

Funkcje analityczne — przykłady

wersja 13 lipca 2025

Twierdzenie 14.1 (rozwiniecie sinusa w iloczyn nieskończony)

Dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość

$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) := z \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{z^2}{1^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 \pi^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) \right)$$

przy czym iloczyn jest zbieżny niemal jednostajnie, czyli jednostajnie na każdym zbiorze zwartym $K \subseteq \mathbb{C}$.

Dowód. Najpierw wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian W_n stopnia $2n + 1$, że dla każdej liczby zespolonej z zachodzi równość:

$$\sin(2n + 1)z = W_n(\sin z).$$

Można udowodnić istnienie wielomianu W_n przez indukcję, ale zamiast tego skorzystamy z wzorów Eulera. Mamy

$$\begin{aligned} \sin(2n + 1)z &= \frac{1}{2i} \left((\cos(2n + 1)z + i \sin(2n + 1)z) - (\cos(2n + 1)z - i \sin(2n + 1)z) \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left((\cos z + i \sin z)^{2n+1} - (\cos z - i \sin z)^{2n+1} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n+1-2k-1} z \sin^{2k+1} z = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1 - \sin^2 z)^{n-k} \sin^{2k+1} z := W_n(\sin(z)). \end{aligned}$$

Oczywiście stopień wielomianu W_n nie jest większy niż $2n + 1$. Dla każdej liczby całkowitej k zachodzi równość $W(\sin \frac{k\pi}{2n+1}) = \sin(k\pi) = 0$. Oznacza to, że liczba $\sin \frac{k\pi}{2n+1}$ jest pierwiastkiem wielomianu W_n . Funkcja sinus rośnie (ściśle) na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wobec tego

$$\sin \frac{-n\pi}{2n+1} < \sin \frac{(-n+1)\pi}{2n+1} < \dots < \sin \frac{0 \cdot \pi}{2n+1} < \sin \frac{\pi}{2n+1} < \dots < \sin \frac{n\pi}{2n+1}.$$

Wskazaliśmy więc $2n + 1$ parami różnych pierwiastków wielomianu W_n , więc jego stopień nie jest mniejszy niż $2n + 1$. Pierwiastki wielomianu W_n leżą symetrycznie względem punktu 0 na osi rzeczywistej. Można go przedstawić jako iloczyn:

$$W_n(u) = A_n u \left(1 - \frac{u^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+2}}\right) \left(1 - \frac{u^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+2}}\right) \left(1 - \frac{u^2}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+2}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{u^2}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+2}}\right),$$

A_n oznacza tu pewną stałą, którą niebawem znajdziemy. Niech $u = \sin \frac{z}{2n+1}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin \left((2n + 1) \cdot \frac{z}{2n+1} \right) = W_n \left(\sin \frac{z}{2n+1} \right) = \\ &= A_n \cdot \sin \frac{z}{2n+1} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right). \end{aligned}$$

Z tej równości wynika, że

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\sin \frac{z}{2n+1}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} A_n \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right) = A_n. \end{aligned}$$

Znaleźliśmy więc A_n i możemy napisać wzór:

$$\sin z = z \cdot \frac{\sin \frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

W dalszym ciągu skorzystamy z nierówności

$$(1) \quad \begin{aligned} |(1+z_1)(1+z_2) \cdots (1+z_m) - 1| &\leq \\ &\leq (1+|z_1|)(1+|z_2|) \cdots (1+|z_m|) - 1 \leq e^{|z_1|+|z_2|+\dots+|z_m|} - 1, \end{aligned}$$

którą każdy student z łatwością sam udowodni (np. przez indukcję względem m).

Niech $r > 0$. Załóżmy, że $|z| \leq r$. Istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |\alpha| < \delta$, to $|1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}| < \frac{1}{3}$, zatem $\frac{2}{3} < |\frac{\sin \alpha}{\alpha}| < \frac{4}{3}$. Istnieje taka liczba naturalna $\nu > r$, że jeśli $n > \nu$, to $\frac{|z|}{2n+1} \leq \frac{r}{2n+1} < \delta$. Jeśli $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, to $\sin \beta > \frac{2}{\pi}\beta$, bo funkcja sinus jest ściśle wklęsła na przedziale $[0, \pi]$. Niech $n > \nu$ oraz $0 < j \leq n$. Wtedy

$$(2) \quad \left| \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{j\pi}{2n+1}} \right| \leq \frac{16|z|^2}{9(2n+1)^2} = \frac{16|z|^2}{36j^2} \leq \frac{|z|^2}{2j^2} \leq \exp\left(\frac{|z|^2}{2j^2}\right) - 1 \leq \exp\left(\frac{r^2}{2j^2}\right) - 1.$$

