

Całki nieoznaczone

Tekst poprawiony 13 lipca 2025

Przypomnijmy, że na tym wykładzie obowiązuje następująca

Definicja 9.1 (wielomianu)

Wielomianem nazywamy funkcję $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lub $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ taką, że istnieją takie liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$, że dla każdego argumentu x zachodzi równość

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu w . ■

Lemat 9.2

Jeżeli jedyną wartością wielomianu w jest liczba 0, to wszystkie jego współczynniki są równe 0.

Dowód. $k!a_k = w^{(k)}(0) = 0$. ■

Twierdzenie 9.3 Jeśli v i w są wielomianami i $w(x) = v(x)$ dla każdego x , to wielomiany w i v mają równe współczynniki. ■

Zadanie.

Wykazać, że jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_j^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_j^n$ dla $j = 1, 2, 3, \dots$, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$ i $x_j \neq 0$ dla $j = 1, 2, 3, \dots$, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. ■

Definicja 9.4 (stopnia wielomianu)

Jeśli $w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ i $a_n \neq 0$, to liczbę naturalną n nazywamy stopniem wielomianu w . Jeśli wszystkie współczynniki wielomianu w są równe 0, to stopniem wielomianu w nazywamy symbol $-\infty$. Stopień wielomianu w oznaczamy symbolem $\deg(w)$. ■

Z definicji stopnia wielomianu wynika od razu, że jeśli w i v są dowolnymi wielomianami, to $\deg(w \cdot v) = \deg(w) + \deg(v)$ oraz że $\deg(w + v) \leq \max(\deg(w), \deg(v))$.

Twierdzenie 9.5 (o dzieleniu z resztą)

Dla dowolnych wielomianów w i v , $\deg(v) \geq 0$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów q, r taka, że $w = qv + r$ i $\deg(r) < \deg(v)$.

Dowód. Jeśli w jest wielomianem stopnia mniejszego niż wielomian v , to możemy przyjąć $q = 0$, $r = w$. Załóżmy teraz, że wielomian w ma stopień nie mniejszy niż wielomian v oraz że teza zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego niż $\deg(w)$. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $v(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k$, $a_n \neq 0 \neq b_k$. Niech $w_1(x) = w(x) - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}v(x)$. Jasne jest, że stopień wielomianu w_1 jest mniejszy niż $n = \deg(w)$. Wobec tego istnieją wielomiany q_1 i r takie, że $w_1 = q_1v + r$ przy czym $\deg(r) < \deg(v)$. Przyjmując $q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}$ otrzymujemy równość $w(x) = q(x)v(x) + r(x)$. Trzeba jeszcze wykazać, że jeżeli $w = qv + r = \tilde{q}v + \tilde{r}$ i $\deg(\tilde{r}), \deg(r) < \deg(v)$, to $\tilde{q} = q$ i $\tilde{r} = r$. Mamy równość $\tilde{r} - r = qv - \tilde{q}v$, zatem $\deg((q - \tilde{q})v) = \deg(\tilde{r} - r) < \deg(v)$, a ponieważ $\deg((q - \tilde{q})v) = \deg(q - \tilde{q}) + \deg(v)$, więc $\deg(q - \tilde{q}) < 0$, zatem $0 = q - \tilde{q}$, więc również $r = \tilde{r}$. Dowód został zakończony. ■

Definicja 9.6 (największego wspólnego dzielnika dwóch wielomianów)

Największym wspólnym dzielnikiem wielomianów w i v nazywamy wielomian d najwyższego stopnia spośród tych, które są jednocześnie dzielnikami w i v , którego współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej równy jest 1 (tj. wielomian unormowany). Oznaczenie: $\text{nwd}(w, v)$. ■

Twierdzenie 9.7 (podstawowe o największym wspólnym dzielniku)

Jeśli co najmniej jeden z wielomianów w i v jest różny od 0, to istnieje dokładnie jeden największy wspólny dzielnik, każdy inny wspólny dzielnik wielomianów w i v jest dzielnikiem $\text{nwd}(w, v)$, istnieją wielomiany p, q , takie że $\text{nwd}(w, v) = pv + qw$.

Dowód. Rozważmy zbiór $\mathcal{P}$ wszystkich niezerowych wielomianów postaci $pv + qw$. Oczywiście $w, v \in \mathcal{P}$ (o ile ich stopnie są nieujemne): $w = 1 \cdot w + 0 \cdot v$, $v = 0 \cdot w + 1 \cdot v$. Wobec tego zbiór $\mathcal{P}$ ma co najmniej jeden element.

