AM 2, Funkcje wielu zmiennych — ciągłość

Ostatnio poprawiłem 6 grudnia 2014 r.
Duża część zadań pochodzi od dr Marcina Kuczmy

Do tej pory zajmowaliśmy się funkcjami jednej zmiennej. W wielu zagadnieniach występują wielkości zależne od wielu czynników, co prowadzi do rozpatrywania funkcji więcej niż jednej zmiennej. W miejsce jednego argumentu, czyli jednej zmiennej rzeczywistej pojawia się ich wiele. Okazuje się, że wygodnie jest traktować pary liczb rzeczywistych jako punkty płaszczyzny (na której ustalony został układ współrzędnych prostokątnych). Analogicznie trójki liczb rzeczywistych traktujemy jako punkty przestrzeni trójwymiarowej, w której został ustalony układ współrzędnych prostokątnych. To podejście jest tak wygodne, że przenosimy je na przestrzenie o większej liczbie wymiarów. I tak: czwórki liczb rzeczywistych tworzą przestrzeń czterowymiarową, piątki — przestrzeń pięciowymiarową, itd.

Definicja 1.2. (**k–wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej**[1])
k wymiarową przestrzenią kartezjańską nazywamy zbiór wszystkich k–elementowych ciągów liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Oznaczamy ją symbolem $\mathbb{R}^k$. Piszemy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, tzn. gdy $\mathbf{x}$ jest k–elementowym ciągiem liczb rzeczywistych. Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^k$ nazywamy punktami przestrzeni k–wymiarowej lub wektorami.[2] ■

Definicja 1.3. (standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^k$)
Iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{x} = =(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ oraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ nazywamy liczbę $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k$, oznaczamy ją symbolem $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.[3] ■

Twierdzenie 1.4. (o podstawowych własnościach iloczynu skalarnego)

a. dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ — iloczyn skalarny jest przemienny,

b. dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ — iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania wektorów,

c. dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, przy czym $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — iloczyn skalarny jest dodatnio określony .

d. dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ i dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ — iloczyn skalarny jest jednorodny. ■

Twierdzenie to wynika natychmiast z elementarnych własności liczb rzeczywistych, jego krótki dowód pozostawiamy czytelnikom w charakterze bardzo prostego ćwiczenia.

---

[1] lub euklidesowej

[2] W tym drugim przypadku myślimy o wektorze, którego początkiem jest punkt $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, a końcem – interesujący nas punkt.

[3] Stosowane są też oznaczenia $(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$ oraz $< \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} >$.

Uwaga 1.5. Jeśli V jest przestrzenią liniową, a $B\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją spełniającą warunki a,b,c,d twierdzenia o podstawowych własnościach iloczynu skalarnego, to B jest nazywana iloczynem skalarnym w V. Czytelnik zauważy, że jeśli A jest dodatnio określoną macierzą wymiaru $k \times k$ oraz $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$, to B jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^k$. W chwili wolnej od innych zajęć może też wykazać, że innych iloczynów skalarnych w $\mathbb{R}^k$ nie ma. ■

Definicja 1.6. (normy indukowanej przez iloczyn skalarny)
Liczbę $\|\mathbf{x}\| = =\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ nazywamy normą (euklidesową) wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ indukowaną przez iloczyn skalarny $\cdot$. ■

Twierdzenie 1.7. (o podstawowych własnościach normy)

a. dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ – nierówność trójkąta,

b. dla dowolnego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ i dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\|t\mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|$ – jednorodność normy,

c. dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność $\|\mathbf{x}\| \ge 0$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy , gdy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

d. dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność Schwarza: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \ge 0$ taka, że $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ lub $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$, tzn. gdy wektory $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{y}$ są *zgodnie równoległe*.

Dowód. Nierówność Schwarza została wykazana w zeszłym roku. Z podanego wtedy dowodu wynika również, że równość ma miejsce jedynie w przypadku zgodnej równoległości wektorów. Części **b.** i **c.** wynikają wprost z definicji normy. Trzeba jeszcze wykazać nierówność trójkąta. Mamy
$$(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 - \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) =$$
$$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) = 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \ge 0$$
— ostatnia nierówność jest wynika bezpośrednio z nierówności Schwarza. Zakończyliśmy dowód. ■

Przypomnijmy jeszcze, że iloczyn skalarny wektorów na płaszczyźnie lub w przestrzeni trójwymiarowej to po prostu iloczyn ich norm, czyli długości tych wektorów, i kosinusa kąta jaki tworzą. Osoby nie znające tego twierdzenia mogą posłużyć się twierdzeniem kosinusów dla udowodnienia go, np. w dwóch wymiarach. Jeśli rozszerzymy tę interpretację na przestrzenie o większej liczbie wymiarów, to wtedy nierówność Schwarza oznaczać będzie po prostu, że wartość kosinusa kąta między wektorami jest mniejsza lub równa 1, przy czym wartość 1 jest osiągana jedynie wtedy, gdy kosinus kąta między wektorami równy jest 1, czyli gdy kąt między wektorami równy jest 0. Podkreślić wypada jednak, że to tylko sugestia, że tak powinno być, a nie dowód, że tak jest, bo przecież geometrią klasyczną (syntetyczną) w przestrzeni o wymiarze większym niż 3 do tej pory Państwo się nie zajmowali. W istocie rzeczy w tym rozdziale definiujemy pewne niezbędne nam w dalszym ciągu pojęcia. Interpretacje geometryczne pozwalają na rozumowania analogiczne do przeprowadzanych w wymiarze 3, a tego rodzaju analogie powinny ułatwiać zrozumienie definicji, twierdzeń i ich dowodów. Nie należy ich unikać, lecz stosować rozsądnie, by nie przesadzić z analogiami — nie wszystkie twierdzenia są zgodne z intuicją.

Używane są też inne normy, np. $\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_k|^p\right)^{1/p}$, $1 \le p \le +\infty$. Dla $p = +\infty$ mamy do czynienia z $\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\} = \lim\limits_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$. My używać będziemy na ogół normy standardowej, czyli $\|\ \ \|_2$.

Zadanie 1.1. *Dowieść, że dla każdego $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ funkcja $p \longrightarrow \|\boldsymbol{x}\|_p$ jest ściśle monotoniczna.* ■

Zadanie 1.2. *Wykazać, że dla każdego $p \geq 1$ funkcja $\boldsymbol{x} \to \|\boldsymbol{x}\|_p$ jest normą, tzn. spełnia warunki* **a, b, c** *definicji normy. Czy jest jakiś odpowiednik warunku* **d***?* ■

Uwaga 1.8. Normą w przestrzeni wektorowej V nazywamy dowolną funkcję **n**, która spełnia warunki **a** — **c** twierdzenia o podstawowych własnościach normy. ■

Twierdzenie 1.9. (kuli k–wymiarowej)
Kulą otwartą o środku **p** i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k: \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\},$$

kulą domkniętą o środku **p** i promieniu $r > 0$ – zbiór

$$\overline{B}(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k: \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \le r\}. \ ■$$

Jasne jest, że jednowymiarową kulą otwartą o środku w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$ i promieniu $r > 0$ jest przedział o środku w punkcie **p** i długości $2r$. Jednowymiarowa kula domknięta o środku w punkcie **p** i promieniu $r > 0$ to po prostu przedział domknięty o środku w punkcie **p** i długości $2r$. W tym wymiarze kula domknięta różni się od otwartej (o tym samym środku i promieniu) jedynie dwoma punktami. Jasne jest, że dwuwymiarową kulą otwartą o środku $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ i promieniu $r > 0$ jest koło o środku **p** i promieniu r, jednak bez punktów „brzegowych", tj. bez punktów, których odległość od **p** równa jest dokładnie r. Kula domknięta o środku **p** i promieniu $r > 0$ to koło z „brzegiem" o środku **p** i promieniu r. Trójwymiarowa kula otwarta to po prostu kula bez punktów brzegowych, a kula domknięta to kula z punktami brzegowymi. Widać więc, że te nazwy motywowane są terminologią stosowaną w przypadku przestrzeni trójwymiarowej. Mimo, że może się komuś wydawać śmiesznym nazywanie przedziału kulą, to jednak warto zapłacić taką cenę za jednolitą terminologię stosowaną w odniesieniu do przestrzeni różnych wymiarów. Ułatwia to formułowanie zarówno twierdzeń jak i ich dowodów.

Definicja 1.10. (zbioru otwartego w $\mathbb{R}^k$)
Zbiór G nazywamy otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in G$ istnieje liczba dodatnia r taka, że $B(\mathbf{p}, r) \subseteq G$. ■

Jasne jest, że cała przestrzeń k–wymiarowa jest zbiorem otwartym, w tym konkretnym przypadku można przyjąć np. $r = 1831$. Również zbiór pusty jest otwarty. Wynika to stąd, że jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy (czyli $\mathbf{p} \in \emptyset$), to z tej nieprawdy już wszystko wynika, w szczególności istnienie liczby $r > 0$. Również k–wymiarowa kula otwarta w przestrzeni k–wymiarowej jest zbiorem otwartym: jeśli $\mathbf{q} \in B(\mathbf{p}, r)$, to przyjmując $\varrho = r - \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$, otrzymujemy $B(\mathbf{q}, \varrho) \subseteq B(\mathbf{p}, r)$, bo jeśli $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| < \varrho$, to $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \varrho + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = r$. Z tego ostatniego zdania wynika, że przedział otwarty jest otwartym podzbiorem prostej. Natomiast odcinek bez końców otwartym podzbiorem płaszczyzny **nie** jest, bo przecież żaden jego punkt nie jest środkiem dwuwymiarowej kuli, czyli koła zawartego w tym odcinku — odcinek w ogóle żadnego koła nie zawiera. Widzimy więc, że to czy zbiór jest otwarty, czy też nie, zależy nie tylko od samego zbioru, lecz również od tego z jakiego punktu widzenia jest on rozpatrywany (szczegóły na topologii)! Czytelnik sprawdzi bez trudu, że płaszczyzna bez jednego punktu, płaszczyzna bez skończenie wielu punktów, płaszczyzna bez skończenie wielu prostych są otwartymi podzbiorami płaszczyzny. Trójkąt otwartym podzbiorem płaszczyzny nie jest, bo żadne koło o środku w punkcie leżącym na boku trójkąta zawarte w trójkącie nie jest. Natomiast trójkąt bez boków i wierzchołków jest zbiorem otwartym, bo każdy punkt nie leżący na boku trójkąta jest środkiem koła zawartego w trójkącie bez boków. Podobnie kwadrat nie jest otwartym podzbiorem płaszczyzny, ale staje się otwarty po usunięciu boków wraz z wierzchołkami. Analogiczne przykłady można rozważyć w przestrzeni trójwymiarowej, co pozostawiamy czytelnikom w charakterze prostego ćwiczenia.

