

Dwa zadania, w których występuje sumowanie lub szacowanie sum szeregów

Szereg Leibniza i „obliczanie” π

Zajmiemy się najpierw szeregiem Leibniza (wg książki Wacława Sierpińskiego „Działania nieskończone” z 1923 r)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Jak powszechnie (przynajmniej w budynku MIM) wiadomo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Z własności szeregu Leibniza wynika od razu, że

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} - \frac{1}{2k+7} + \dots$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} - \frac{1}{2k+7} + \frac{1}{2k+9} - \frac{1}{2k+11} + \dots &= \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{2}{(2k+5)(2k+7)} + \frac{2}{(2k+9)(2k+11)} + \dots > \\ > \frac{2}{(2k+1)(2k+5)} + \frac{2}{(2k+5)(2k+9)} + \frac{2}{(2k+9)(2k+13)} + \dots = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2k+5} - \frac{1}{2k+9} + \frac{1}{2k+9} - \frac{1}{2k+13} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{2(2k+1)} > \frac{1}{4(k+1)}. \end{aligned}$$

Mamy również

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} - \frac{1}{2k+7} + \frac{1}{2k+9} - \frac{1}{2k+11} + \dots &= \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{2}{(2k+5)(2k+7)} + \frac{2}{(2k+9)(2k+11)} + \dots = \\ &= \frac{2}{4k^2+8k+3} + \frac{2}{4(k+2)^2+8(k+2)+3} + \frac{2}{4(k+4)^2+8(k+4)+3} + \dots < \frac{2}{4k^2+8k} + \frac{2}{4(k+2)^2+8(k+2)} + \frac{2}{4(k+4)^2+8(k+4)} + \dots = \\ &= \frac{2}{4k(k+2)} + \frac{2}{4(k+2)(k+4)} + \frac{2}{4(k+4)(k+6)} + \dots = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+6} + \dots \right] = \frac{1}{4k}. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi nierówność

$$\frac{1}{4(k+1)} < \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| < \frac{1}{4k}.$$

Jest to nierówność, której dowód był naszym chwilowym celem. Wynika z niej np. że jeżeli ktoś chciałby znaleźć m cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π , to musiałby zsumować 10^m wyrazów szeregu Leibniza, co nie jest pomysłem dobrym ... ■

Konkretna zmiana kolejności sumowania w szeregu anharmonicznym

Zajmiemy się szeregiem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$. Jest on zbieżny, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n-1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n-3} = 0$ oraz $n \geq 3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} = \frac{3}{4n(4n-3)} + \frac{1}{4n(4n-1)} < \frac{3}{4n \cdot 3n} + \frac{1}{4n \cdot 3n} = \frac{1}{3n^2}$. Mamy (grupujemy, dodajemy i odejmujemy, upraszczamy)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right] = \\ &= \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Znaleźliśmy więc sumę szeregu za pomocą w miarę prostych przekształceń korzystając z tego, że jest on zbieżny, że szereg harmoniczny jest zbieżny, że można w szeregu zbieżnym „dostawiać nawiasy” w dowolny sposób.

Obliczymy tę samą sumę jeszcze raz, ale nieco inaczej. Teraz potraktujemy ten szereg jako wartość szeregu potęgowego w punkcie 1. W tym celu rozważymy szereg potęgowy

$$x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \dots$$

Ponieważ szereg $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$ jest zbieżny, więc promień zbieżności rozpatrywanego szeregu potęgowego nie jest mniejszy niż 1. Dla $x \in (-1, 1)$ mamy

$$\begin{aligned} \left[x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \dots \right]' &= \\ = 1 + x^2 - 2x^3 + x^4 + x^6 - 2x^7 + x^8 + x^{10} - 2x^{11} + \dots &= [1 + x^2 - 2x^3][1 + x^4 + x^8 + \dots] = \\ &= [1 + x^2 - 2x^3] \cdot \frac{1}{1-x^4}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że istnieje taka liczba C , że jeżeli $x \in (-1, 1)$, to

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \dots &= C + \int \frac{1+x^2-2x^3}{1-x^4} dx = \\ = C + \int \left[\frac{1}{1-x^2} - \frac{2x^3}{1-x^4} \right] dx &= C + \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{4x^3}{1-x^4} \right] dx = C + \frac{1}{2} [-\ln(1-x) + \ln(1+x) + \ln(1-x^4)] = \\ = C + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1+x)(1-x^4)}{1-x} \right] &= C + \frac{1}{2} \ln[(1+x)(1+x+x^2+x^3)]. \end{aligned}$$

Równość ta zachodzi m.in. dla $x = 0$. Stąd wynika, że $C = 0$. Z twierdzenia o ciągłości szeregu potęgowego i z tego, że otrzymana w końcówce funkcja jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(-1, -\infty)$, więc w szczególności w punkcie 1, wnioskujemy, że

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2} \ln[(1+1)(1+1+1+1)] = \frac{1}{2} \ln 8 = \frac{3}{2} \ln 2,$$

więc tą metodą też zdołaliśmy zsumować ten szereg. ■