Niech $d \in \mathcal{P}$ będzie wielomianem unormowanym najniższego stopnia spośród należących do $\mathcal{P}$.¹ Wykażemy, że $d = q_0w + p_0v$ jest wspólnym dzielnikiem obu wielomianów w i v . Niech $w = qd + r$ dla pewnych wielomianów q, r , przy czym $\deg(r) < \deg(d)$. Wtedy $r = (1 - qq_0)w - qp_0v$. Ponieważ $\deg(r) < \deg(d)$, więc $r = 0$, co oznacza, że d jest dzielnikiem wielomianu w . Ten sam argument przekonuje nas, że wielomian d jest dzielnikiem wielomianu v . Jasne jest też, że każdy wspólny dzielnik wielomianów w, v jest dzielnikiem $p_0v + q_0w = d$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Wniosek 9.8

Jeśli $D = \text{nwd}(w, v)$ i wielomian d jest wspólnym dzielnikiem wielomianów w i v oraz zachodzi równość $\deg(D) = \deg(d)$, to istnieje liczba a taka, że $d = aD$.

Dowód. Ponieważ $D = pv + qw$ dla pewnych wielomianów p, q , więc wielomian d jest dzielnikiem wielomianu D , a ponieważ stopnie tych wielomianów są równe, więc ich iloraz ma stopień 0, zatem jest liczbą. ■

Z tego wniosku wynika, że największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów jest dobrze zdefiniowany: jest tylko jeden wielomian spełniający nałożone warunki!

Definicja 9.9 (dzielnika właściwego)

Dzielnikiem właściwym wielomianu w nazywamy każdy jego dzielnik stopnia dodatniego i jednocześnie mniejszego niż $\deg(w)$. ■

Definicja 9.10 (wielomianu nierozkładalnego)

Wielomianem nierozkładalnym (czyli pierwszym²) nazywamy wielomian, który nie ma dzielników właściwych. ■

Definicja 9.11 (wielomianów względnie pierwszych)

Wielomiany v i w są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{nwd}(w, v) = 1$. ■

Należy sobie uświadomić, że przynajmniej jeden z tych wielomianów musi być niezerowy, bo musi istnieć $\text{nwd}(w, v)$.

¹ Jeśli do $\mathcal{P}$ należy wielomian stopnia α , to należy również wielomian unormowany stopnia α .

² termin angielski: prime ma znaczenie pierwszy, ale jako najważniejszy, np. prime minister.

Wniosek 9.12 (podstawowy o podzielności)

Jeśli wielomiany u i v są względnie pierwsze i u jest dzielnikiem vw , to u jest dzielnikiem w .

Dowód. Istnieją wielomiany p, q takie, że $1 = pu + qv$, zatem $w = upw + qvw$. u jest oczywiście dzielnikiem iloczynu upv i iloczynu qvw (z założenia), zatem jest dzielnikiem ich sumy, czyli wielomianu w . ■

Z lematu podstawowego o podzielności wynika, że każdy wielomian można przedstawić i to jednoznacznie w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych, czyli

Twierdzenie 9.13 (o jednoznaczności rozkładu)

Dla każdego wielomianu unormowanego w stopnia większego od 0 istnieją wielomiany nierozkładalne, unormowane $v_1, v_2, \dots, v_k$ takie, że $w = v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k$ przy czym jeśli $w = \tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{v}_l$ jest innym przedstawieniem w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych, unormowanych, to $l = k$ i po ewentualnej zmianie numeracji czynników zachodzą równości $\tilde{v}_j = v_j$ dla $j = 1, 2, \dots, k$.

Dowód. Jeśli wielomian jest rozkładalny, to ma dzielnik właściwy, więc może być przedstawiony w postaci iloczynu dwóch wielomianów niższego stopnia. Wielomiany stopnia pierwszego są oczywiście nierozkładalne, więc jasne jest (prosta indukcja względem stopnia wielomianu), że każdy wielomian można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych. Jednoznaczność wynika łatwo z tego, że jeśli wielomian nierozkładalny dzieli iloczyn dwóch wielomianów, to dzieli jeden z nich (lemat podstawowy o podzielności): jeśli $\tilde{v}_1$ jest dzielnikiem iloczynu

$$v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k = v_1 \cdot (v_2 \cdot \dots \cdot v_k),$$

to $\tilde{v}_1$ jest dzielnikiem v_1 lub dzielnikiem $v_2 \cdot \dots \cdot v_k$, jeśli jest dzielnikiem v_1 , to ponieważ oba są unormowane i nierozkładalne, więc $v_1 = \tilde{v}_1$, jeśli nie, to jest dzielnikiem iloczynu $v_2 \cdot \dots \cdot v_k$, czyli iloczynu krótszego o jeden czynnik od iloczynu wyjściowego, prosta indukcja przekonuje nas o tym, że wtedy $\tilde{v}_1$ musi być równy jednemu z wielomianów $v_2, v_3, \dots, v_k$, a to oznacza, że każdy z wielomianów $\tilde{v}_j$ jest jednym z wielomianów $v_1, \dots, v_k$, co kończy dowód jednoznaczności. ■

