathbf{p}_3'$ jest niezależny od punktu $\mathbf{x}$. Łamana łącząca punkty $\mathbf{p}_3'$ i $\mathbf{p}_2$ ma najmniejszą długość, gdy pokrywa się z odcinkiem $\mathbf{p}_3'\mathbf{p}_2$. Stąd już bez trudu wnioskujemy, że punkt $\mathbf{q}$, w którym suma odległości jest najmniejsza musi leżeć na odcinku $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3'$. Dopracowanie rozwiązania geometrycznego pozostawiamy zainteresowanym czytelnikom. ■

Po tych kilku przykładach sformułujemy i udowodnimy wielowymiarową wersję twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Jest to bardzo ważne twierdzenie, pokazuje ono jak można oszacować zmianę wartości funkcji w zależności od zmiany argumentu.

Twierdzenie 2.52 (Lagrange'a o wartości średniej)
Niech $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie zbioru otwartego $G \subset \mathbb{R}^k$ i niech $\mathbf{p},\mathbf{q} \in G$ będą takimi punktami zbioru G, że odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ jest zawarty

w zbiorze G. Wtedy

$$\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\| \le \sup_{0\le\tau\le 1} \|Df\left((1-\tau)\mathbf{p}+\tau\mathbf{q}\right)\| \cdot \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|\,.$$

Dowód. Niech $g(t)=(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p}))\cdot(f\left((1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\right)-f(\mathbf{p}))$. Ta funkcja jest różniczkowalna na przedziale $[0,1]$, więc można zastosować do niej jednowymiarowe twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Mamy więc $g(1)-g(0)=g'(\tau)(1-0)=g'(\tau)$ dla pewnej liczby $\tau\in(0,1)$. Pochodną funkcji g znajdujemy korzystając z twierdzenia o arytmetycznych własnościach pochodnej i twierdzenia o pochodnej złożenia: $g'(t)=(f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p}))\cdot\big(Df\left((1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\right)\cdot(-\mathbf{p}+\mathbf{q})\big)$. Z dwu ostatnio otrzymanych równości wynika, że dla pewnej liczby $\tau\in(0,1)$ zachodzi

$$\begin{aligned}
&\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|^2=g(1)-g(0)=g'(\tau)=\\
&\quad=\{f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\}\cdot\{Df\left((1-\tau)\mathbf{p}+\tau\mathbf{q}\right)\cdot(-\mathbf{p}+\mathbf{q})\}\le\\
&\qquad\le\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|\cdot\|Df\left((1-\tau)\mathbf{p}+\tau\mathbf{q}\right)\cdot(-\mathbf{p}+\mathbf{q})\|\le\\
&\qquad\quad\le\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|\cdot\|Df\left((1-\tau)\mathbf{p}+\tau\mathbf{q}\right)\|\cdot\|-\mathbf{p}+\mathbf{q}\|
\end{aligned}$$

— skorzystaliśmy z nierówności Schwarza i definicji normy przekształcenia liniowego. Dzieląc ostatnią nierówność przez $\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|$ otrzymujemy

$$\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|\le\|Df\left((1-\tau)\mathbf{p}+\tau\mathbf{q}\right)\|\cdot\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|.$$

Udowodniliśmy więc nawet nieco więcej niż obiecaliśmy. ■

Uwaga 2.53 Niestety jednowymiarowego twierdzenia o wartości średniej nie da się bez zmian przenieść na przypadek wielowymiarowy:

$$\text{jeśli } f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\ \text{to } \mathbf{0}=f(2\pi)-f(0)\ne Df(\tau)(1-0)=Df(\tau)=\begin{pmatrix}-\sin\tau\\ \cos\tau\end{pmatrix}.$$