Z nierówności (1) i (2) wynika, że jeśli $0 < k \leq n$, to

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right) - 1 \right| &\leq \\ &\leq \exp\left(\frac{r^2}{2 \cdot 1^2} + \frac{r^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{r^2}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{r^2}{2 \cdot k^2}\right) - 1 \leq \exp(r^2) - 1, \end{aligned}$$

oraz

$$(3) \quad \begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+2)\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+3)\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right) - 1 \right| &\leq \\ &\leq \exp\left(\frac{r^2}{2(k+1)^2} + \frac{r^2}{2(k+2)^2} + \frac{r^2}{2(k+3)^2} + \dots + \frac{r^2}{2n^2}\right) - 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

bowiem jeśli $k \geq 1$, to

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+3)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Niech $M = re^{r^2}$ i niech k będzie taką liczbą, że $M \cdot (\exp(\frac{r^2}{2k}) - 1) < \frac{\varepsilon}{3}$. Jasne jest, że iloczyn $k+2$ ograniczonych czynników (nie zmieniamy k)

$$z \cdot \frac{\sin \frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

przy $n \rightarrow \infty$ dąży jednostajnie na kole $\{z: |z| \leq r\}$ do funkcji

$$z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Mamy oczywiście

$$\begin{aligned} \left| z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \right| &\leq \\ &\leq r \exp\left(\frac{r^2}{\pi^2} + \frac{r^2}{2^2\pi^2} + \frac{r^2}{3^2\pi^2} + \dots + \frac{r^2}{k^2\pi^2}\right) \leq r \exp\left(\frac{r^2}{\pi^2}\right) < re^{r^2} = M. \end{aligned}$$

To oszacowanie wspólne dla tych z , dla których $|z| \leq r$. Niech $\varepsilon > 0$. Oznaczmy:

$$P_n(z) = z \cdot \frac{\sin \frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

$$Q_n(z) = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$R_n(z) = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+2)\pi}{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+3)\pi}{2n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right),$$

$$r_n(z) = \left(1 - \frac{z^2}{(k+1)^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{(k+2)^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{(k+3)^2\pi^2}\right) \cdots$$

Bez trudu stwierdzić można, że $|r_n(z) - 1| < \exp(\frac{r^2}{k^2\pi^2}) - 1 < \exp(\frac{r^2}{2k}) - 1$, wcześniej udowodniliśmy (3), więc $|R_n(z) - 1| \leq \exp(\frac{r^2}{2k}) - 1$ oraz $|P_n(z)| \leq r \exp(r^2)$.

Istnieje taka liczba $n_0 > k$, że jeśli $n > n_0$, to $|P_n(z) - Q_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla wszystkich

liczb z , dla których $|z| \leq r$. W takiej sytuacji mamy:

$$\begin{aligned} |\sin z - z(1 - \frac{z^2}{\pi^2})(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}) \cdots| &= |P_n(z)R_n(z) - Q_n(z)r_n(z)| \leq \\ &\leq |P_n(z)R_n(z) - P_n(z)| + |P_n(z) - Q_n(z)| + |Q_n(z) - Q_n(z)r_n(z)| \leq \\ &\leq M \cdot |R_n(z) - 1| + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot |1 - r_n(z)| < M(\exp(\frac{r^2}{2k}) - 1) + \frac{\varepsilon}{3} + M(\exp(\frac{r^2}{2k}) - 1) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Z otrzymanej nierówności wynika dowodzona teza. ■

Lemat 14.2

Funkcja $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$ jest analityczna w pewnym otoczeniu punktu 0.

Dowód. Zachodzi równość: $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$. Mamy

$$\begin{aligned} x \cos x - \sin x &= x(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots) = \\ &= -\frac{2}{3!}x^3 + \frac{4}{5!}x^5 - \frac{6}{7!}x^7 + \dots = x^3(-\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!}x^2 - \frac{6}{7!}x^4 + \dots) \end{aligned}$$

oraz $x \sin x = x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots) = x^2(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots)$, więc po skróceniu przez x^2 otrzymujemy iloraz

$$\frac{-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \dots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots}.$$

Wobec tego istnieją takie liczby $b_1, b_3, \dots$, że

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = \frac{-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \dots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots} = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + \dots$$

dla wszystkich x dostatecznie bliskich liczbie 0. Z równości

$$-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \dots = (1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots)(b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + \dots)$$

wynika, że $b_1 = -\frac{2}{3!} = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{4}{5!} + \frac{1}{3!}b_1 = -\frac{1}{45}$. Można wypisać bez trudu kilka następnych wzorów na kolejne współczynniki $b_5, b_7, \dots$.