Wypada stwierdzić, że według zasadniczego twierdzenia algebry jedynymi nierozkładalnymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych są wielomiany stopnia pierwszego i te wielomiany stopnia drugiego, które nie mają pierwiastków rzeczywistych. Inaczej jest w przypadku wielomianów o współczynnikach zespolonych – każdy taki wielomian można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego, zatem jedynie wielomiany stopnia pierwszego są w tym przypadku nierozkładalne. Jeszcze inaczej jest w przypadku wielomianów o współczynnikach wymiernych. W tym przypadku jest wiele wielomianów, których nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia niższego niż ich własny. Można np. wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to wielomianu $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x^2 + x + 1$ nie można przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów o współczynnikach wymiernych stopnia mniejszego niż $p-1$. Nie jest to trudne, ale to nie jest tematem naszych rozważań, zostawiamy to ambitnym, zainteresowanym studentom, inni zaczekają na wykład z algebry. W każdym razie zaznaczyć należy, że kwestia rozkładalności zależy od tego, jakie współczynniki

dopuszczamy w rozkładach.

Definicja 9.14 (funkcji wymiernej)

Funkcją wymierną nazywamy funkcję, którą można przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów. Jej dziedziną będzie zbiór tych liczb rzeczywistych (lub zespolonych), dla których mianownik ilorazu zapisanego w postaci nieskracalnej jest różny od 0. ■

Wypada od razu stwierdzić, że w takiej sytuacji licznik i mianownik nie mają wspólnych pierwiastków (w zbiorze dopuszczalnych współczynników). Definicja ta nie jest całkiem zgodna z używanymi w standardowych podręcznikach szkolnych, których autor tego tekstu nie jest w stanie pojąć.

Definicja 9.15 (ułamków prostych)

Ułamkiem prostym nazywamy funkcję wymierną, której mianownik jest potęgą wielomianu nierozkładalnego, a licznik wielomianem stopnia niższego niż wielomian nierozkładalny, którego potęgą jest mianownik. ■

Ułamkami prostymi są więc np. funkcje $\frac{2}{x+1}$, $\frac{x+7}{x^2+x+1}$, $\frac{x-13}{(x^2+5)^{37}}$, $\frac{23}{(x-9)^{100}}$. Funkcje $\frac{x-3}{x-1}$, $\frac{x+1000}{x^2+3x+2}$ ułamkami prostymi nie są. Jasne jest, że ułamki proste są nieskracalne.

Twierdzenie 9.16 (o przedstawianiu funkcji wymiernej w postaci sumy ułamków prostych)

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych. Przedstawienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności składników, jeśli każdy mianownik może wystąpić tylko raz, a wszystkie liczniki są różne od 0.

Dowód. Jasne jest, że każdą funkcję wymierną $\frac{L}{M}$ przedstawić można w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej, której licznik jest wielomianem stopnia niższego niż mianownik – wystarczy podzielić licznik z resztą przez mianownik: $L = QM + R$, wtedy $\frac{L}{M} = Q + \frac{R}{M}$.

Druga obserwacja to stwierdzenie, że jeśli mianownik M jest iloczynem dwóch wielomianów względnie pierwszych $M = M_1M_2$, to można funkcję wymierną zapisać w postaci sumy funkcji wymiernych o mianownikach M_1 i M_2 . Wystarczy skorzystać z twierdzenia podstawowego o największym wspólnym dzielniku: istnieją wielomiany L_1 i L_2 takie, że $1 = L_1M_1 + L_2M_2$, zatem $\frac{R}{M} = \frac{R(L_1M_1 + L_2M_2)}{M_1M_2} = \frac{RL_2}{M_1} + \frac{RL_1}{M_2}$. Te uwagi pozwalają na stwierdzenie, że funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernych, których mianowniki mają stopnie większe niż liczniki i nie można ich przedstawić w postaci iloczynu wielomianów względnie pierwszych (stosujemy indukcję względem stopnia mianownika). Jeśli wielomianu nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów względnie pierwszych, to musi być on potęgą wielomianu nierozkładalnego: w rozkładzie na czynniki nierozkładalne może występować tylko jeden czynnik, oczywiście może on wystąpić wielokrotnie. Następnie można zmniejszać stopień licznika dzieląc go z resztą przez nierozkładalny czynnik mianownika. To kończy to nieco gawędziarskie uzasadnienie istnienia rozkładu.