Zdefiniowanie funkcji g w dowodzie twierdzenia o wartości średniej to naturalny pomysł w kontekście tego, że zamierzaliśmy skorzystać z jednowymiarowego twierdzenia o wartości średniej i mieliśmy oszacować $\|f(\mathbf{q})-f(\mathbf{p})\|$, szacowanie kwadratu może wyglądać nieco dziwnie, ale zazwyczaj łatwiej jest operować kwadratem standardowej normy niż nią samą. ■

Kilka zadań

Zadanie 2.2 Podać przykład funkcji $f\colon A\to\mathbb{R}$ o własnościach: $A\subseteq\mathbb{R}^2$ jest obszarem, tj. zbiorem otwartym, w którym każde dwa punkty można połączyć łamaną; f jest ciągła, ale nie jednostajnie ciągła w A; pochodne cząstkowe f'_x, f'_y istnieją i są funkcjami ograniczonymi w zbiorze A.

Zadanie 2.3 Zbadać, w których punktach płaszczyzny funkcja f jest różniczkowalna: $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+|x-y|}$.

Zadanie 2.4 Zbadać, w których punktach płaszczyzny funkcja f jest różniczkowalna: $f(x,y)=\ln\big(1+|xy|^p\big)$ $(p>0$ stała).

Zadanie 2.5 Zbadać, w których punktach płaszczyzny funkcja f jest różniczkowalna:
$$f(x,y)=\begin{cases}(\mathrm{e}^{xy}-1)/y & \text{gdy } y\neq 0,\\ x & \text{gdy y=0.}\end{cases}$$

Zadanie 2.6 Podać przykłady pokazujące, że w poniższym ciągu (coraz słabszych) warunków żaden warunek nie jest równoważny poprzedniemu (wymiar przestrzeni można w każdym przykładzie wybrać dowolnie); wszędzie zakłada się, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^k$:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_k}$ istnieją w otoczeniu $\mathbf{x}_0$ oraz są ciągłe w punkcie $\mathbf{x}_0$.

(b) Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}_0$.

(c) Pochodna kierunkowa $f'_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_0)$ istnieje dla każdego wektora $\mathbf{w}$ (w $\mathbb{R}^k$) i zależy liniowo od $\mathbf{w}$; ponadto funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{x}_0$.

(d) Pochodna $f'_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_0)$ istnieje dla każdego wektora $\mathbf{w}$ i zależy liniowo od $\mathbf{w}$.

(e) Pochodna $f'_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_0)$ istnieje dla każdego wektora $\mathbf{w}$.

(f) $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_k}$ istnieją w punkcie $\mathbf{x}_0$.

Zadanie 2.7 Zdefiniujmy funkcję $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ wzorami: $f(x,y)=(x+y)^2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, gdy $xy\neq 0$ oraz $f(x,y)=0$, gdy $xy=0$. Znaleźć wszystkie punkty $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, w których funkcja f jest ciągła oraz wszystkie te punkty $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, w których jest ona różniczkowalna.

Zadanie 2.8 Wyznaczyć wszystkie punkty płaszczyzny, w których funkcja f określona wzorem $f(x,y)=\big|e^x-y\big|\cdot\big(e^x-1\big)$ jest różniczkowalna.

Zadanie 2.9 Niech $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$, gdy $x^2+y^2>0$. Dla jakich $\alpha\in\mathbb{R}$ funkcja f jest różniczkowalna?

Zadanie 2.10 Niech $f_\alpha(x,y,z)=\begin{cases}0\,, & \text{gdy } x=y=z=0,\\ \frac{\sin x\cdot\mathrm{tg}\,y\cdot\ln(1+z)}{(x^4-x^2y^2+y^4+z^4)^\alpha}\,, & \text{gdy } x^2+y^2+z^2>0\,.\end{cases}$

a. Dla jakich liczb $\alpha>0$ funkcja f_α jest ciągła?
b. Dla jakich liczb $\alpha>0$ funkcja f_α jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{0}=(0,0,0)$?
c. Dla jakich liczb $\alpha>0$ funkcja f_α jest klasy C^1?