Twierdzenie 1.11. (o podstawowych własnościach zbiorów otwartych)

a. Suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

b. Część wspólna skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód. Załóżmy, że zbiory G_i są otwarte dla każdego $i \in I$, I oznacza tu dowolny zbiór (być może nieskończony). Jeśli $\mathbf{p} \in \bigcup_{i \in I} G_i$, to oczywiście $\mathbf{p} \in G_j$ dla *pewnego* numeru $j \in I$. Ponieważ zbiór G_j jest otwarty więc istnieje liczba $r > 0$ taka, że $B(p, r) \subseteq G_j$, ale wobec tego również $B(\mathbf{p}, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. To kończy dowód części **a**. Załóżmy teraz, że zbiory G_1, G_2,. . . ,G_n są otwarte i niech $\mathbf{p}$ będzie ich punktem wspólnym. Istnieją wtedy liczby r_1, r_2,. . . ,r_n takie, że $B(\mathbf{p}, r_i) \subseteq G_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech r oznacza najmniejszą z liczb r_1, r_2, . . . ,r_n. Oczywiście $r > 0$ i $B(\mathbf{p}, r) \subseteq B(\mathbf{p}, r_i) \subset G_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wobec tego $B(\mathbf{p}, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Wykazaliśmy więc, że jeśli $\mathbf{p}$ należy do wszystkich zbiorów G_1, G_2,. . . , G_n, to pewna kula o środku w punkcie $\mathbf{p}$ jest zawarta w zbiorze $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$, a to oznacza, że ten ostatni zbiór jest otwarty. Dowód został zakończony. ■

Wypada od razu zwrócić uwagę na to, że $\{\mathbf{p}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{p}, \frac{1}{n})$, zatem część wspólna nieskończenie wielu zbiorów otwartych zbiorem otwartym być nie musi! Dowód otwartości części wspólnej skończonej liczby zbiorów otwartych zaczęliśmy od wyboru najmniejszego spośród skończenie wielu promieni, w przypadku nieskończonej ich liczby najmniejszego promienia może nie być i, co więcej, kres dolny zbioru wszystkich promieni może być równy 0, dokładnie tak, jak to ma miejsce w podanym przykładzie.

Definicja 1.12. *(***zbioru domkniętego w przestrzeni $\mathbb{R}^k$**)
Zbiór $F \subseteq \mathbb{R}^k$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $R^k \setminus F$ jest otwarty. ■

Podane poprzednio przykłady zbiorów otwartych dają od razu przykłady zbiorów domkniętych: z tego, że cała przestrzeń $\mathbb{R}^k$ jest zbiorem otwartym wnioskujemy natychmiast, że zbiór pusty jest domknięty. Z tego, że zbiór pusty jest otwarty wynika, że cała przestrzeń jest zbiorem domkniętym. Ponieważ kula otwarta jest zbiorem otwartym, więc dopełnienie kuli otwartej jest zbiorem domkniętym. Zbiory skończone są domknięte, prosta jest podzbiorem domkniętym płaszczyzny, przestrzeni trójwymiarowej. Jasne jest też, że k–wymiarowa kula domknięta jest podzbiorem domkniętym przestrzeni $\mathbb{R}^k$. To stwierdzenie uzasadnimy. Niech $\mathbf{q} \notin \overline{B}(\mathbf{p}, r)$, tzn. $\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| > r$. Niech $\varrho = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| - r$. Oczywiście $\varrho > 0$. Niech $\mathbf{x} \in B(\mathbf{q}, \varrho)$, tzn. $\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\| < \varrho = \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| - r$. Stąd wynika, że $r < \|\mathbf{q}-\mathbf{p}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$, co oznacza, że $\mathbf{x} \notin \overline{B}(\mathbf{p}, r)$, a więc $B(\mathbf{q}, \varrho) \cap \overline{B}(\mathbf{p}, r) = \emptyset$. Wykazaliśmy więc, że kula $B(\mathbf{q}, \varrho)$ jest zawarta w dopełnieniu kuli $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$, a ponieważ $\mathbf{q}$ oznacza tu dowolny punkt dopełnienia kuli $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$, więc dopełnienie to jest otwarte, zatem sama kula $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^k$.

Twierdzenie 1.13. (o podstawowych własnościach zbiorów domkniętych)

a. Część wspólna dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

b. Suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Twierdzenie to wynika natychmiast z podobnego twierdzenia o zbiorach otwartych i praw de Morgana: dopełnienie części wspólnej zbiorów $\{F_t\}_{t\in T}$ jest równe sumie dopełnień tych zbiorów, czyli zachodzi równość: $\mathbb{R}^k \setminus \bigcap\limits_{t\in T} F_t = \bigcup\limits_{t\in T} \left(\mathbb{R}^k \setminus F_t\right)$. Analogicznie $\mathbb{R}^k \setminus \bigcup\limits_{t\in T} F_t = \bigcap\limits_{t\in T} \left(\mathbb{R}^k \setminus F_t\right)$, czyli dopełnienie sumy równe jest części wspólnej dopełnień sumowanych zbiorów. ■

Zbiory otwarte mają swoją charakteryzację „wewnętrzną” – nie ma konieczności badania dopełnienia zbioru. W podobny sposób można scharakteryzować zbiory domknięte. Przyda się nam do tego pojęcie granicy ciągu punktów.

Definicja 1.14. *(***granicy ciągu punktów przestrzeni euklidesowej**)
Ciąg $(\mathbf{p}_n)$ jest zbieżny do granicy $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$. ■

Widać, że definicja ta różni się od definicji ciągu liczbowego bardzo nieznacznie: w przypadku ciągu wystąpiła wartość bezwzględna różnicy wyrazu ciągu i granicy, w przypadku ciągu punktów przestrzeni mówimy o odległości wyrazu ciągu od granicy. Widać wyraźnie, że różnica między obydwiema definicjami jest raczej kosmetyczna niż merytoryczna — jeśli o liczbach myślimy jak o punktach prostej, to wartość bezwzględna ich różnicy jest odległością tych punktów.

Twierdzenie 1.15. *(***charakteryzujace zbiory domknięte***)*
Zbiór F jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy z tego że punkty $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, ... należą do zbioru F oraz $\mathbf{p} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n$ wynika, że również $\mathbf{p} \in F$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że zbiór F jest domknięty, czyli że zbiór $\mathbb{R}^k \setminus F$ jest otwarty. Niech $\mathbf{p} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n$ i niech punkty ciągu $(\mathbf{p}_n)$ należą do zbioru F. Jeśli $\mathbf{p} \notin F$, to ponieważ zbiór $\mathbb{R}^k \setminus F$ jest otwarty, więc istnieje tala liczba $r > 0$, że $B(\mathbf{p}, r) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus F$. Wobec tego w kuli $B(\mathbf{p}, r)$ nie ma punktów ciągu $(\mathbf{p}_n)$, bo one leżą w zbiorze F, a to oznacza, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| \geq r$, wbrew temu, że $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$.

Załóżmy teraz, że zbiór F spełnia warunek opisany w treści zadania i nie jest domknięty, tzn. jego dopełnienie nie jest otwarte. Istnieje więc punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k \setminus F$ taki, że żadna kula o środku $\mathbf{p}$ nie jest zawarta w zbiorze $\mathbb{R}^k \setminus F$. Niech $\mathbf{p}_n \in B(\mathbf{p}, \frac{1}{n}) \cap F$. Mamy więc $\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| < \frac{1}{n}$, zatem $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| = 0$, czyli $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}$ i wobec tego musi też być $\mathbf{p} \in F$, wbrew uczynionemu założeniu. Dowód został zakończony. ■

Z twierdzenia tego wynika natychmiast, że np. zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie jest domknięty. Mamy bowiem $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}, 0) = (0,0) \notin \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, chociaż $(\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. W taki sam sposób można wykazać, że zbiór Q złożony ze wszystkich liczb wymiernych nie jest domkniętym podzbiorem prostej: każda liczba niewymierna jest granicą ciągu liczb wymiernych. Zauważmy, że zbiór ten nie jest również otwarty, bo każda liczba wymierna może być przedstawiona jako granica ciągu liczb niewymiernych. Widzieliśmy więc, że istnieją zbiory, które są jednocześnie otwarte i domknięte ($\mathbb{R}^k$ i $\emptyset$), istnieją też zbiory, które nie są ani otwarte ani domknięte!

Twierdzenie 1.16. *(***charakteryzujące zbieżność ciągów w*** $\mathbb{R}^k$*)*
Ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów przestrzeni k–wymiarowej jest zbieżny do punktu $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} p_{i,n} = p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, tu $\mathbf{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{k,n})$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

Dowód. Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ zachodzi nierówność:

$$|p_{i,n} - p_i| \leq \sqrt{|p_{1,n} - p_1|^2 + |p_{2,n} - p_2|^2 + \cdots + |p_{k,n} - p_k|^2} = \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\|,$$

z której wynika od razu, że jeśli $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}$, to $\lim_{n\to\infty} p_{i,n} = p_i$ dla każdego numeru $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. W drugą stronę twierdzenie wynika natychmiast z definicji odległości: pod pierwiastkiem jest k składników i każdy z nich dąży do 0, co jest treścią założenia. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie to pozwala w istocie rzeczy sprowadzać badanie zbieżności ciągu punktów przestrzeni k–wymiarowej do badania zbieżności k ciągów liczbowych.