Kolej na jednoznaczność. Załóżmy, że $w_1 + \frac{p_1}{q_1} = w_2 + \frac{p_2}{q_2}$, gdzie $w_1, w_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ są wielomianami przy czym $\deg(p_i) < \deg(q_i)$ dla $i = 1, 2$. W tej sytuacji mamy $(w_1 - w_2)q_1q_2 = p_2q_1 - p_1q_2$. Oczywiście $\deg(q_1q_2) > \deg(p_2q_1 - p_1q_2)$, zatem $\deg(w_1 - w_2) < 0$, ale to oznacza, że $w_1 - w_2 = 0$, czyli $w_1 = w_2$. Stąd automatycznie wnioskujemy, że $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. Wobec tego możemy się zajmować jedynie funkcjami wymiernymi, których mianownik ma stopień większy niż licznik. Zauważmy jeszcze, że sumując ułamki proste o różnych mianownikach i niezerowych licznikach otrzymujemy ułamek nieskracalny. Jeśli bowiem v jest wielomianem nierozkładalnym, który występuje w mianownikach rozważanych ułamków prostych, m jest największym wykładnikiem z jakim v występuje, to po sprowadzeniu sumy do wspólnego mianownika najniższego stopnia liczniki wszystkich pozostałych składników będą podzielne przez v , a tylko w tym jednym przypadku będzie inaczej. Wobec tego otrzymany ułamek nie da się skrócić przez v , a w rozkładzie mianownika na czynniki pierwsze żadne wielomiany poza występującymi w mianownikach składników rozpatrywanej sumy nie mogą się pojawić. Wobec tego każde dwa „oszczędne” przedstawienia jednej funkcji wymiernej muszą dać ten sam mianownik: ten który otrzymujemy zapisując ją w postaci nieskracalnej.

Założmy teraz, że $\frac{u}{v^m} + \frac{p}{q} = \frac{\tilde{u}}{v^n} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$, $-\infty < \deg(u) < \deg(v)$, $-\infty < \tilde{u} < \deg(v)$, $-\infty < \deg(p) < \deg(q)$, $-\infty < \deg(\tilde{p}) < \deg(\tilde{q})$, p, q są względnie pierwsze, $\tilde{p}, \tilde{q}$ też są względnie pierwsze, wielomian q nie dzieli się przez v^m , wielomian $\tilde{q}$ jest niepodzielny przez v^n , wielomian v jest nierozkładalny. Wykażemy, że wtedy $m = n$ i $u = \tilde{u}$. Dla ustalenia uwagi założymy, że $m > n$. Mamy $(u - \tilde{u}v^{m-n})q\tilde{q} = (\tilde{p}q - p\tilde{q})v^m$. Niech k oznacza mniejszy z dwóch wykładników z jakimi v wchodzi w rozkład na czynniki pierwsze wielomianów q i $\tilde{q}$. Wtedy prawa strona otrzymanej równości jest podzielna przez v^{m+k} , natomiast iloczyn $q\tilde{q}$ przez tę potęgę v nie jest podzielny (ani q ani $\tilde{q}$ nie dzieli się przez v^m). Wobec tego wielomian $u - \tilde{u}v^{m-n}$ jest podzielny przez v . To jednak jest możliwe jedynie wtedy, gdy $m = n$ (bo u przez v się nie dzieli) i jednocześnie $u = \tilde{u}$ (bo stopnie u i $\tilde{u}$ są mniejsze niż $\deg(v)$). Wykazaliśmy, że przy danych założeniach $\frac{u}{v^m} = \frac{\tilde{u}}{v^n}$, więc również $\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$. Ta obserwacja pozwala na zakończenie dowodu jednoznaczności przedstawienia: zmniejszamy indukcyjnie maksymalny stopień z jakim występują potęgi wielomianów nierozkładalnych w naszej sumie ułamków prostych. ■

Uwaga 9.17

W zasadzie wykorzystywać będziemy jedynie istnienie rozkładu, ale ze względów estetycznych podaliśmy również twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na sumę ułamków prostych. Warto też dodać, że rozważane bywają również nieskończone sumy ułamków prostych. Przedstawianie funkcji w takiej postaci pozwala niejednokrotnie na zrzęczniejsze badanie ich własności. ■

Operacja odwrotna do różniczkowania nazywana jest całkowaniem. Dana funkcja traktowana jest jako pochodna pewnej funkcji, którą trzeba znaleźć. Zaczniemy od definicji.