Zadanie 2.11 Niech $\alpha\in(0,\infty)$ i $f_\alpha(x,y)=\begin{cases}0\,, & \text{gdy } x=0=y,\\ \frac{|x|^\alpha y(x^2-y^2)}{x^4-x^2y^2+y^4}\,, & \text{gdy } x\neq 0\text{lub } y\neq 0\,.\end{cases}$
Dla jakich liczb $\alpha>0$ funkcja f_α jest ciągła?
Dla jakich liczb $\alpha>0$ funkcja f_α jest klasy C^1?

Zadanie 2.12 Funkcja $f\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Dla każdego punktu $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ spełniona jest nierówność $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\le\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$. Dla każdej liczby rzeczywistej z zachodzi nierówność $f(0,0,z)\ge 0$. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $u\ge 0$ i z spełniona jest nierówność $f(u,u,z)\ge 0$.

Zadanie 2.13 Znaleźć wszystkie wektory styczne do zbioru A w punkcie $\mathbf{p}$, jeśli $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x(x^2-4y^2)(x-y^3)=0\}$, $\mathbf{p} = \mathbf{0} = (0,0)$.

Zadanie 2.14 Niech $a > 0$. Dowieść, że płaszczyzny styczne do powierzchni

$$\{(x,y,z)\colon \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\}$$

odcinają na osiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest stała.

Zadanie 2.15 Niech $f(x,y) = |e^x - y| \cdot \ln(1+x)$, gdy $x > -1$. Znaleźć wszystkie punkty różniczkowalności funkcji f w półpłaszczyźnie $\{(x,y)\colon \quad x > -1\}$.

Zadanie 2.16 Niech A będzie macierzą wymiaru 2×2 o wyznaczniku różnym od 0 i niech

$$f(\mathbf{x}) = \frac{A\mathbf{x} \cdot \|\mathbf{x}\|^2}{\|A\mathbf{x}\|^2}$$

dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ i niech $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
Wyznaczyć wszystkie punkty płaszczyzny, w których funkcja f jest różniczkowalna.

Zadanie 2.17 Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Dla każdego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ spełniona jest równość $\quad 2y\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
Wykazać, że istnieje taka funkcja $g\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, że równość $f(x,y) = g(x^2+2y^2)$ zachodzi dla dowolnego $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Zadanie 2.18 Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}\sin\sqrt{x^2+y^2} \text{ dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 2.19 Niech $f(x,y) = x^2 + 2y^2(x+1)^3$, $Q_a = \{(x,y)\colon \quad |x| \le a, |y| \le a\}$.
Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad (x,y) \in Q_1\}$ oraz $\inf\{f(x,y)\colon \quad (x,y) \in Q_1\}$.
Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad (x,y) \in Q_2\}$ oraz $\inf\{f(x,y)\colon \quad (x,y) \in Q_2\}$.
Znaleźć $\sup\{f(x,y)\colon \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ oraz $\inf\{f(x,y)\colon \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Zadanie 2.20 Niech $A \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie wypukłym zbiorem zwartym. Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na A, różniczkowalną we wszystkich punktach wewnętrznych zbioru A. Załóżmy ponadto, że istnieją takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$, nie wszystkie równe zeru, że $\sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \le 0$ dla każdego punktu $\mathbf{x} \in \mathrm{int}A$.
Udowodnić, że funkcja $f$osiąga swą wartość maksymalną i swą wartość minimalną w pewnych punktach brzegu zbioru A.

Zadanie 2.21 Obliczyć kresy funkcji $\;f(x,y) = \frac{x-2y}{8+x^2+4y^2}\;$ na zbiorze $\{(x,y)\colon\; y \ge 0\}$.

Zadanie 2.22 Niech $f(x,y) = \frac{x\ln(1+y)}{2x^2+y^2}$.
Obliczyć kres górny funkcji f na zbiorze $A = \{(x,y)\colon \quad 0 < x \le y \le 1\}$.