W teorii funkcji jednej zmiennej bardzo ważnym narzędziem było twierdzenie Bolzano–Weierstrassa. Pozwalało ono wybierać podciągi zbieżne z ciągów ograniczonych. Twierdzenie to pozostaje w mocy w przypadku wielowymiarowym. Przed sformułowaniem tego twierdzenia wypada powiedzieć, że ciąg (zbiór) nazywamy ograniczonym, jeśli wszystkie jego wyrazy (elementy) znajdują się w pewnej kuli. Przypomnijmy, że w jednowymiarowym przypadku kulami są przedziały, więc ta definicja to po prostu rozszerzenie definicji stosowanej w przypadku jednowymiarowym. Warto od razu zauważyć, że jeśli ciąg punktów przestrzeni $\mathbb{R}^k$ jest ograniczony, to również ciągi liczbowe: utworzony z jego pierwszych współrzędnych, utworzony z drugich współrzędnych itd. są ograniczone. Czytelnik bez trudu stwierdzi, że jeśli wszystkie ciągi utworzone ze współrzędnych o ustalonym numerze są ograniczone, to również ciąg punktów przestrzeni k–wymiarowej jest ograniczony.

Twierdzenie 1.17. *(***Bolzano–Weierstrassa, przypadek wielowymiarowy)**
Z każdego ograniczonego ciągu $(\mathbf{p}_n)$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^k$ można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$, tzn. istnieje ściśle rosnący ciąg (n_j) liczb naturalnych taki, że zachodzi równość $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{p}_{n_j} = \mathbf{p}$.

Dowód.[4] Z poprzedniego twierdzenia wynika, że trzeba wybrać ciąg (n_j) w taki sposób, by wszystkie ciągi $\big(p_{1,n_j}\big)$, $\big(p_{2,n_j}\big)$, $\ldots$, $\big(p_{k,n_j}\big)$ były zbieżne. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa jest prawdziwe dla ciągów liczbowych, zatem istnieje ciąg (n_j) taki, że ciąg (p_{1,n_j}) jest zbieżny, ale nie wiemy nic o następnych $k-1$ ciągach: (p_{2,n_j}), (p_{3,n_j}), itd. Możemy jednak skorzystać z tego, że wszystkie podciągi ciągu zbieżnego też są zbieżne i to do tej samej granicy. Zastąpimy więc ciąg wyjściowy $(\mathbf{p}_n)$ ciągiem $(\mathbf{p}_{n_j})$ (więc pierwsze współrzędne tworzą ciąg zbieżny) i z tego ciągu wybierzemy podciąg $(\mathbf{p}_{n'_j})$ w taki sposób, by ciąg (p_{2,n'_j}) był zbieżny. Jest to możliwe, bo ciąg (p_{2,n_j}) jest ograniczony, więc możemy zastosować jednowymiarowe twierdzenie Bolzano–Weierstrassa. Uzyskamy więc w ten sposób ciąg $(\mathbf{p}_{n'_j})$, którego pierwsze i drugie współrzędne tworzą ciągi zbieżne.[5] Wystarczy tę procedurę zastosować jeszcze kolejno $k-2$ razy, by uzyskać podciąg, którego wszystkie współrzędne: pierwsze, drugie, itd. tworzą ciągi zbieżne, dzięki czemu również sam podciąg jest zbieżny. Dowód został zakończony. ■

Podamy teraz jedną z najważniejszych definicji tej części wykładu.

Twierdzenie 1.18. (zbioru zwartego)
Zbiór C nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu punktów zbioru C można wybrać podciąg zbieżny do punktu leżącego w zbiorze C. ■

Zbiory zwarte mogą być definiowane w taki sposób w nieco ogólniejszej sytuacji niż rozpatrywana przez nas, mogą to być mianowicie podzbiory przestrzeni metrycznych. Podamy teraz twierdzenie, które w ogólnej sytuacji nie jest prawdziwe, ale jest prawdziwe i bardzo użyteczne w przypadku tych zbiorów, którymi zajmować się będziemy na analizie.

Twierdzenie 1.19. (charakteryzujące zbiory zwarte w przestrzeni $\mathbb{R}^k$)
Zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^k$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód. Załóżmy, że zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^k$ jest zwarty. Jeśli C nie jest ograniczony, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje punkt $\mathbf{p}_n \in C$ taki, że $\mathbf{p}_n \notin B(\mathbf{0}, n)$, czyli $\|\mathbf{p}_n\| \geq n$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, więc z ciągu $(\mathbf{p}_n)$ wybrać można podciąg

[4] Warto porównać z dowodem twierdzenia Arzeli–Ascoliego z zeszłego roku.
[5] Pierwsze – bo podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny, drugie – bo tak wybieramy.

zbieżny $(\mathbf{p}_{n_j})$ do pewnego punktu $\mathbf{p} \in C$. Stąd wynika, że ciąg $\big(\|\mathbf{p}_{n_j} - \mathbf{p}\|\big)$ jest zbieżny do 0, więc jest ograniczony. Zachodzi nierówność $\|\mathbf{p}_{n_j}\| \leq \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{p}_{n_j} - \mathbf{p}\|$, a z niej i z poprzedniego zdania wynika, że ciąg $\big(\mathbf{p}_{n_j}\big)$ jest ograniczony, co oczywiście przeczy temu, że $\|\mathbf{p}_{n_j}\| \geq n_j$. Wykazaliśmy więc, że podzbiór zwarty przestrzeni $\mathbb{R}^k$ musi być ograniczony. Teraz udowodnimy, że musi być również domknięty. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje ciąg $(\mathbf{p}_n)$ punktów zbioru C zbieżny do punktu $\mathbf{p} \notin C$. Wszystkie podciągi ciągu $(\mathbf{p}_n)$ są oczywiście zbieżne do punktu $\mathbf{p}$, więc nie można wybrać z tego ciągu podciągu, którego granica należałaby do C. Wobec tego podzbiór zwarty przestrzeni $\mathbb{R}^k$ musi być też domknięty.

Czas na dowód implikacji przeciwnej. Zakładamy teraz, że zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^k$ jest domknięty i ograniczony. Niech $(\mathbf{p}_n)$ będzie ciągiem punktów zbioru C. Na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa można zeń wybrać podciąg $(\mathbf{p}_{n_j})$ zbieżny do pewnego punktu $\mathbf{p}$. Ponieważ zbiór C jest domknięty a wyrazy ciągu $(\mathbf{p}_{n_j})$ są elementami zbioru **domkniętego** C, więc również jego granica, czyli punkt $\mathbf{p}$, jest elementem zbioru C. Wykazaliśmy więc, że z ciągu punktów zbioru C można wybrać podciąg zbieżny do punktu leżącego w zbiorze C, a to oznacza, że C jest zbiorem zwartym. Dowód został zakończony. ■

Interesują nas nie tylko zbiory, ale również funkcje, w tym funkcje ciągłe. Definicja ciągowa (Heinego) ciągłości funkcji przenosi się na przypadek wielowymiarowy bez żadnych zmian.

Definicja 1.20. (**ciągowa**) Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^k$ i $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest funkcją określoną na zbiorze A, to f jest ciągła w punkcie $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_n \in A$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{p}_n) = f(\mathbf{p})$. ■

Można również przeformułować definicję otoczeniową (Cauchy'ego).

Definicja 1.21. (**otoczeniowa**) Funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{p} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $\mathbf{q} \in A$ i $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \delta$, to $\|f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})\| < \varepsilon$. ■

Ponieważ definicje te nie różnią się od podawanych w przypadku jednowymiarowym, więc dowód ich równoważności pomijamy, zresztą nie różni się on od dowodu w przypadku jednowymiarowym niczym istotnym. Dzięki twierdzeniu Bolzano–Weierstrassa pozostaje też w mocy

Twierdzenie 1.22. (Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą) Jeśli $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru zwartego $C \subseteq \mathbb{R}^k$, to istnieją takie punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in C$, że dla każdego punktu $\mathbf{x} \in C$ zachodzi nierówność podwójna $f(\mathbf{p}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{q})$, czyli liczba $f(\mathbf{p})$ jest najmniejszą wartością funkcji f zaś liczba $f(\mathbf{q})$ — największą. ■

Twierdzenie o osiąganiu kresów można sformułować w nieco ogólniejszej wersji:

Twierdzenie 1.23. (Weierstrassa o obrazie ciągłym zbioru zwartego) Jeśli $C \subseteq \mathbb{R}^k$ jest zbiorem zwartym a $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}^l$ funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru C, to zbiór $f(C)$ złożony z wartości funkcji f, czyli punktów postaci $f(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{x} \in C$ jest zwarty.

Dowód. Niech $\mathbf{y}_n \in f(C)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponieważ $\mathbf{y}_n$ jest wartością funkcji f, więc istnieje punkt $\mathbf{x}_n \in C$ taki, że $\mathbf{y}_n = f(\mathbf{x}_n)$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, więc z ciągu $(\mathbf{x}_n)$ można wybrać podciąg $(\mathbf{x}_{n_j})$ zbieżny do pewnego punktu $\mathbf{p} \in C$. Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru C, również w punkcie $\mathbf{p}$. Wobec tego $f(\mathbf{p}) = \lim\limits_{j\to\infty} f(\mathbf{x}_{n_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{y}_{n_j}$. Wybraliśmy więc z ciągu $(\mathbf{y}_n)$ podciąg zbieżny do granicy $f(\mathbf{p}) \in f(C)$. Tym samym wykazaliśmy, że zbiór $f(C)$ jest zwarty. ■

Zachęcamy Czytelnika do wywnioskowania twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów z twierdzenia o obrazie ciągłym zbioru zwartego. Może przydać się charakteryzacja podzbiorów zwartych prostej. Można myśleć, że zbiory zwarte mają być uogólnieniem przedziału domkniętego. Najważniejsze z naszego punktu widzenia twierdzenia, twierdzenie Weiertrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą i twierdzenia Cantora–Heinego o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej, pozostają w mocy.