Definicja 9.18 (funkcji pierwotnej czyli całki nieoznaczonej)

Niech $G \subset \mathbb{R}$ będzie sumą pewnej rodziny parami rozłącznych przedziałów. Jeżeli $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją na zbiorze G , to każdą funkcję $F: G \rightarrow \mathbb{R}$, dla której równość $F'(x) = f(x)$ ma miejsce dla każdego $x \in G$ nazywamy funkcją pierwotną lub całką nieoznaczoną funkcji f . Stosujemy oznaczenie $F(x) = \int f(x) dx$. ■

Zauważmy, że jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to dla każdej liczby rzeczywistej C funkcja $F + C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f . Zachodzi

Twierdzenie 9.19 (o jednoznaczności funkcji pierwotnej)

Jeśli P jest przedziałem, $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją a F_1 i F_2 jej funkcjami pierwotnymi, to istnieje taka liczba $C \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $x \in P$ zachodzi równość

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Teza wynika natychmiast z tego, że pochodną funkcji $F_2 - F_1$ jest funkcja tożsamościowo równa 0, więc funkcja $F_2 - F_1$ jest stała. ■

Podkreślić od razu wypada, że jeśli dziedzina nie jest przedziałem, to teza przestaje być prawdziwa. Funkcja $\ln|x|$ jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{x}$.

Niech $F_1(x) = \ln|x|$. Niech $F_2(x) = 1 + \ln x$ dla $x > 0$ i $F_2(x) = \ln(-x)$ dla $x < 0$. Jasne jest, że $F_2'(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x \neq 0$, więc F_2 jest funkcją pierwotną funkcji $\ln$, podobnie jak F_1 . Funkcja $F_2 - F_1$ przyjmuje jednak dwie wartości, mianowicie 0 dla $x < 0$ oraz 1 dla $x > 0$. Nie jest więc stała, chociaż *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji f* . Czasami taką funkcję nazywamy lokalnie stałą. W dalszym ciągu będziemy, zgodnie z przyjętym zwyczajem, pisać

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

jeśli F jest jakąś funkcją pierwotną funkcji f , przy czym C oznaczać tu będzie zawsze funkcję lokalnie stałą, czyli funkcję, która *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji f* .

Przykład 9.20 (całki podstawowe)

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int e^x dx = e^x + C$.
3. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.
6. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x , dla którego funkcja x^a jest określona (jeśli $a > 0$ jest liczbą wymierną postaci $\frac{k}{2m+1}$, k, m – całkowite, to dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R}$, jeśli $a < 0$ jest liczbą wymierną postaci $\frac{k}{2m+1}$, k, m – całkowite, to dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem 0, jeśli $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą innej postaci to dziedziną jest $[0, \infty)$,

w przypadku $a < 0$, które nie jest postaci $\frac{k}{2m+1}$, k, m – całkowite, dziedziną jest $(0, \infty)$.

$$7. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

Te wzory należy zapamiętać. Jasne jest, że nie każda funkcja ma funkcję pierwotną. Niech $f(x) = 0$ dla $x \leq 0$ i niech $f(x) = 1$ dla $x > 0$. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to dla $x \leq 0$ mamy $F'(x) = 0$, więc funkcja F jest stała na półprostej $(-\infty, 0]$. Dla $x > 0$ mamy $F'(x) = 1$, więc musi istnieć stała liczba c , taka że $F(x) = x + c$ dla każdego $x > 0$. Ponieważ F ma być funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, w szczególności w punkcie 0 , więc musi być $F'(x) = c$ dla $x \leq 0$ oraz $F(x) = x + c$ dla $x > 0$. Niestety tak zdefiniowana funkcja nie ma pochodnej w punkcie 0 : lewostronna pochodna to 0 , a prawostronna to 1 . Jest to ilustracja ogólnego zjawiska. Udowodniliśmy przecież, że jeśli funkcja ma funkcję pierwotną, czyli jest pochodną pewnej funkcji, to na każdym przedziale przysługuje jej własność przyjmowania wartości pośrednich, czyli własność Darboux. Warunek ten jest konieczny, ale niestety niedostateczny. Udowodnimy w przyszłości

Twierdzenie 9.21 (o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji ciągłej)

Jeśli $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą na przedziale P , to f ma na nim funkcję pierwotną. ■

W wielu podręcznikach można spotkać uzasadnienie, które przytoczymy, chociaż z naszego punktu widzenia nie jest ono dowodem, bowiem korzysta z pojęcia pola i jego własności, a myśmy o polu nic jeszcze nie mówili. Jednak w niedługim czasie stanie się ono dowodem, choć wtedy nie będziemy już mówić o polu.