Zadanie 2.23 Znaleźć takie liczby $x, y \in \mathbb{R}$, że czworościan, którego wierzchołkami są punkty:

$$C=(0,0,0), \qquad A=(4,0,0), \qquad B=(0,3,0) \qquad \text{i} \qquad D=(x,y,1),$$

ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej wśród wszystkich czworościanów o podstawie ABC i wysokości 1 lub wykazać, że taki czworościan nie istnieje.

Zadanie 2.24 Niech $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\quad 1<x^2+y^2+z^2<9\}$ i niech $f\colon P\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie taką funkcją klasy C^1, że dla każdego punktu $(x,y,z)\in P$ zachodzą wszystkie trzy nierówności $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right|\le 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right|\le 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right|\le 1$.
Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą.

Zadanie 2.25 Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, że spełnione są jednocześnie poniższe trzy warunki:
1° f jest klasy C^1w zbiorze $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;
2° f jest ciągła po ograniczeniu do wykresu dowolnego wielomianu $w\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
3° f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 2.26 Obliczyć kresy funkcji $f(x,y)=\dfrac{xe^{-y}\sqrt{y}}{x^2+y}$ na zbiorze
$$\{(x,y)\colon\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}\setminus\{(0,0)\}.$$

Zadanie 2.27 Rozważamy przestrzeń liniową unormowaną X, której elementami są wszystkie funkcje ciągłe $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, a norma jest dana wzorem $\|f\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|f(t)|$. Niech F oznacza funkcję, która każdemu elementowi $f\in X$ przyporządkowuje jego normę: $F(f)=\|f\|$. Dowieść, że funkcja F nie jest różniczkowalna w żadnym „punkcie” $f_0\in X$.

Zadanie 2.28 Funkcja różniczkowalna $f\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ spełnia warunek:
$$\sum_{j=1}^{k}x_j\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})\ge 0 \text{ dla } \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k.$$
Udowodnić, że jest ona ograniczona z dołu.

Zadanie 2.29 Obliczyć kresy funkcji $f(x,y,z)=6xy-3xz-2yz$ na zbiorze
$$\{(x,y,z)\colon\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}.$$

Zadanie 2.30 Niech $\{(x,y)\colon\ 9x\ge 4y\ge 0\}$ i $f(x,y)=\dfrac{x^2ye^{-xy}}{x+1}$. Obliczyć kresy funkcji f na zbiorze A. .

Zadanie 2.31 Niech $f\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $f(x_1,\ldots,x_k)=\det\begin{pmatrix}1&\ldots&1\\ x_1&\ldots&x_k\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_1^{k-1}&\ldots&x_k^{k-1}\end{pmatrix}$.
Uzasadnić różniczkowalność funkcji f.
Niech $\mathbf{w}=[1,\ldots,1]$. Dowieść, że $f'_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})=0$ (pochodna kierunkowa względem wektora $\mathbf{w}$ jest zerem) w każdym punkcie $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$.

Zadanie 2.32 Który przekrój sześcianu płaszczyzną, przechodzącą przez jego środek, ma największe pole

Zadanie 2.33 Czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o własnościach: f jest różniczkowalna w każdym punkcie; f ma dokładnie jeden punkt krytyczny; f ma lokalne ekstremum w tym punkcie; f jest nieograniczona i z góry, i z dołu.

Zadanie 2.34 Wyznaczyć wszystkie punkty, w których funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x_1,\ldots,x_k) = |x_1\cdot\ldots\cdot x_k|$ nie jest różniczkowalna.

Zadanie 2.35 Funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A = \{(x,y)\colon\ x>0,\ y>0\}$, jest w zbiorze A różniczkowalna oraz spełnia w tym zbiorze tożsamościowo równanie $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Wykazać, że ta funkcja ma postać $f(x,y) = \varphi\big(\frac{x^2}{y}\big)$, gdzie φ jest funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.