Scharakteryzujemy zbiory, na których funkcje ciągłe mają własność przyjmowania wartości pośrednich. Takie zbiory powinny się składać „z jednego kawałka" (jak przedział). Oczywiście nie możemy pozostawić określenia na tym poziomie precyzji. Zdefiniujemy tzw. zbiory spójne – to właśnie one mają być złożone z jednego kawałka, niespójne mają składać się z co najmniej dwóch („oddalonych") kawałków – części.

Twierdzenie 1.24. (zbioru niespójnego)
Zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^k$ nazywamy niespójnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa zbiory otwarte G i H takie, że $G \cap C \neq \emptyset$, $H \cap C \neq \emptyset$, $G \cap C \cap H = \emptyset$ i wreszcie $G \cup H \supseteq C$. ■

Zbiory $G \cap C$, $H \cap C$ są otwartymi podzbiorami przestrzeni metrycznej C. Ponieważ dopełniają się wzajemnie do C, więc są również domkniętymi podzbiorami przestrzeni metrycznej C. Zbiór C jest więc niespójny, gdy traktowany jako przestrzeń metryczna jest sumą dwóch niepustych zbiorów otwartych rozłącznych lub, co na jedno wychodzi, domkniętych.

Twierdzenie 1.25. (zbioru spójnego)
Zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^k$ nazywamy spójnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest on niespójny. ■

Tymi kawałkami (oddalonymi), o których mówiliśmy przed definicją zbioru niespójnego mają być oczywiście zbiory $G \cap C$ oraz $H \cap C$. Istotą rzeczy jest otwartość zbiorów G i H. Dla nas podstawowym przykładem zbioru spójnego okaże się zbiór, którego każde dwa punkty można połączyć łamaną w nim zawartą (istnieje wiele innych). Odpowiednie twierdzenie pojawi się niżej.

Przypomnijmy, że zbiór $\{(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}\colon \quad t \in [0,1]\} = \{\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})\colon \quad t \in [0,1]\}$ nazywamy odcinkiem (domkniętym) o końcach $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$. O punktach odcinka o końcach $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ można więc myśleć jako o środkach masy układu dwu mas: masy $1-t$ umieszczonej w punkcie $\mathbf{p}$ i masy t umieszczonej w $\mathbf{q}$, wtedy środkiem masy jest właśnie punkt $(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$. Możemy również mówić o średniej ważonej punktów $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ z wagami $1-t$ i t. Można też tak: ponieważ $(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q} = \mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$, więc odcinek zaczynający się w punkcie $\mathbf{p}$ i kończący się w punkcie $\mathbf{q}$ składa się z końców wektorów zaczepionych w punkcie p, równoległych do wektora o początku $\mathbf{p}$ i końcu $\mathbf{q}$, nie dłuższych niż ten wektor.

Niech $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ będą dwoma różnymi punktami przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Niech $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ oznacza zbiór złożony z punktów postaci $(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$, $t\in[0,1]$, czyli odcinek domknięty o końcach $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Jeśli $k=1$, to różnica między przedziałem domkniętym $[p,q]$ (w tym przypadku mamy do czynienia z liczbami) i odcinkiem $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ jest niewielka i raczej formalna. Myśląc o przedziale $[p,q]$ zakładamy, że $p<q$ lub chociaż $p\le q$, natomiast myśląc o odcinku $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ tego założenia nie robimy. Ponieważ różnica jest jedynie formalna, więc nie wprowadzamy różnicy w oznaczeniach — szanse nieporozumienia spowodowanego tą dwuznacznością są znikome. Podobnie symbol $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ oznacza odcinek otwarty, czyli zbiór złożony z punktów postaci $(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$, $t\in(0,1)$, symbol $[\mathbf{p},\mathbf{q})$ — odcinek domknięto–otwarty, zaś symbol $(\mathbf{p},\mathbf{q}]$ – odcinek otwarto–domknięty.

Twierdzenie 1.26. (o spójności odcinka)
Odcinek jest zbiorem spójnym.

Dowód.[6] Załóżmy, że tak nie jest. Niech $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ będą końcami odcinka, który nie jest spójny. Niech $\mathbf{p}_t=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}$. Odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ składa się więc ze wszystkich punktów $\mathbf{p}_t$, gdzie $t\in[0,1]$. Ponieważ zakładamy, że odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ nie jest spójny, więc istnieją takie zbiory otwarte G, H, że $G\cap[\mathbf{p},\mathbf{q}]\neq\emptyset$, $H\cap[\mathbf{p},\mathbf{q}]\neq\emptyset$ oraz $G\cup H\supseteq[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ i $G\cap H\cap[\mathbf{p},\mathbf{q}]=\emptyset$. Punkt $\mathbf{p}$ jest więc elementem dokładnie jednego ze zbiorów G, H. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że $\mathbf{p}\in G$. Ponieważ zbiór G jest otwarty, więc istnieje taka liczba $r>0$, że $B(\mathbf{p},r)\subseteq G$. Z nierówności $0\le t<\frac{r}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|}$ wynika nierówność $\|\mathbf{p}_t-\mathbf{p}\|=\|(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}-\mathbf{p}\|<r$, zatem $\mathbf{p}_t\in B(\mathbf{p},r)\subseteq G$. Wykazaliśmy więc, że $[\mathbf{p},\mathbf{p}_t]\subset G$, jeśli tylko t jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Rozważymy teraz najdłuższy z odcinków $[\mathbf{p},\mathbf{p}_t]$ zawartych w zbiorze G, jeśli taki istnieje. Niech punkt $\mathbf{p}_s$ oznacza jego koniec. Z określenia liczby s wynika od razu, że jeśli $0\le t<s$, to $\mathbf{p}_t\in G$. Ponieważ $\mathbf{p}_s\in G$, więc pewna kula o środku $\mathbf{p}_s$ jest zawarta w G. Stąd wynika, że jeśli $\mathbf{p}_s\neq q$, to odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{p}_s]$ można wydłużyć w kierunku punktu $\mathbf{q}$ nie wychodząc ze zbioru G. Przeczy to temu, że odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{p}_s]$ jest najdłuższy spośród odcinków postaci $[\mathbf{p},\mathbf{p}_t]$, zawartych w zbiorze G. Wobec tego $\mathbf{p}_s=\mathbf{q}$, a to oznacza, że $[\mathbf{p},\mathbf{q}]\subseteq G$, więc odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ nie ma punktów wspólnych ze zbiorem H, wbrew założeniu. Oznacza to, że wśród odcinków postaci $[\mathbf{p},\mathbf{p}_t]$ nie ma najdłuższego.

Rozważmy sumę wszystkich odcinków postaci $[\mathbf{p},\mathbf{p}_t]$ zawartych w zbiorze G. Ponieważ nie ma wśród nich najdłuższego, więc ich suma jest domknięto–otwartym odcinkiem postaci $[\mathbf{p},\mathbf{p}_s)$ i $\mathbf{p}_s\notin G$. Wobec tego $\mathbf{p}_s\in H$, (przyp. $[\mathbf{p},\mathbf{q}]\subseteq G\cup H$). Ponieważ zbiór H jest otwarty, więc wraz z punktem $\mathbf{p}_s$ zawiera pewną kulę o środku w punkcie $\mathbf{p}_s$, a więc również pewien odcinek postaci $[\mathbf{p}_t,\mathbf{p}_s]$, przy czym $t<s$. Żaden punkt odcinka $[\mathbf{p}_t,\mathbf{p}_s]$ nie leży więc w zbiorze G, wbrew temu, że wszystkie z wyjątkiem

[6] Warto zrozumieć, pamiętać nie trzeba, bo ten dowód można wymyśleć samodzielnie, myślę, że w połowie semestru każdy już będzie w stanie go odtworzyć dzięki aktywnemu uczestnictwu w ćwiczeniach z topologii.

punktu $\mathbf{p}_s$ powinny tam być. Również druga możliwość została wykluczona. Oznacza to, że odcinek $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ nie może być niespójny, jest więc spójny. ■

Uwaga 1.27.
Jedynymi spójnymi podzbiorami prostej są przedziały. Ich spójność wynika z poprzedniego twierdzenia. Jeśli natomiast zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nie jest przedziałem, to istnieją trzy liczby a,b,c takie, że a, $c \in A$, $b \notin A$ oraz $a < b < c$. Przyjmujemy wtedy $G = (-\infty, b)$ oraz $H = (b, \infty)$. Ponieważ $a \in G \cap A$, więc $G \cap A \neq \emptyset$. Analogicznie $H \cap A \neq \emptyset$. Ponieważ $G \cup H = \mathbb{R} \setminus \{b\} \supseteq A$, więc zbiór A nie jest spójny. Niestety, w przestrzeniach wyższego wymiaru zbiorów spójnych nie można równie prosto scharakteryzować. ■

Można jednak łatwo scharakteryzować spójne zbiory otwarte w $\mathbb{R}^k$, czym zajmiemy się dalej. Poprzedzimy jednak to twierdzeniem, które pozwoli nam stwierdzać spójność zbiorów dzięki informacji o spójności innych zbiorów.

Twierdzenie 1.28. (o spójności sumy zbiorów spójnych)
Jeśli zbiory A i B są spójne i mają co najmniej jeden punkt wspólny, to ich suma $A \cup B$ też jest zbiorem spójnym.

