

FUNKCJE Γ i β EULERA

Niech $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Ta całka jest zbieżna dla każdej liczby $x > 0$. Mamy bowiem $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt < \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x}$, więc całka po przedziale $0, 1]$ jest skończona nawet wtedy, gdy funkcja podcałkowa nie jest ograniczona. Mamy też $\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt < \infty$, bo dla każdej liczby naturalnej $n > x - 1$ zachodzi nierówność $t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{(n+2)! t^{x-1}}{t^{n+2}} \leq \frac{(n+2)!}{t^2}$, zatem $\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq (n+2)! \int_0^1 t^{-2} dt = (n+2)!$. Wobec tego dla $x > 0$ $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \in (0, \infty)$.

Mamy $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel[\text{przez części}]{\text{całkujemy}} \frac{1}{x} t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$. Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi równość $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Wziąwszy pod uwagę oczywistą równość $\Gamma(1) = 1$ otrzymujemy kolejno $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2, \dots, \Gamma(n) = (n-1)!$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję, której wartość w punkcie n jest równa $(n-1)!$, ale która jest zdefiniowana dla wszystkich liczb dodatnich. Takich funkcji można zdefiniować nieskończenie wiele różnymi wzorami. Zachęcam Państwa do zrobienia tego tak, by otrzymać funkcję klasy C^∞ na $(0, \infty)$, każdy powinien przynajmniej ze dwie takie funkcje zdefiniować dla własnej **satysfakcji**.

Wykażemy, że naturalne warunki nałożone na funkcję Γ możliwości wyboru wykluczą.

Twierdzenie 15.1 (H.Bohra¹)

Istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, że $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$, $\ln \Gamma$ jest funkcją wypukłą.

Dowód poprzedzimy kilkoma lematami. Będziemy mówić *funkcja logarytmicznie wypukła* zamiast *logarytm funkcji jest funkcją wypukłą*.

Lemat 15.2 (o sumie funkcji logarytmicznie wypukłych)

Suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą. Zakładamy dodatkowo, że jeśli któryś koniec dziedziny jest jej elementem, to funkcja jest w nim ciągła, ciągłość wewnątrz dziedziny wynika z wypukłości.

Dowód. Załóżmy, że funkcje f i g są logarytmicznie wypukłe na przedziale I . Oznacza to, że dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzą nierówności $\ln f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}[\ln f(x) + \ln f(y)]$ oraz $\ln g(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}[\ln g(x) + \ln g(y)]$, czyli $f(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{f(x)f(y)}$ i $g(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{g(x)g(y)}$. Udowodnimy, że

$$f(\frac{x+y}{2}) + g(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{(f(x) + g(x))(f(y) + g(y))}.$$

Z logarytmicznej wypukłości funkcji f, g i z nierówności Schwarza wynika, że

$$\begin{aligned} f(\frac{x+y}{2}) + g(\frac{x+y}{2}) &\leq \sqrt{f(x)f(y)} + \sqrt{g(x)g(y)} = \sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + \sqrt{g(x)}\sqrt{g(y)} \leq \\ &\leq \sqrt{[\sqrt{f(x)}]^2 + [\sqrt{g(x)}]^2} \cdot \sqrt{[\sqrt{f(y)}]^2 + [\sqrt{g(y)}]^2} = \sqrt{(f(x) + g(x))(f(y) + g(y))}. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $\ln(f+g)$ jest ciągła, więc aby stwierdzić, że jest wypukła wystarczy sprawdzić warunek Jensena wyłącznie, gdy wagi są równe $\frac{1}{2}$, a to właśnie uczyniliśmy. ■

¹ Młodszy brat Nielsa Bohra, jedyny znany matematyk, który zdobył medal olimpijski, srebrny w 1908 r, piłka nożna, reprezentacja Danii.

Lemat 15.3 (o logarytmicznej wypukłości granicy)

Jeśli $f_n \rightarrow f$ i wszystkie funkcje $f_1, f_2, \dots$ są logarytmicznie wypukłe, to funkcja f też jest logarytmicznie wypukła.