Zadanie 2.36 Dana jest funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Gradient funkcji f w punkcie $(0,0,0)$ to wektor $[1,2,3]$. Gradient funkcji f w punkcie $(1,1,1)$ to wektor $[-1,-2,-3]$. Funkcja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x,y,z) = f(e^{-x}+y, e^y - z, e^{-z} - x).$$

Obliczyć $g'_{\mathbf{w}}(\mathbf{0})$, tj. pochodną kierunkową funkcji g w punkcie $\mathbf{0} = (0,0,0)$ względem wektora $\mathbf{w} = [2,1,1]$.

Zadanie 2.37 Odwzorowanie ciągłe $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$, różniczkowalne w przedziale $(0,\infty)$, spełnia warunki: $F(0) = \mathbf{0}$ oraz $\|DF(t)\| \le c\cdot\|F(t)\|$ dla pewnej stałej $c>0$ i dla wszystkich $t>0$ (symbol $\|$ po lewej stronie oznacza normę operatora liniowego, zaś po prawej stronie normę euklidesową w $\mathbb{R}^k$). Czy stąd wynika, że $F(t) = \mathbf{0}$ tożsamościowo?

Zadanie 2.38 Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wykazać, że jest ona funkcją jednorodną stopnia n, tzn. $f(t\mathbf{x}) = t^n f(\mathbf{x})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}\cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = nf(\mathbf{x})$ w całej dziedzinie.

Zadanie 2.39 Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna. Oznaczmy $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Niech $z = x+iy$, $i^2 = -1$ oraz $f(z) = u(z) + iv(z)$. Wykazać, że $f'(z) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$ oraz $\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$.

Zadanie 2.40 Wykazać, że funkcja $\overline{z}$ nie jest różniczkowalna w sensie zespolonym.

Zadanie 2.41 Niech $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $|\ |$ oznacza dowolną normę na przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Niech λ oznacza największą z wartości bezwzględnych wartości własnych (niekoniecznie rzeczywistych) przekształcenia L. Wykazać, że $|L| \ge \lambda$.

Zadanie 2.42 Niech $L\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym. Niech λ oznacza największą z wartości bezwzględnych wartości własnych (niekoniecznie rzeczywistych) przekształcenia L. Wykazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje norma $|\ |$ na przestrzeni $\mathbb{R}^k$ taka, że $|L| < \lambda + \varepsilon$.

Zadanie 2.43 Pokazać, że funkcja $f(x,y) = (x-y^2)(3x-y^2)$ po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ ma mimimum lokalne w $(0,0)$. Czy f ma minimum lokalne w $(0,0)$?

Zadanie 2.44 Pokazać, że niżej zdefiniowana funkcja jest różniczkowalna w $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zadanie 2.45 Pokazać, że funkcja $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ nie jest różniczkowalna w $(0,0)$, chociaż istnieją obie pochodne cząstkowe w tym punkcie.

Zadanie 2.46 Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

(a) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$, dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, (b) $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$,

(c) $f(x,y,z) = e^x \sin y + e^y \sin(2z) + e^z \sin(3x)$, (d) $f(x,y) = e^{-x^2-2xy+4}$,

(e) $f(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$, dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, gdzie $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$.

Zadanie 2.47 Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu funkcji f, czyli jej gradient, w punkcie P dla:
(a) $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$, $P = (1,-2)$; (b) $f(x,y,z) = \sqrt{xy^2z^3}$, $P = (2,2,2)$;
(c) $f(x,y,z) = e^{x-y-z}$, $P = (5,2,3)$; (d) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $P = (1,1,1)$.

Zadanie 2.48 Znaleźć równanie płaszczyzny (lub prostej) stycznej do powierzchni $f(x,y,z) = 0$ (odpowiednio do krzywej $f(x,y) = 0$) w punkcie P gdy:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} - 1$; $P = (1,-1,1)$,

(b) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^3 + xyz - 14$; $P = (5,-2,3)$,

(c) $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 19$; $P = (2,-3)$.