Dowód. Niech $\mathbf{p} \in A \cap B$. Jeśli zbiór $A \cup B$ nie jest spójny, to istnieją takie dwa zbiory otwarte G, H, że $H \cap (A \cup B) \neq \emptyset \neq G \cap (A \cup B)$, $G \cap H \cap (A \cup B) = \emptyset$ oraz $G \cup H \supseteq A \cup B$. Wobec tego punkt $\mathbf{p}$ znajduje się w jednym ze zbiorów G, H. Niech $\mathbf{p} \in G$. Ponieważ zbiór A jest spójny i $A \cap G \neq \emptyset$, więc $A \cap H = \emptyset$, czyli $A \subseteq G$. Analogicznie $B \subseteq G$, bo również zbiór B jest spójny. Przeczy to temu, że zbiór H ma punkty wspólne z $A \cup B$ leżące poza G. Dowód został zakończony. ■

Jasne jest, że to samo rozumowanie może być użyte dla dowodu spójności sumy dowolnie wielu (nawet nieskończenie wielu) zbiorów spójnych, których część wspólna jest niepusta.

Przypomnijmy, że łamaną nazywamy sumę skończenie wielu odcinków takich, że koniec pierwszego z nich jest początkiem drugiego, koniec drugiego – początkiem trzeciego itd. Łamana może mieć punkty samoprzecięcia, np. trzynasty odcinek może przecinać się z siódmym. Z twierdzenia o spójności sumy zbiorów spójnych wynika, że łamana jest zbiorem spójnym: suma dwóch odcinków przecinających się jest zbiorem spójnym. Wobec tego suma pierwszego odcinka i sumy dwóch następnych też jest spójna, itd.

Twierdzenie 1.29. (o spójności zbiorów, których punkty można łączyć łamanymi)
Jeśli każde dwa punkty zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^k$ można połączyć łamaną w nim zawartą, to zbiór A jest spójny.[7]

Dowód. Załóżmy, że zbiór A jest niespójny. Wtedy istnieją takie dwa zbiory otwarte G i H, że $A \cap G \neq \emptyset \neq A \cap H$, ale $A \cap G \cap H = \emptyset$. Wybieramy więc punkty $\mathbf{p} \in G \cap A$ oraz $\mathbf{q} \in H \cap A$ i łączymy je łamaną zawartą w zbiorze A. Istnienie zbiorów

[7] Zwykle mówi się o łączeniu punktów krzywymi, teza też jest wtedy prawdziwa, wymaga to jednak zdefiniowania krzywej, czego w tym miejscu nie zrobimy, idea twierdzenia i jego dowodu nie ulega istotnej zmianie.

otwartych G i H przecinających łamaną, których suma ją zawiera, ale żaden punkt nie należy jednocześnie do G, H i łamanej przeczy spójności tej ostatniej. Dowód został zakończony. ■

Okazuje się, że w przypadku zbiorów otwartych w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ twierdzenie, które właśnie udowodniliśmy można odwrócić i w ten sposób otrzymać dosyć prostą charakterystykę zbiorów otwartych i spójnych.

Twierdzenie 1.30. (o spójności otwartych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^k$)
Zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^k$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego dwa punkty można połączyć łamaną w nim zawartą.

Dowód. Dzięki poprzedniemu twierdzeniu wystarczy wykazać, że jeśli zbiór otwarty jest spójny, to każde dwa jego punkty można połączyć łamaną w nim zawartą. Niech $\mathbf{p} \in U$. Niech $U_\mathbf{p}$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich punktów zbioru U, które można połączyć z punktem $\mathbf{p}$ łamaną zawartą w U. Ponieważ zbiór U jest otwarty, więc również zbiór $U_\mathbf{p}$ jest otwarty: jeśli $\mathbf{x} \in U_\mathbf{p}$, to zbiór U zawiera pewną kulę o środku w punkcie $\mathbf{x}$, więc łamaną, która łączy $\mathbf{p}$ z $\mathbf{x}$ można wydłużyć o fragment dowolnego promienia tej kuli, więc można połączyć łamaną zawartą w U punkt $\mathbf{p}$ z dowolnym punktem kuli o środku w punkcie $\mathbf{x}$, zawartej w zbiorze U.

Zauważmy teraz, że jeśli $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in U$ oraz $U_\mathbf{p} \cap U_\mathbf{q} \neq \emptyset$, to $U_\mathbf{q} \subseteq U_\mathbf{p}$. Niech bowiem $\mathbf{x} \in U_\mathbf{q}$ i niech $\mathbf{y} \in U_\mathbf{p} \cap U_\mathbf{q}$. Wtedy tworzymy łamaną z trzech łamanych zawartych w zbiorze U: łączącej $\mathbf{p}$ z $\mathbf{y}$, łączącej $\mathbf{y}$ z $\mathbf{q}$ i łączącej $\mathbf{q}$ z $\mathbf{x}$. Otrzymujemy łamaną zawartą w zbiorze U, która łączy punkt $\mathbf{p}$ z punktem $\mathbf{x}$. Wykazaliśmy, że $U_\mathbf{p} \supseteq U_\mathbf{q}$.

Analogicznie można wykazać, że $U_\mathbf{q} \supseteq U_\mathbf{p}$. Wobec tego $U_\mathbf{p} = U_\mathbf{q}$, jeżeli tylko zbiory $U_\mathbf{p}$ i $U_\mathbf{q}$ mają co najmniej jeden punkt wspólny.

Niech $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru U. Niech $G = U_\mathbf{p}$ i niech H będzie sumą tych wszystkich zbiorów $U_\mathbf{x}$, które są rozłączne z $U_\mathbf{p}$. Zbiór H jest otwarty jako suma zbiorów otwartych. Ponieważ zbiory G i H są otwarte i rozłączne oraz $G \cup H = U$, a zbiór U jest spójny, więc jeden z nich musi być pusty, zatem $H = \emptyset$. Wobec tego $U = G = U_\mathbf{p}$. Oznacza to, że każdy punkt zbioru U można połączyć z punktem $\mathbf{p}$ łamaną zawartą w zbiorze U. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 1.31.
Dla zbiorów, które nie są otwarte twierdzenie poprzednie nie jest prawdziwe. Nie będziemy się wgłębiać w tę problematykę, bo te kwestie są omawiane na topologii, ale zaznaczmy, że nawet zastąpienie łamanych przez krzywe nie poprawia sytuacji. Różnych punktów okręgu (nie koła) łamanymi zawartymi w nim łączyć się nie da, bo okrąg w ogóle żadnych odcinków, tym bardziej łamanych, nie zawiera. Oczywiście łuk okręgu to krzywa, więc tu wystarczy rozważyć twierdzenie nieco tylko ogólniejsze. Jeśli jednak rozważymy wykres Γ funkcji $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq 0$ i uzupełnimy go odcinkiem pionowym $S = [(0,-1),(0,1)]$, to otrzymamy zbiór spójny. Punktów odcinka S z punktami Γ nie da się łączyć krzywymi zawartymi w zbiorze $\Gamma \cup S$. ■

Po tych przydługich opowieściach o zbiorach spójnych trzeba wyjaśnić wreszcie, dlaczego w ogóle się nimi interesujemy. Chodzi o twierdzenie Bolzano–Cauchy'ego.

Twierdzenie 1.32. (o przyjmowaniu wartości pośrednich)
Jeśli zbiór $C \subseteq \mathbb{R}^k$ jest spójny i funkcja $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(\mathbf{p}) < a < f(\mathbf{q})$, to istnieje punkt $\mathbf{x} \in C$ taki, że $a = f(\mathbf{x})$, tzn. liczby znajdujące się między wartościami funkcji same są wartościami tej funkcji, czyli zbiór wartości funkcji ciągłej określonej na zbiorze spójnym jest przedziałem.

Dowód. Załóżmy, że teza jest nieprawdziwa. Wtedy istnieją takie punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in C$ i liczba a, że $f(\mathbf{p}) < a < f(\mathbf{q})$, przy czym liczba a nie jest wartością funkcji f. Niech $\widetilde{G}$ będzie zbiorem złożonym z tych punktów $\mathbf{x}$ zbioru C, dla których $f(\mathbf{x}) < a$. Dla każdego takiego punktu $\mathbf{x}$ istnieje taka kula $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$, że jeśli $\mathbf{y} \in C \cap B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$, to $f(\mathbf{y}) < a$ — wynika to z ciągłości funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$. Niech G będzie sumą tych wszystkich kul. Zbiór G jest otwarty jako suma rodziny kul otwartych. Analogicznie definiujemy zbiór otwarty H złożony z tych punktów zbioru $H \cap C$, w których funkcja f przyjmuje wartości większe niż a. Istnienie zbiorów G i H, z definicji rozłącznych, przeczy spójności zbioru C. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 1.33.
Podobnie jak w przypadku zbiorów zwartych, można to twierdzenie uogólnić: jeśli $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}^l$ jest funkcją ciągłą, to zbiór $f(C)$, czyli zbiór złożony ze wszystkich punktów postaci $f(\mathbf{x})$, gdzie $\mathbf{x} \in C$, jest spójny. Nie będziemy tego twierdzenia dowodzić, bo zbiory spójne mają dla tego wykładu znacznie mniejsze znaczenie niż zwarte, a dowód różni się bardzo nieznacznie od dowodu twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich. Zresztą dowody będą na topologii. ■

Przypominaliśmy już definicję funkcji ciągłej stosowaną w przypadku jednowymiarowym. Ta sama definicja obowiązuje w wielu wymiarach. Tak jak w jednym wymiarze prawdą jest, że suma i różnica odwzorowań ciągłych w jakimś punkcie są odwzorowaniami ciągłymi w tym punkcie. To samo dotyczy iloczynu skalarnego dwu funkcji ciągłych. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie $\mathbf{p}$ a funkcja g jest ciągła w punkcie $f(\mathbf{p})$ i dziedzina funkcji g zawiera zbiór wartości funkcji f, to złożenie $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$. Dowodów tych stwierdzeń nie będziemy powtarzać, bowiem nie różnią się one niczym od przedstawionych poprzednio w wymiarze 1. Stwierdzenia te mają jednak ważne konsekwencje. Pozwalają one na stwierdzenie ciągłości wielu funkcji, mówiąc niezbyt precyzyjnie – funkcji określonych jednym wzorem. Zauważmy, że funkcja przypisująca punktowi $\mathbf{x}$ liczbę x_j jest ciągła, a nawet spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1: $|x_j - y_j| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, można ją określić mianem rzutu prostopadłego na j–tą oś układu współrzędnych i wtedy powiedzieć, że odległość rzutów x_j i y_j punktów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ nie przekracza odległości rzutowanych punktów. Stąd bez trudu wywnioskować można ciągłość funkcji typu $f(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2+1}$ określonej na całej płaszczyźnie: funkcje $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1$ oraz $(x_1, x_2) \longrightarrow x_2$ są ciągłe, więc ich kwadraty, czyli funkcje $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1^2$ i $(x_1, x_2) \longrightarrow x_2^2$ są również ciągłe (bo iloczyn funkcji ciągłych jest ciągły), wobec tego funkcja $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1$ jest ciągła jako suma trzech funkcji ciągłych, również funkcja $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + x_2$ jest ciągła jako suma funkcji ciągłych. Z ostatniego zdania i tego, że iloraz dwu funkcji ciągłych jest ciągły w tych punktach, w których mianownik nie zeruje się, wynika ciągłość funkcji f.