Szkic dowodu istnienia funkcji pierwotnej

Założmy najpierw, że funkcja f jest dodatnia. Niech $x_0 \in P$ i niech $x \geq 0$. Niech $F(x)$ oznacza pole obszaru ograniczonego z dołu odcinkiem $[x_0, x]$, z góry wykresem funkcji f , z lewej strony prostą pionową przechodzącą przez punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z prawej strony – prostą pionową przechodzącą przez punkt $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. W przypadku $x < x_0$ zamiast pola analogicznego obszaru rozważamy liczbę ujemną, której wartością bezwzględną jest odpowiednie pole. Wykażemy, że $F'(x) = f(x)$ w przypadku $x > x_0$ pozostawiając rozważenie drugiego przypadku, całkowicie analogicznego, czytelnikom. Założmy, że $h > 0$ jest tak małą liczbą dodatnią, że $x+h \in P$. W tej sytuacji $F(x+h) - F(x)$ jest polem obszaru ograniczonego z dołu odcinkiem $[x, x+h]$, z góry — wykresem funkcji f , z lewej strony — prostą pionową przechodzącą przez $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, z prawej strony — prostą pionową przechodzącą przez $\begin{pmatrix} x+h \\ 0 \end{pmatrix}$. Z rysunku i ze znanego wzoru na pole prostokąta widać, że

$$\inf\{f(t): x \leq t \leq x+h\} \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \sup\{f(t): x \leq t \leq x+h\}$$

— opisany obszar zawiera prostokąt o wysokości $\inf\{f(t): x \leq t \leq x+h\}$ i podstawie h i jest zawarty w prostokącie o wysokości $\sup\{f(t): x \leq t \leq x+h\}$ i podstawie h . Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \{f(t) : x \leq t \leq x+h\} = f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \{f(t) : x \leq t \leq x+h\}.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech funkcjach wynika od razu, że $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

Zmieniając nieznacznie to rozumowanie też, że $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Jeśli funkcja f przyjmuje również wartości ujemne, lub tylko ujemne, to można do niej dodać liczbę dodatnią tak dużą, by wartości nowej funkcji w punktach x_0 , x i $x+h$ oraz wszystkich leżących między nimi były dodatnie. Można to zrobić, bo funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona — rozpatrujemy być może tylko część dziedziny, ale tak wolno postępować, bo interesują nas jedynie wartości przyjmowane przez nią w okolicach x . Na tym zakończymy szkicowanie dowodu. ■

Dowód istnienia funkcji pierwotnej ma wyjaśnić związek całki z polem. w istocie rzeczy pierwsze wzory na pola figur bardziej skomplikowanych uzyskano już w starożytności (koło, parabola, powierzchnia kuli itd.). Istotny postęp uzyskany został dzięki Archimedesowi. Jednak jego pomysły rozumowania długo musiały czekać na kontynuatorów. W praktyce następne poważne osiągnięcia w tej dziedzinie uzyskano dopiero dzięki zauważeniu związku liczenia pól, objętości z różniczkowaniem. Rezultaty Archimedesowa i jego współczesnych stały się teraz banalnymi zadaniami, z którymi radzi sobie wielu studentów, choć wielu z nich miałyby istotne trudności ze zrozumieniem tego, co pisał Archimedes (nawet po przetłumaczeniu na polski lub inny język dla nich zrozumiały).

Warto też wyraźnie stwierdzić, że choć wiemy, że funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne, to jednak nie zawsze daje się je wyrazić za pomocą funkcji, którymi do tej pory operujemy, wiele z nich to tzw. funkcje nieelementarne. Ważny przykład to e^{-x^2} . Jej funkcji pierwotnej nie można wyrazić za pomocą wielomianów, sinusa, kosinusa, funkcji wykładniczej, funkcji odwrotnych do wymienionych, jeśli dopuścimy działania arytmetyczne i składanie funkcji. Tego typu twierdzenia udało się wykazać w drugiej połowie XIX wieku. Ich dowody, a nawet dokładniejsze omówienie, daleko wykraczają poza program nauczania matematyki w wyższych uczelniach, z wyjątkiem niektórych wydziałów matematyki. Wspominamy jednak o tych twierdzeniach, bo funkcja e^{-x^2} jest jedną z częściej używanych w statystyce. Z przyczyn podanych przed chwilą stworzono tablice jej całek, można wybierać funkcję pierwotną tak, by jej granicą przy $x \rightarrow -\infty$ była liczba 0. Druga przyczyna to ostrzeżenie, że problemy wyglądające na elementarne czasem są nierozwiązywalne. Jest wiele innych funkcji tego typu, np. $\frac{\sin x}{x}$, $\sin x^2$, $\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$ przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest wielomianem stopnia > 2 , ale nie szczególnie dobranym ($x^4 + 2x^2 + 1$ nie powoduje żadnych kłopotów, bo pierwiastek to tylko dekoracja!). Często też pozornie mała zmiana zmienia zasadniczo trudność problemu, który trzeba rozwiązać: całka z funkcji e^{-x^2} jest nieelementarna, natomiast $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$!