Dowód. Jeśli $0 \leq \alpha \leq 1$, to dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych $x, y \in I$ zachodzi nierówność $\ln f_n(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \ln f_n(x) + (1 - \alpha) \ln f_n(y)$. Stąd i z ciągłości logarytmu wynika nierówność $\ln f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \ln f(x) + (1 - \alpha) \ln f(y)$, a to oznacza, że funkcja graniczna f jest logarytmicznie wypukła. ■

Lemat 15.4 (o logarytmicznej wypukłości całki)

Jeśli $0 < a < A$, to funkcja, która przypisuje liczbie x liczbę $\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$ jest logarytmicznie wypukła

Dowód. Niech $f_n(x) = \frac{A-a}{n} \sum_{j=1}^n \left(a + \frac{j}{n}(A-a)\right)^{x-1} e^{-a-j(A-a)/n}$. Ponieważ $f_n(x)$ to suma Riemanna całki $\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A-a}{n} = 0$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$. Wystarczy więc udowodnić, że funkcja f_n jest logarytmicznie wypukła. Dla każdego wskaźnika $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ funkcja opisana jako $x \rightarrow \left(a + \frac{j}{n}(A-a)\right)^{x-1} e^{-a-j(A-a)/n}$ jest logarytmicznie wypukła, bo jej logarytm jest funkcją zwaną dawniej liniową, a dziś afiniczną. Ponieważ suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła, więc f_n jest logarytmicznie wypukła. ■

Lemat 15.5 (o logarytmicznej wypukłości całki niewłaściwej)

Funkcja przypisująca liczbie $x > 0$ liczbę $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ jest logarytmicznie wypukła.

Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do 0, zaś (A_n) ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do ∞ i niech $a_n < A_n$ dla $n = 1, 2, \dots$, więc $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{A_n} t^{x-1} e^{-t} dt$, zatem teza lematu wynika z lematu o logarytmicznej wypukłości granicy. ■

Z udowodnionych lematów wynika od razu, że funkcja $x \rightarrow \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ spełnia warunki wymienione w twierdzeniu H.Bohra.

Dowód twierdzenia H.Bohra

Niech $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ będzie funkcją taką, że $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$, $\ln \Gamma$ jest funkcją wypukłą i niech $g(x) = \ln \Gamma(x)$. Spełnione są więc warunki

- (i) $g(1) = 0$,
- (ii) $g(x+1) - g(x) = \ln x$,
- (iii) g jest funkcją wypukłą.

Niech $x \in (0, 1]$ i niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Ponieważ iloraz różnicowy funkcji wypukłej jest funkcją niemalejąca każdego swego argumentu z osobna, więc zachodzi nierówność:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{g(n-1) - g(n)}{n-1-n} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{n+x-n} \leq \frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} = g(n+1) - g(n),$$

zatem

$$x \ln(n-1) = x[g(n) - g(n-1)] \leq g(n+x) - g(n) \leq x[g(n+1) - g(n)] = x \ln n.$$

Mamy też

$$\begin{aligned} g(n+x) - g(x) &= g(n+x) - g(n-1+x) + g(n-1+x) - g(n-2+x) + \dots + g(x+1) - g(x) = \\ &= \ln(n-1+x) + \ln(n-2+x) + \dots + \ln(1+x) + \ln x. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$g(n) = g(n) - g(n-1) + g(n-1) - g(n-2) + \dots + g(2) - g(1) = \ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln 1.$$

Wobec tego

$$g(x+n) - g(n) = g(x) + \ln(n-1+x) + \ln(n-2+x) + \dots + \ln(1+x) + \ln x - [\ln(n-1) + \ln(n-2) + \dots + \ln 1] = g(x) + \ln x + \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right).$$

Możemy też napisać $\ln n = \ln(1 + \frac{1}{n-1}) + \ln(1 + \frac{1}{n-2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln(1 + \frac{1}{j})$ oraz $\ln(n-1) = \sum_{j=1}^{n-2} \ln(1 + \frac{1}{j})$. To pozwala napisać podwójną nierówność, w której funkcja g wystąpi już tylko jeden raz:

$$-\ln x - \sum_{j=1}^{n-2} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) + x \sum_{j=1}^{n-2} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) \leq g(x) \leq -\ln x - \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) + x \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right).$$