Warto dodać, że funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^l$ określona na zbiorze $G \subseteq \mathbb{R}^k$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{p} \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f_1, f_2, $\dots$, f_l określone jako współrzędne odzorowania f: $f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_l(\mathbf{x})\big)$ są ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$. Wynika to natychmiast z definicji ciągłości i wzoru na odległość dwóch punktów przestrzeni l–wymiarowej: jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{p}$ i dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_j(\mathbf{x}_n) = f_j(\mathbf{p})$, to również

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(f_1(\mathbf{x}_n) - f_1(\mathbf{p}))^2 + (f_2(\mathbf{x}_n) - f_2(\mathbf{p}))^2 + \cdots + (f_l(\mathbf{x}_n) - f_l(\mathbf{p}))^2} = 0$$

czyli $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{p})$. Z ciągłości wszystkich funkcji f_1, f_2,$\dots$,f_l wynika więc ciągłość funkcji f. Wynikanie przeciwne jest jeszcze łatwiejsze: funkcja f_j jest złożeniem funkcji f i rzutu na j–tą oś układu współrzędnych, więc jest ciągła jako złożenie funkcji ciągłych.

Wynika stąd od razu, że funkcja, która przypisuje punktowi $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ punkt $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$ jest ciągła. Funkcja przypisująca punktowi $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2$ punkt $(\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^3$ również jest ciągła. Można zauważyć, że zbiorem wartości tej ostatniej funkcji jest sfera (tzn. powierzchnia kuli) o promieniu 1 i środku $(0, 0, 0)$.

Jeśli $F(\varphi, \psi) = ((2 + \cos\varphi)\cos\psi, (2 + \cos\varphi)\sin\psi, \sin\varphi)$, to funkcja F jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny. Przekształca ona płaszczyznę na powierzchnię powstałą w wyniku obrotu okręgu o promieniu 1 i środku $(2, 0, 0)$ leżącego w płaszczyźnie $y = 0$ wokół osi danej równaniami $x = 0 = y$. Ta powierzchnia wygląda jak dętka rowerowa. Matematycy nazywają ją torusem.

Niech $\varphi(t) = \big(\big(2 + \cos(t\sqrt{2})\big)\cos t, \big(2 + \cos(t\sqrt{2})\big)\sin t, \sin(t\sqrt{2})\big)$. Funkcja φ przekształca prostą w przestrzeń trójwymiarową, a nawet w torus opisany w poprzednim akapicie. Można sobie wyobrażać, że nawijamy nieskończenie długą (i nieskończenie cienką) nić na szpulkę w kształcie dętki rowerowej. Czytelnik powinien sprawdzić, że to przekształcenie φ jest różnowartościowe:

$$s \neq t \Longrightarrow \varphi(s) = \Big(\big(2 + \cos(s\sqrt{2})\big)\cos s, \big(2 + \cos(s\sqrt{2})\big)\sin s, \sin(s\sqrt{2})\Big) \neq$$
$$\neq \Big(\big(2 + \cos(t\sqrt{2})\big)\cos t, \big(2 + \cos(t\sqrt{2})\big)\sin t, \sin(t\sqrt{2})\Big) = \varphi(t).$$

Oznacza to, że „nitka” nie trafia ponownie w miejsce, w którym została już raz umieszczona — jest to możliwe, bo jest ona „nieskończenie cienka”. Można wykazać, że cała ta „nitka” tworzy *zbiór gęsty* w torusie. Oznacza to, że kula o środku w jakimkolwiek punkcie torusa i dowolnym promieniu (oczywiście chodzi o promienie małe) zawiera jakieś punkty leżące na „nitce”. Dowód tego ostatniego stwierdzenia jest nieco trudniejszy, ale nie jest na tyle trudny, by student matematyki nie mógł go przeprowadzić samodzielnie, w razie zaćmienia umysłu zapraszam na konsultacje. Czytelnik przekonany o tym, że konstrukcja ta jest sztuczna, zechce przyjąć do wiadomości, że tego rodzaju zjawiska pojawiają się w zagadnieniach matematycznych związanych np. z ruchem planet Układu Słonecznego. Warto też zauważyć, że funkcja odwrotna do ostatnio omawianej funkcji nie jest ciągła w żadnym punkcie. Jest to spowodowane gęstością „nici”: po „nawinięciu” na szpulkę w kształcie torusa punkty nici, których odległość jest duża, mogą znaleźć się bardzo blisko.

Można podać istotnie prostszy przykład ilustrujący tego rodzaju zjawisko. Niech $\gamma(t) = \big(2^{-t}(1-2^{-t})(-1+2^{1-t}), 2^{-t}(1-2^{-t})\big)$ dla $t \geq 0$. Czytelnik sprawdzi bez trudu, że funkcja γ jest różnowartościowa oraz że $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = (0,0) = \gamma(0)$. Z tego wynika, że funkcja odwrotna nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$. Nie chcemy się tu wdawać w szczegółowe rozważania, jednak przestrzegamy czytelników przed zbyt daleko idącymi analogiami z twierdzeniami, które są prawdziwe dla funkcji ciągłych, których dziedzina i zbiór wartości są jednowymiarowe: pewne twierdzenia można przenieść bez trudu, a inne przestają być prawdziwe lub wymagają dodatkowych założeń. Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej wymaga dodatkowego założenia: można np. założyć, że funkcja, której odwrotna nas interesuje, jest ciągła oraz że prowadzi ona ze zbioru otwartego położonego w przestrzeni k–wymiarowej w przestrzeń tego samego wymiaru k. W tej wersji twierdzenie to jest prawdziwe, ale jego dowód znacznie wykracza poza ramy tego wykładu. Dla matematyków jest to ważne twierdzenie, ale jego dowód należy do topologii (nazywane jest ono twierdzeniem Brouwera o niezmienniczości obszaru). Innym założeniem gwarantującym ciągłość funkcji odwrotnej jest zwartość jej dziedziny: jeśli $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą, różnowartościową a zbiór C jest zwarty, to funkcja $f^{-1}\colon f(C) \longrightarrow C$ jest ciągła. Dowód tego ostatniego stwierdzenia jest łatwy i zachęcamy czytelnika, by w chwilach wolnych od innych zajęć udowodnił to twierdzenie samodzielnie, **zanim** pojawi się ono na wykładzie z topologii.

Ważną klasą funkcji ciągłych są funkcje liniowe.[8] Załóżmy, że macierz $A = (a_{mn})$ ma k kolumn i l wierszy. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ i niech $y_m = \sum\limits_{n=1}^{k} a_{mn}x_n$. Innymi słowy wektor $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, którego współrzędnymi są liczby $y_1, y_2, \ldots, y_l$ jest zdefiniowany jako iloczyn

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Z twierdzeń, które zostały sformułowane do tej pory wynika od razu, że przekształcenie liniowe jest ciągłe. Ważne jednak jest również to, że spełnia ono warunek Lipschitza ze stałą nie większą niż $\sqrt{\sum\limits_{m,n} a_{mn}^2}$. Wynika to z nierówności Schwarza:

$$\sum_{m=1}^{l} y_m^2 = \sum_{m=1}^{l}\left(\sum_{n=1}^{k} a_{mn}x_n\right)^2 \leq \sum_{m=1}^{l}\left(\sum_{n=1}^{k} a_{mn}^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} x_n^2\right) = \left(\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{k} a_{mn}^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{k} x_n^2\right).$$

[8] Na analizie baza w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ jest ustalona, więc przekształcenia liniowe są utożsamiane z ich macierzami względem standardowych baz w przestrzeniach euklidesowych. Dlatego też często zamiast pisać $L(\mathbf{x})$, gdy chodzi o wartość przekształcenia liniowego L w punkcie $\mathbf{x}$, piszemy $L\mathbf{x}$. Mamy $L(\mathbf{x}+\tilde{\mathbf{x}}) = L\mathbf{x} + L\tilde{\mathbf{x}}$ i $L(t\mathbf{x}) = t(L\mathbf{x})$ dla $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$.

Stąd wynika, że $\|\mathbf{y}\| = \|A\mathbf{x}\| \le \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{k} a_{mn}^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{k} x_n^2\right)}$. Wprowadźmy oznaczenie: $\alpha = \sqrt{\left(\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{k} a_{mn}^2\right)}$. Mamy więc $\|A\mathbf{x}\| \le \alpha\|\mathbf{x}\|$. dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Wobec tego również $\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \le \alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, co oznacza, że przekształcenie liniowe przypisujące punktowi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ punkt $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą α. Nie wykluczamy oczywiście tego, że może ono spełniać warunek Lipschitza ze stałą mniejszą niż α. Przykład świadczący o tym, że może się tak zdarzyć to przekształcenie zdefiniowane macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, czyli przekształcenie identycznościowe płaszczyzny. Spełnia ono warunek Lipschitza ze stałą $1 < \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Jasne jest również to, że w przypadku $l = 1$, tj. przekształcenia liniowego, które przekształca przestrzeń k–wymiarową w przestrzeń jednowymiarową najmniejszą możliwą stałą Lipschitza jest właśnie liczba α — nierówność Schwarza staje się równością w wypadku wektorów zgodnie równoległych. Jeśli zbiór wartości jest wielowymiarowy, to nawet w przypadku tak prostego przekształcenia jak identyczność liczba α może być stałą Lipschitza większą od najmniejszej, jest to spowodowane tym, że w przypadku różnych m wyrażenie $|y_m| = |\,(A\mathbf{x})_m\,|$ osiąga swe maksimum na różnych wektorach $\mathbf{x}$ (zakładamy tutaj, że $\|\mathbf{x}\| = 1$).