Wniosek 9.22 (z dowodu twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji ciągłej)

Jeśli funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$, F jest funkcją pierwotną

funkcji f , to pole obszaru $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$, tzw. „pole pod wykresem funkcji f ”, równe jest

$$F(b) - F(a).$$

Dowód. W dowodzie twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji wskazaliśmy funkcję pierwotną F funkcji f , dla której wzór wypisany we wniosku ma miejsce. Ze względu na twierdzenie o jednoznaczności funkcji pierwotnej różnica $F(b) - F(a)$ nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej (różne funkcje pierwotne na przedziale różnią się o stałą). ■

Definicja 9.23 (całki oznaczonej Newtona)

Całką oznaczoną funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$, gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f . Stosujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

Stosujemy też inne oznaczenie: $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$, więc można pisać

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 9.24 $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$, bo pole prostokąta o podstawie $b - a$ i wysokości 1 równe jest $b - a$. ■

Przykład 9.25 $\int_a^b x \mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2}$, bo $\int x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$. To też żadna sensacja. Jeśli $0 \leq a$, to $\int_a^b x \mathrm{d}x$ to pole trapezu o podstawach a i b , którego wysokość równa jest $b - a$, czyli $\frac{1}{2}(b + a)(b - a)$. Jeśli $b \leq 0$, to podstawy trapezu równe są $|a| = -a$ oraz $|b| = -b$, a wysokość równa jest $b - a$, zatem całka jest liczbą przeciwną do pola, więc równa jest $-\frac{1}{2}(-b + (-a))(b - a) = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Pozostał jeszcze jeden przypadek: $a < 0 < b$. Mamy oczywiście $\int_a^b x \mathrm{d}x = \int_a^0 x \mathrm{d}x + \int_0^b x \mathrm{d}x$. Wobec tego tym razem całka równa jest różnicy pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych o ramionach $|a|$ i b . Te pola to oczywiście $\frac{1}{2}b^2$ i $\frac{1}{2}a^2$, całka równa jest $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. ■

Przykład 9.26 $\left(\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}, \text{ bo } \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C\right)$. Wobec tego „pole pod parabolą” równe jest $\frac{1}{3}$ pola prostokąta o wierzchołkach $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix}$. Wzór ten znany był już Archimedesowi, ale jego wyprowadzenie — nie znano jeszcze wtedy całek — było bardzo trudne. ■

Obliczanie całek bywa dosyć trudne, wymaga pomysłowości. My podamy kilka prostych wzorów i pokażemy jak można je stosować w prostych sytuacjach. Obecnie istnieją liczne programy komputerowe, np. Mathematica, Maple, Derive, za pomocą których można obliczyć wiele całek. Tym nie mniej warto znać podstawowe wzory i umieć stosować w prostych sytuacjach.

Twierdzenie 9.27 (o całce sumy dwu funkcji)

Założmy, że funkcje f i g mają funkcje pierwotne. Wtedy funkcje $f \pm g$ też mają funkcje pierwotne i zachodzą wzory

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad \text{oraz}$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Pierwszy z tych wzorów wynika od razu z tego, że pochodna sumy jest sumą pochodnych, różnicy – różnicą pochodnych. Wzór drugi wynika z pierwszego. ■

Twierdzenie 9.28 (o całce iloczynu funkcji przez liczbę)

Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną, to dla każdej liczby rzeczywistej c funkcja cf ma funkcję pierwotną i zachodzi równość

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Wzory wynikają od razu z odpowiednich własności pochodnej. ■

Z obliczaniem całki iloczynu jest o wiele gorzej, bo wzór na pochodną iloczynu jest bardziej skomplikowany, zresztą istnieją funkcje (nieciągłe), które mają funkcje pierwotne a ich iloczyn — nie. Podamy teraz dwa twierdzenia, które w niektórych sytuacjach pozwalają uprościć obliczanie całki z iloczynów bardzo szczególnej postaci.

Twierdzenie 9.29 (o całkowaniu przez części)

Założmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wtedy zachodzi wzór:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Dla całki oznaczonej

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o pochodnej iloczynu. ■

Twierdzenie 9.30 (o całkowaniu przez podstawienie)

Założmy, że funkcje f i g' są ciągłe oraz że F jest funkcją pierwotną funkcji f . Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F(y) dy = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Ten wzór wynika natychmiast z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. ■

Ostatnie dwa twierdzenia w połączeniu z poprzednimi stanowią dobrą podstawę do znajdowania całek z licznych funkcji zdefiniowanych elementarnie. Zanim pokażemy, jak można to robić powiemy jakie oznaczenia są często stosowane.