Jeśli $0 < y \leq 1$, to $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \dots$. Z tej równości wynika, że dla każdego $j \geq 2$ zachodzi nierówność

$$-\frac{x}{2j^2} = \left[\frac{x}{j} - \frac{x^2}{2j^2}\right] - \frac{x}{j} \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) \leq \frac{x}{j} - \left[\frac{x}{j} - \frac{x^2}{2j^2}\right] = \frac{x^2}{2j^2}.$$

Z tej nierówności wynika, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty} [x \ln(1 + \frac{1}{j}) - \ln(1 + \frac{x}{j})]$ jest bezwzględnie zbieżny. Na przedziale $[0, 1]$ zbieżność jest jednostajna. Wobec tego zachodzi równość

$$g(x) = -\ln x + \sum_{j=1}^{\infty} [x \ln(1 + \frac{1}{j}) - \ln(1 + \frac{x}{j})].$$

Okazało się, że funkcja g **musi** być zdefiniowana konkretnym wzorem. Ta uwaga kończy dowód twierdzenia Bohra. ■

Twierdzenie 15.6 (wzór Gaussa)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(1+x)(2+x) \dots (n-1+x)} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{n!}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)}.$$

Dowód. Wzór ten wynika od razu z oszacowań funkcji g i z równości

$$\begin{aligned} \exp\left[-\ln x - \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{j}\right) + x \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)\right] &= \frac{1}{x} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^x \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j}{j+x} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot n^x \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x) \dots (n-1+x)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Twierdzenie 15.7 (wzór Weierstrassa)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{x/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1},$$

gdzie γ oznacza stałą Eulera, tzn. $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \ln(1+1) + \frac{1}{2} - \ln(1 + \frac{1}{2}) + \dots + \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})\right].$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \exp[g(x)] = \exp\left\{-\ln x + \sum_{j=1}^{\infty} [x \ln(1 + \frac{1}{j}) - \ln(1 + \frac{x}{j})]\right\} = \\ &= \exp\left\{-\ln x + \sum_{j=1}^{\infty} x \left[\ln(1 + \frac{1}{j}) - \frac{1}{j}\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{x}{j} - \ln(1 + \frac{x}{j})\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{-\ln x - \gamma x + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{x}{j} - \ln(1 + \frac{x}{j})\right]\right\} = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma x} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} e^{x/j} \left(1 + \frac{x}{j}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dowód wzoru Weierstrassa został zakończony w przypadku $0 < x \leq 1$. Otrzymany iloczyn nieskończony jest zbieżny jednostajnie w każdym zwartym podzbiórze K płaszczyzny, który nie zawiera ani jednej liczby całkowitej niedodatniej (dodatnie nam nie przeszkadzają, dla ujemnych nie wszystkie wyrazy iloczynu nieskończonego są zdefiniowane, więc o zbieżności w ogóle mówić się

² W rzeczywistości możemy wyrażenie $x \ln(1 + \frac{1}{j}) - \ln(1 + \frac{x}{j})$ nieco lepiej oszacować z góry: ta funkcja zmiennej x jest ściśle wypukła jako różnica funkcji liniowej i ściśle wklęsłej, przyjmuje w punktach 0 i 1 wartość 0, zatem na przedziale $(0,1)$ jest ujemna. Mamy więc $-\frac{x}{2j^2} \leq x \ln(1 + \frac{1}{j}) - \ln(1 + \frac{x}{j}) \leq 0$.

nie da). Jednostajna zbieżność iloczynu wynika z tego, że dla dostatecznie dużych n i wszystkich $x \in K$ zachodzi nierówność $|\frac{x}{n}| < \frac{1}{2}$, więc logarytm liczby $1 + \frac{x}{n}$ jest dobrze określony i możemy korzystać z rozwinięcia $\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$. Te same komentarze dotyczą wzoru Gaussa. Z obu wzorów Gaussa i Weierstrassa wynika, że $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$ z wyjątkiem $z = 0, -1, -2, \dots$. Wobec tego oba wzory określają tę samą funkcję. Dla $x > 0$ mamy więc

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(1+x)(2+x)\cdots(n-1+x)} = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{x/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}. \blacksquare$$

Wykażemy teraz, że zachodzi też wzór Stirlinga - nie będzie to jego najsilniejsza wersja, ale będzie to jeszcze jeden dowód na to, że uogólnienie silni na liczby rzeczywiste, a nawet zespolone, zaproponowane przez Eulera jest właściwe.