Twierdzenie 1.34. (normy przekształcenia liniowego)
Normą $\|A\|$ przekształcenia liniowego $A\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ nazywamy najmniejszą liczbę a, dla której nierówność $\|A\mathbf{x}\| \le a\|\mathbf{x}\|$ zachodzi dla wszystkich punktów $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. ■

Wykazaliśmy przed podaniem tej definicji, że norma przekształcenia liniowego może być zdefiniowana w przypadku każdego przekształcenia liniowego z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^l$. Czytelnik może sprawdzić bez trudu, że tak zdefiniowana norma przekształcenia ma własności opisane na początku tego rozdziału oraz że $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ dla dowolnych przekształceń liniowych A, B, których złożenie AB jest zdefiniowane.

Twierdzenie 1.35. (o minimalnym stopniu rozciągania liniowego izomorfizmu)
Jeśli L jest liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^k$, to dla każdego punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność: $\|Lx\| \ge \|L^{-1}\|^{-1}\|x\|$.

Dowód. Nierówność $\|x\| = \|L^{-1}Lx\| \le \|L^{-1}\| \cdot \|Lx\|$ wynika z definicji normy przekształcenia liniowego, a właśnie ją mieliśmy wykazać. ■

Niech $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją postaci $\sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j}x_ix_j$. Jeśli choć jedna z liczb $a_{i,j}$ jest różna od 0, to mówimy, że funkcja f jest wielomianem jednorodnym drugiego stopnia zespołu zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$.[9] Dla dowolnej liczby rzeczywistej t i dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi oczywisty wzór $f(t\mathbf{x}) = t^2 f(\mathbf{x})$. Jeżeli dla pewnej funkcji

[9] Można też powiedzieć zmiennej $\mathbf{x}$, mając na myśli to, że argumentami funkcji f są punkty przestrzeni k–wymiarowej.

$g\colon \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\} \mapsto \mathbb{R}$ zachodzi równość $g(t\mathbf{x}) = t^\alpha g(\mathbf{x})$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $t \neq 0$ i wszystkich $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, to mówimy, że g jest funkcją jednorodną stopnia α. Wielomiany jednorodne drugiego stopnia są bardzo ważnymi funkcjami tego typu. Wykażemy teraz łatwe i jednocześnie ważne z naszego punktu twierdzenie.

Twierdzenie 1.36. **(o oszacowaniu wartości jednorodnego wielomianu kwadratowego)** Załóżmy, że f jest jednorodnym wielomianem kwadratowym, takim że $f(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Istnieją wtedy takie liczby rzeczywiste dodatnie a, b, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zachodzi nierówność podwójna:

$$a\mathbf{x}^2 = a\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j}x_ix_j \leq b\sum_{i=1}^{k} x_i^2 = b\mathbf{x}^2 .$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeśli $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, to $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 f\big(\frac{x}{\|\mathbf{x}\|}\big)$. Funkcja f jest oczywiście ciągła na przestrzeni $\mathbb{R}^k$, więc też na $(k-1)$–wymiarowej sferze o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu 1. Jej kresy na tej sferze są więc jej wartościami, są zatem liczbami dodatnimi. Niech $a = \min\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x})$ i $b = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x})$ i niech $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Mamy wtedy $a\|x\|^2 \leq f\big(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\big) \cdot \|\mathbf{x}\|^2 = f(\mathbf{x})$ i analogicznie $f(\mathbf{x}) \leq b\|\mathbf{x}\|^2$. ■

Sformułowanie analogicznej tezy dla wielomianów, których wartości są liczbami ujemnymi pozostawiamy czytelnikom w charakterze prostego ćwiczenia. Zauważmy jeszcze, że jeśli $A = (a_{i,j})$, to $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$, więc $|f(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|A\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$. Wynika stąd, że jeśli b jest najmniejszą stałą, dla której nierówność $|f(\mathbf{x})| \leq b\mathbf{x}^2$ zachodzi dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, to $b \leq \|A\|$.

Jeśli $\mathbf{x}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ, czyli $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, to $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2$, więc $b \geq \lambda \geq a$ dla każdej wartości własnej macierzy A.

Kilka zadań

Zadanie 1.3. „Narysować” zdefiniowane niżej zbiory w przestrzeni odpowiedniego wymiaru i wyjaśnić, które z nich są otwarte, które domknięte, które zwarte, które ograniczone, które wypukłe a które spójne:

(a) $A = \{(x, y)\colon \quad |x| - |y| \leq 1\}$,

(b) $B = \{(x, y)\colon \quad 0 < x + y \leq 1,\ y \geq x^2\}$,

(c) $C = \{(x, y)\colon \quad 0 < x + y \leq 1,\ y \geq x^2 + 1\}$,

(d) $D = \{(x, y)\colon \quad x^2 + 2x + y^2 - 4y \geq -1,\ 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$,

(e) $E = \{(x, y, z)\colon \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + 3z = 6\}$,

(f) $F = \{(x, y, z)\colon \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + 3z < 6\}$,

(g) $G = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 = 4z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$,

(h) $H = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 \leq 4z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$,

(i) $I = \{(x, y, z) :\quad x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}$,

(j) $J = \{(x, y, z) :\quad x^2 + y^2 \le 4,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}$,

(k) $K = \{(x, y, z) :\quad x^2 + y^2 \le 4,\ x^2 + y^2 + z^2 > 9\}$,

(l) $L = \{(x, y, z) :\quad x^2 + y^2 < z,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$,

(m) $M = \{(x, y, z) :\quad x^2 - y^2 = z,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$,

(n) $N = \{(x, y, z) :\quad x^2 + y^2 \le 4,\ x^2 + y^2 - z^2 \le 1\}$,

(o) $O = \{(x, y, z) :\quad x^2 + y^2 \le 4,\ z^2 - x^2 - y^2 \le 1\}$,

(p) $P = \{(x, y, z) :\quad xy \le 0,\ x^2 + z^2 \le 1\}$.

Zadanie 1.4. Udowodnić, że jeśli A jest macierzą symetryczną, czyli $A^T = A$, to liczba $\|A\|$ jest największą z wartości bezwzględnych wartości własnych macierzy A.

Zadanie 1.5. Znaleźć normę przekształcenia liniowego z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ zdefiniowanego macierzą $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Zadanie 1.6. Podać przykład macierzy, której norma jest większa (ostro) od wartości bewzględnej wszystkich jej wartości własnych.

Zadanie 1.7. Udowodnić, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją taka macierz A i wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$, że $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|A\| = 1$, $\|A^{-1}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ oraz $0 < A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < \varepsilon$.

Zadanie 1.8. Opisać kule w $\mathbb{R}^2$ i w $\mathbb{R}^3$ dla norm $\|\ \|_1$ i $\|\ \|_\infty$.

Zadanie 1.9. Norma potęgowa stopnia $p \ge 1$ (tzw. p–norma, por. uwaga 1.8, str. 3) jest określona dla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ znanym wzorem $\|\mathbf{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\Big)^{1/p}$. Wykazać jej podaddytywność: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$.

Zdefiniujmy na użytek trzech następnych zadań:

$$f_1(x, y, z) = 6x + 3y + 2z - 6, \qquad f_2(x, y, z) = -2x - y + z + 2,$$
$$f_3(x, y, z) = -x - 3y - 2z + 6, \qquad f_4(x, y, z) = -3x + y - z + 3,$$
$$A = \{(x, y, z) :\quad f_1(x, y, z) = 0,\ f_2(x, y, z) \ge 0,\ f_3(x, y, z) \ge 0,\ f_4(x, y, z) \ge 0\},$$
$$B = \{(x, y, z) :\quad f_1(x, y, z) = 0,\ f_2(x, y, z) \le 0,\ f_3(x, y, z) \ge 0,\ f_4(x, y, z) \ge 0\},$$
$$C = \{(x, y, z) :\quad f_1(x, y, z) \le 0 \le f_2(x, y, z),\ f_3(x, y, z),\ f_4(x, y, z),\ \ x, y, z \ge 0\}.$$

Zadanie 1.10. Wykazać, że A jest wielokątem wypukłym i znaleźć wszystkie jego wierzchołki.

Zadanie 1.11. Wykazać, że B jest nieograniczonym zbiorem wypukłym, którego "brzeg" (względem płaszczyzny $f_1 = 0$, a nie względem $\mathbb{R}^3$) składa się z pewnej liczby odcinków i półprostych.

Zadanie 1.12. Wykazać, że C jest wielościanem wypukłym i znaleźć jego wierzchołki.

Zadanie 1.13. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej za pomocą wzoru $f(\mathbf{x}) = \ln(1 + \|\mathbf{x}\|)$. Czy spełnia ona warunek Lipschitza?

Zadanie 1.14. Obliczyć granice $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \ln(x^2 + 2y^2)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$.

Zadanie 1.15. Obliczyć

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{y}}$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.
Symbol $\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}$ *oznacza, że badamy granicę funkcji określonej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych:* $\{(x,y)\colon \quad x > 0 \quad \text{i} \quad y > 0\}$.

Zadanie 1.16. Dla każdego punktu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{y \cdot \sin \pi x}{x + y - 1}$ lub wykazać jej nieistnienie.