Zadanie 2.49 Niech D będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych określonych na $\mathbb{R}^3$ o wartościach rzeczywistych. Niech $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^3$ będą dowolnymi punktami. Wykazać, że

$$\|x_0 - y_0\| = \sup_{f\in D} \left(\inf \left\{ \frac{f(x_0) - f(y_0)}{\|\text{grad}\, f(z)\|} : \quad z \in \mathbb{R}^3 \right\} \right) .$$

Zadanie 2.50 Pokazać, że niżej zdefiniowana funkcja nie jest różniczkowalna w $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

chociaż ma obie pochodne cząstkowe w tym punkcie. Pokazać, że pochodna kierunkowa $f'_v(0,0)$ istnieje dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$ a funkcja $\mathbb{R}^2 \ni v \to f'_v(0,0) \in \mathbb{R}$ nie jest liniowa!

Zadanie 2.51 Niech $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $D = ac - b^2$. Wykazać, że

(a) jeśli $D > 0$ i $a > 0$, to $0 = f(0,0) < f(x,y))$ dla dowolnego punktu $(x,y) \neq (0,0)$;

(b) jeśli $D > 0$ i $a < 0$, to $0 = f(0,0) > f(x,y)$ dla dowolnego punktu $(x,y) \neq (0,0)$;

(c) jeśli $D < 0$, to funkcja f jest nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu, nie ma też w punkcie $(0,0)$ lokalnego ekstremum;

(d) jeśli $D = 0$ i przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest różna od 0, to istnieją takie liczby $\alpha \neq 0, \beta, \gamma$, że $\beta^2 + \gamma^2 > 0$ i dla dowolnego punktu (x,y) zachodzi równość $f(x,y) = \alpha(\beta x + \gamma y)^2$ — w tym przypadku f ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum niewłaściwe, tj. wartość $f(0,0) = 0$ jest przyjmowana w dowolnym otoczeniu punktu $(0,0)$ nie tylko w tym punkcie, ale również w nieskończenie wielu innych punktach.

Zadanie 2.52 Mówimy, że punkt $p \in A$ jest punktem ekstremalnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy *nie istnieją* punkty $x, y \in A$ takie, że $p = \frac{x+y}{2}$ i $x \neq p \neq y$. Znaleźć punkty ekstremalne zbioru A, jeśli $A =$
$\{(x,y)\colon\ y \geq |x|\}$; $\{(x,y)\colon\ y \leq |x|\}$; $\{(x,y)\colon\ y = |x|\}$;
$\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$; $\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$; $\{(x,y)\colon\ |x| \leq y \leq 2 - |x|\}$.

Zadanie 2.53 Niech $A \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem wypukłym i zwartym a $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ niech oznacza funkcję ciągłą. Wykazać, że

(a) jeśli f jest liniowa, to istnieją punkty ekstremalne p, q zbioru A takie, że dla każdego punktu $x \in A$ zachodzi nierówność $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ (nie twierdzimy, że p jest *jedynym* punktem, w którym f osiąga kres- dolny!);

(b) jeśli f jest wypukła, to f osiąga swój kres górny w pewnym punkcie ekstremalnym zbioru A (być może również w innych punktach);

(c) jeśli f jest ściśle wypukła, to osiąga swój kres dolny w dokładnie jednym punkcie (niekoniecznie ekstremalnym).

Uwaga: twierdzenie prawdziwe jest również w R^k dla $k \geq 2$.

Zadanie 2.54 Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji f na zbiorze E, jeśli

(a) $f(x,y) = xy - x - y + 3$, E to trójkąt domknięty o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $E = \{(x,y)\colon\ |x| + |y| \leq 1\}$;

(c) $f(x,y) = xy^2$, $E = \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 3\}$;

(d) $f(x,y) = (1 + x^2)e^{-x^2 - y^2}$, $E = \mathbb{R}^2$;

(e) $f(x,y,z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$, $E = \{(x,y,z)\colon\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.