Twierdzenie 15.8 (wzór Stirlinga)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^x \cdot \sqrt{2\pi x}} = 1.$$

Dowód. Wiemy, że zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+1)e^n}{n^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$. Niech $0 < x \leq 1$. Udowodnimy, że

prawdziwa jest równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1+n)e^{n+x}}{(n+x)^{n+x} \cdot \sqrt{2\pi(n+x)}} = 1$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+1+n)e^{n+x}}{(n+x)^{n+x} \cdot \sqrt{2\pi(n+x)}} &= \\ &= \frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x)}{n! \cdot n^x} \cdot \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n} \cdot \frac{e^x}{(1+\frac{x}{n})^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}} \cdot (1+\frac{x}{n})^x} \end{aligned}$$

— kolejne czynniki dążą do 1: pierwszy, bo prawdziwy jest wzór Gaussa, drugi z wzoru Stirlinga dla $n!$, trzeci i czwarty na mocy dobrze znanych twierdzeń.

Przypomnijmy wzór $\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$, prawdziwy dla każdej liczby zespolonej z . Udowodnimy

Twierdzenie 15.9 (wzór na dopełnienie dla funkcji Γ)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Dowód. Z wzoru Weierstrassa wynika, że zachodzą równości:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \quad \text{ i } \quad \Gamma(1-z) = (-z)\Gamma(-z) = \frac{-z}{-z} \cdot e^{-\gamma(-z)} \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-z)/n} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

Wobec tego zachodzą równości

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \left(z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\right)^{-1} = \pi \left(\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{n^2\pi^2}\right)\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad \square$$

Wniosek 15.10

$$\pi = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \stackrel[t=2x]{t=x^2}{} 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \quad \square$$

Autor napisał ten tekst będąc pod silnym wpływem książki „Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej. Teoria elementarna” N.Bourbaki.

A teraz zajmiemy się funkcją β . Zaczniemy oczywiście od definicji.

Definicja 15.11 (funkcji beta)

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0. \quad \square$$

Definicja ta działa dla liczb dodatnich x, y — całka jest zbieżna, ale to założenie jest niezbędne, jeśli chcemy rozpatrywać te całki.

Udowodnimy:

Twierdzenie 15.12

Dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełniona jest równość $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Lemat 15.13

Dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi wzór $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

Dowód. $\beta(x+1, y) = \int_0^1 t^{x+1-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt \stackrel{\text{przez}}{\text{części}}$
 $= \frac{-1}{x+y}(1-t)^{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \Big|_0^1 + \frac{x}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{x}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{y-1} t^{x-1} dt = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$
 — udało się. $\square$

Dowód. Ustalmy teraz $y > 0$. Niech $f(x) = \beta(x, y)\Gamma(x+y)$. Mamy

$$f(x+1) = \beta(x+1, y)\Gamma(x+1+y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y) \cdot (x+y)\Gamma(x+y) = xf(x) \text{ oraz}$$

$$f(1) = \beta(1, y)\Gamma(1+y) = \left(\int_0^1 (1-t)^{y-1} dt\right)y\Gamma(y) = \Gamma(y).$$

Dodajmy jeszcze, że funkcje $x \mapsto \beta(x, y)$ i $x \mapsto \Gamma(x+y)$ są logarytmicznie wypukłe, a stąd łatwo wynika, że funkcja f też jest logarytmicznie wypukła. Z twierdzenia Bohra wynika więc, że $f(x) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y)$, zatem $\beta(x, y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Zakończyliśmy dowód twierdzenia 12.12. $\square$

I jeszcze jeden wniosek.

Wniosek 15.14

$$\int_0^{\pi/2} \sin^a x \cos^b x dx \stackrel{t=\sin^2 x}{\substack{dt=2\sin x \cos x dx}} \frac{1}{2} \int_0^1 t^{a-1/2} (1-t)^{b-1/2} dt = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad ab > -1. \quad \square$$

Zadanie Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{Z}$ i $n \leq 0$, to $\lim_{x \rightarrow n} |\Gamma(x)| = \infty$.