$$\begin{aligned} \text{Zauważmy, że } \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} &= (\ln |\sin x| - \ln |x|)' = (\ln \frac{|\sin x|}{|x|})' = (\ln \frac{|\sin x|}{|x|})' = \\ &= \left(\ln \left((1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}) \cdots \right) \right)' = \left(\ln(1 - \frac{x^2}{\pi^2}) + \ln(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}) + \dots \right)' = \\ &= -2x \left(\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{2^2\pi^2 - x^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Ostatni szereg — dowód niżej — jest jednostajnie zbieżny na każdym zbiorze zwartym K , który nie zawiera ani jednego spośród punktów $\pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Istnieje taka liczba $M > 0$, że jeśli $x \in K$, to $|x| \leq M$. Jeśli $|n| > M$ i $x \in K$, to $|\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}| \leq \frac{1}{n^2\pi^2 - M^2} < \frac{1}{n^2(\pi^2 - 1)}$. Teraz powołamy się na kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego. Wiedząc, że szereg pochodnych jest jednostajnie zbieżny i że szereg funkcji jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie, stwierdzamy, że szereg funkcyjny jest zbieżny, a to właśnie chcieliśmy wykazać.

Niech $0 < r < 1$ i $|x| \leq r\pi$. Mamy wtedy $|\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}| \leq \frac{1}{n^2\pi^2 - |x|^2} \leq \frac{1}{n^2\pi^2 - r^2\pi^2}$ oraz $\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{n^2\pi^2(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})} = \frac{1}{n^2\pi^2} (1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} + \frac{x^4}{n^4\pi^4} + \frac{x^6}{n^6\pi^6} + \dots)$ i wobec tego

$$\frac{1}{n^2\pi^2} (1 + |\frac{x^2}{n^2\pi^2}| + |\frac{x^4}{n^4\pi^4}| + |\frac{x^6}{n^6\pi^6}| + \dots) = \frac{1}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{|x|^2}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{n^2\pi^2 - |x|^2} \leq \frac{1}{n^2\pi^2 - r^2\pi^2}.$$

W szeregu podwójnym $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2(k+1)} \pi^{2(k+1)}}$ można więc zmieniać kolejność sumowania w dowolny sposób zachowując jego sumę. Mamy wobec tego

$$\begin{aligned} b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \dots &= \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - x^2} = \\ &= -2x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2(k+1)} \pi^{2(k+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^{2(k+1)} \pi^{2(k+1)}}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_2 = -\frac{1}{45}$. Porównując współczynniki przy x oraz x^3 po obu stronach równości otrzymujemy

$$-\frac{1}{3} = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^2 \pi^2}, \quad \text{oraz} \quad -\frac{1}{45} = b_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^4 \pi^4}.$$

Z tych równości wynika, że $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ i $\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$. Podobnie uzyskujemy wzory na $1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Lemat 14.3 Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie 0, czyli $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$ dla pewnych liczb $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots$ i wszystkich x spełniających nierówność $|x| < r$, gdzie $r > 0$, $\tilde{a}_0 \neq 0$, to również funkcja $\frac{1}{\tilde{f}(x)}$ jest analityczna w punkcie 0.

Dowód. Niech $a_n = \frac{\tilde{a}_n}{\tilde{a}_0}$ i niech $f(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{a}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Ponieważ $\frac{1}{\tilde{f}(x)} = \frac{1}{\tilde{a}_0 f(x)}$, więc wystarczy wykazać analityczność funkcji $\frac{1}{f(x)}$ w punkcie 0.

Znajdziemy takie liczby $b_1, b_2, \dots$ i liczbę $\varrho > 0$, że $\frac{1}{f(x)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ dla każdego

$x \in (-\varrho, \varrho)$. Z równości $1 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)$ i twierdzenia o mnożeniu szeregów, wynika, że muszą być spełnione równości:

$$a_1 + b_1 = 0, \quad a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0, \quad a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3 = 0, \dots$$

Stąd wzory: $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2 - a_1 b_1$, $b_3 = -a_3 - a_2 b_1 - a_1 b_2$, ... Możemy więc obliczyć współczynniki $b_1, b_2, b_3, \dots$. Pozostaje kwestia zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$.

Niech $c \in (0, r)$. Szereg $\sum a_n c^n$ jest zbieżny, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0$. Istnieje więc taka liczba $M > 1$, że dla każdego $n = 1, 2, \dots$ spełniona jest nierówność $|a_n c^n| < M$ (ciąg o granicy skończonej jest ograniczony). Za pomocą łatwej indukcji dowodzimy, że spełnione są nierówności $|b_n| \leq 2^{n-1} M^n c^{-n}$. Wynika stąd, że szereg $\sum b_n x^n$ jest zbieżny dla każdego $x \in (-\frac{c}{2M}, \frac{c}{2M})$ (być może nie tylko dla tych x), więc ma dodatni promień zbieżności.