Zadanie 1.17. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & \text{gdy} \quad xy \neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad xy = 0. \end{cases}$$

Zadanie 1.18. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} xyz \exp\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right), & \text{gdy} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Zadanie 1.19. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ określonego następująco:
$f(x,y,z) = \left(\frac{xy}{1+z^2}, \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$, jeżeli $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ i $f(0,0,0) = (0,0)$.

Zadanie 1.20. Niech $f(x,y) = x^y$ dla $x > 0$ i $y > 0$. Wykazać, że nie można tak określić liczby $f(0,0)$, aby funkcja f stała się ciągła w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 1.21. Definiujemy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, gdy $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$. Wykazać, że obcięcie f do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ jest funkcją ciągłą na tej prostej, mimo że funkcja f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Zadanie 1.22. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}\,,$$

gdzie M jest macierzą $k \times k$, zaś $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$. Czy spełnia ona warunek Lipschitza?

Zadanie 1.23. Niech $S^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+1}\colon \quad \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Niech $\mathbf{p}_N = (0,\ldots 0,1)$. Niech $F(\mathbf{x})$ będzie punktem wspólnym podprzestrzeni $x_{k+1} = 0$ i prostej przechodzącej przez $\mathbf{p}_N$ oraz $\mathbf{x} \in S^k \setminus \{\mathbf{p}_N\}$. Wyrazić $F(\mathbf{x})$ za pomocą $\mathbf{x}$, np. w terminach współrzędnych.

Uwaga 1.37. Przekształcenie F zdefiniowane w zadaniu 1.23 zwane jest rzutem stereograficznym sfery S^k z punktu $\mathbf{p}_N$ na podprzestrzeń o równaniu $x_{k+1} = 0$.

Zadanie 1.24. Wykazać, że wśród stukątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje stukąt o największym polu.

Zadanie 1.25. Wykazać, że wśród przekrojów sześcianu (ustalonego) istnieje przekrój o największym polu.

Zadanie 1.26. Dany jest nieskończony ciąg kół $K_1, K_2, \ldots$. Dla każdej liczby naturalnej n istnieją koła $K_{1,n}, K_{2,n}, \ldots, K_{n,n}$ o wnętrzach parami rozłącznych, zawarte w kwadracie jednostkowym, przystające odpowiednio do kół $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Udowodnić, że istnieją koła $K_{1,\infty}, K_{2,\infty}, \ldots$ o wnętrzach parami rozłącznych, zawarte w kwadracie jednostkowym, przystające odpowiednio do kół $K_1, K_2, \ldots$.

Zadanie 1.27. Macierz kwadratową wymiaru k można utożsamić z punktem przestrzeni $\mathbb{R}^{k^2}$. Wykazać, że macierzy odwracalnych jest otwarty i gęsty w $\mathbb{R}^{k^2}$, tzn. jest otwarty i najmniejszy zbiór domknięty, który go zawiera to $\mathbb{R}^{k^2}$.

Zadanie 1.28. Wykazać, że mnożenie macierzy jest odwzorowaniem ciągłym z przestrzeni $\mathbb{R}^{kl} \times \mathbb{R}^{lm}$ w do przestrzeni $\mathbb{R}^{km}$.

Zadanie 1.29. Rozstrzygnąć, czy odwracanie macierzy jest odwzorowaniem ciągłym ze zbioru otwartego i gęstego w $\mathbb{R}^{k^2}$ do $\mathbb{R}^{k^2}$?

Zadanie 1.30. Zbiór $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ nazywamy poziomicą (warstwicą) przechodzącą przez punkt $\mathbf{x}_0$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że poziomice funkcji ciągłej są domknięte w $\mathbb{R}^k$.

Zadanie 1.31. Zbiór $\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l\colon \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\}$ nazywamy wykresem funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$. Udowodnić, że jeżeli f jest ciągła, to wykres Γ_f jest domknięty w przestrzeni $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.

Zadanie 1.32. Podać przykład funkcji nieciągłej przynajmniej w jednym punkcie, której wykres jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 1.33. Niech Ω_1 i Ω_2 będą zbiorami wypukłymi w $\mathbb{R}^k$. Wykazać, że dla dowolnych α, $\beta \in \mathbb{R}$ zbiór $\alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2 = \{\alpha x + \beta y : \quad x \in \Omega_1,\, y \in \Omega_2\}$ jest wypukły.

Zadanie 1.34. Wykazać, że iloczyn (dowolnie wielu) zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 1.35. Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$ (tzn. macierz A ma m wierszy i n kolumn), a Ω zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że zbiór $A(\Omega) = \{A\mathbf{x} : \quad \mathbf{x} \in \Omega\}$ jest wypukły w $\mathbb{R}^m$.

Zadanie 1.36. Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Wykazać, że zbiór $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \quad (A\mathbf{x})_i \le b_i \quad \text{dla } 1 \le i \le m\}$ jest wypukły w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 1.38. (funkcji wypukłej) Funkcja $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ określona na zbiorze wypukłym G jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $t \in (0,1)$ i dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ spełniona jest nierówność

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y})\,.$$

Jeśli nierówność jest ostra dla dowolnych różnych punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$, to mówimy, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Zadanie 1.37. Wykazać, że funkcja wypukła $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie G jest otwarty w $\mathbb{R}^k$ i wypukły, jest ciągła, co więcej: na każdym zbiorze zwartym zawartym w G spełnia warunek Lipschitza.

Zadanie 1.38. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki:
dla każdego $y_0 \in \mathbb{R}$ funkcja: $x \mapsto f(x, y_0)$ jest ciągła i rosnąca;
dla każdego $y_0 \in \mathbb{R}$ funkcja: $y \mapsto f(x_0, y)$ jest ciągła.
Udowodnić, że f jest funkcją ciągłą $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Zadanie 1.39. Funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:
dla każdego $y_0 \in \mathbb{R}$ funkcja: $x \mapsto f(x, y_0)$ spełnia warunek Lipschitza za stałą 13;
dla każdego $y_0 \in \mathbb{R}$ funkcja: $y \mapsto f(x_0, y)$ jest ciągła.
Udowodnić, że f jest funkcją ciągłą $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Zadanie 1.40. Niech $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L(f) \in (0,1)$. Wykazać, że jeśli $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + f(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x}$, to odwzorowanie g jest różnowartościowe.

Zadanie 1.41. Czy zbiorem wartości wielomianu dwu zmiennych, czyli wielomianu zmiennej x, którego współczynnikami są wielomiany zmiennej y, może być $(0, \infty)$?
— *zadanie z „Delty”.*

Zadanie 1.42. Niech $f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \cdot \cos(xyz) \cdot e^{-(x^2+y^4+z^6)}$ dla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dowieść, że funkcja f osiąga swoje kresy.

Zadanie 1.43. Niech $L(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, gdzie $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i niech B oznacza sumę wszystkich sześciu ścian sześcianu jednostkowego $[0,1]^3$.
Dowieść, że wśród czworościanów, których wszystkie wierzchołki znajdują się w zbiorze $A = L^{-1}(B)$ znajduje się czworościan o największej objętości.

Zadanie 1.44. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} |yx^{-2}| \cdot e^{-|yx^{-2}|} & \text{dla } \; x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } \; x = 0. \end{cases}$$

Zadanie 1.45. W zależności od $a \in \mathbb{R}$ znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-1} \cdot \left(e^{x^2+y^2} - \cos(2xy)\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ a & \text{dla } x = 0. \end{cases}$.

Zadanie 1.46. Niech $f(t) = \left(\left(2+\cos(t\sqrt{2})\right)\cos t, \left(2+\cos(t\sqrt{2})\right)\sin t, \sin(t\sqrt{2})\right)$. Wykazać, że f jest różnowartościowa i ciągła, ale f^{-1} nie ma punktów ciągłości.

Zadanie 1.47. Niech $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad x_{k+1} = 0$ i niech $h\colon H \longrightarrow H$ będzie takim różnowartościowym odwzorowaniem ciągłym przekształcającym podprzestrzeń H na siebie, że odwzorowanie $h^{-1}\colon H \longrightarrow H$ też jest ciągłe. Udowodnić, że jeśli $\hat{h}\colon S^k \longrightarrow S^k$ zdefiniowane jest wzorami $\hat{h}(\mathbf{p}_N) = \mathbf{p}_N$ oraz $h(\mathbf{x}) = F^{-1}(h(F(\mathbf{x})))$ dla $\mathbf{x} \in S^k \setminus \{\mathbf{p}_N\}$, to $\hat{h}$ jest ciągłe.

Uwaga 1.39. Można udowodnić, że ciągłość przekształcenia h^{-1} wynika z ciągłości i różnowartościowości h, ale bez użycia aparatu topologicznego jest to dosyć trudne.

Zadanie 1.48. Skonstruować funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ taką, że $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$.

Zadanie 1.49. Skonstruować różnowartościową funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, której obraz zrzutowany prostopadle na pewną płaszczyznę pokrywa się z tą płaszczyzną.

Zadanie 1.50. Niech $\|\cdot\|$ będzie dowolną normą w $\mathbb{R}^k$, por. uwaga 1.8, str. 3.

a. Dowieść, że dla ciągu punktów $(\mathbf{x}_n)$, gdzie $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,k})$ dla $n = 1, 2, \ldots$, warunek $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = 0$ jest równoważny warunkowi: $\forall_{i \in \{1,\ldots,k\}} \lim\limits_{n\to\infty} x_{n,i} = 0$.

b. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\|_2 = 0$.

Zadanie 1.51. Niech $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Udowodnić, że nie istnieje taki iloczyn skalarny $B\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ (por. uwaga 1.5, str. 2), że $\|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{B(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

Zadanie 1.52. Udowodnić, że zbiór macierzy nieosobliwych, wymiaru $k \times k$, traktowanych jako punkty przestrzeni R^{k^2}, jest sumą dwóch rozłącznych, otwartych, niepustych zbiorów spójnych.