Umowa 9.31 (w kwestii oznaczeń)

Zamiast pisać $g'(x) dx$ będziemy pisać $dg(x)$; jeśli napiszemy $y = g(x)$, to konsekwentnie przyjmujemy, że $dy = g'(x) dx = dg(x)$. ■

Zauważmy, że jeśli funkcja g jest różnowartościowa, czyli ma funkcję odwrotną g^{-1} , to równość $y = g(x)$ równoważna jest równości $x = g^{-1}(y)$. Wtedy, zgodnie z przyjętą umową, możemy napisać $dx = d(g^{-1})(y) = (g^{-1})'(y) dy$. Na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej mamy $(g^{-1})'(y) = (g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$. Wobec tego $dx = d(g^{-1})(y) = \frac{1}{g'(x)} dy$, co w świetle wzoru $y = dg(x) = g'(x) dx$, wygląda na zupełnie oczywiste stwierdzenie. Jednak należy pamiętać o tym, że symbole dx , dy nie oznaczają liczb, w ogóle nie były przez nas zdefiniowane. Występują jedynie w połączeniu z innymi. Wobec tego nie jest całkiem jasne, czy reguły działań na liczbach mają zastosowanie również w tym przypadku, a dokładniej: które reguły pozostają w mocy. Okazało się, że wnioskowanie, jeśli $dy = g'(x) dx$, to $dx = \frac{1}{g'(x)} dy$ ma sens dzięki twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej! Przypomnieć wypada, że oprócz stosowanego przez nas oznaczenia pochodnej $y' = g'(x)$ stosowane jest oznaczenie $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Symbol $\frac{dy}{dx}$ jest oznaczeniem pochodnej, nie jest ułamkiem. Można go jednak często traktować jak iloraz. Czytelnicy przekonają się jeszcze wiele razy, że upraszcza to manipulowanie wzorami. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x = h(t)$, to oprócz równości $dy = g'(x) dx$ mamy też $dx = h'(t) dt$. Chciałoby się wywnioskować z tych wzorów, że $dy = g'(x)h'(t) dt$. Można to zrobić, bo $y = g(h(t))$, więc $dy = (g \circ h)'(t) dt$, ale dzięki twierdzeniu o pochodnej złożenia zachodzi równość $(g \circ h)'(t) = g'(h(t))h'(t)$, zatem również $dy = g'(h(t))h'(t) dt$. Widać więc znów analogię z ułamkami: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, czyli $dy = (g \circ h)'(t) dt = g'(h(t))h'(t) dt = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$. Zakończymy te przydługie rozważania na temat oznaczeń stwierdzeniem, że wzór na całkowanie przez części zwykle zapisywany jest w postaci:

$$\int f(x)g'(x) dx = \int f dg = fg - \int g df = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$

a wzór na całkowanie przez podstawienie – w postaci:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy.$$

Przykład 9.32 $\int e^{2x} dx \stackrel{y=2x}{\underset{dy=2dx}} = \int e^y \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$. ■

Przykład 9.33 $\int xe^{x^2} dx \stackrel{y=x^2}{\underset{dy=2xdx}} = \int e^y \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. ■

Przykład 9.34 $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \stackrel{\substack{y=\cos x \\ dy=-\sin x \, dx}}{=} - \int \frac{1}{y} \, dy = -\ln |y| + C =$
 $= -\ln |\cos x| + C. \blacksquare$

Przykład 9.35 $\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \stackrel{\substack{x=r \sin t \\ dx=r \cos t \, dt}}{=} \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \, r \cos t \, dt =$
 $= \int \sqrt{r^2 \cos^2 t} \, r \cos t \, dt = \int r^2 \cos^2 t \, dt = r^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt \stackrel{\substack{u=2t \\ du=2dt}}{=} r^2 \int \frac{1+\cos u}{2} \cdot \frac{du}{2} =$
 $= \frac{r^2}{2} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin u}{2} \right) + C = \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{r^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} +$
 $+ \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + C$ — w tym przypadku przyjęliśmy $x = r \sin t$. Możemy przyjąć, że $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, bo wtedy x będzie przyjmować wszystkie wartości z przedziału $[-r, r]$, w tej sytuacji $\cos t \geq 0$ i wobec tego zachodzi równość $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. $\blacksquare$

Przykład 9.36 $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left[r^2 \arcsin \frac{r}{r} + r \sqrt{r^2 - r^2} - r^2 \arcsin \frac{-r}{r} - \right.$
 $\left. - (-r) \sqrt{r^2 - (-r)^2} \right] = \frac{1}{2} [2r^2 \arcsin 1] = r^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2}.$

Skorzystaliśmy tu oczywiście z wyniku otrzymanego w przykładzie poprzednim. Obliczana całka okazała się połową koła o promieniu r , co nie jest specjalnie dziwne, bo wykres funkcji $\sqrt{r^2 - x^2}$ jest górną połową okręgu o środku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i promieniu r , więc „pole pod wykresem” to połowa pola koła o promieniu r . $\blacksquare$

Przykład 9.37 $\int x e^x \, dx = \int x (e^x)' \, dx \stackrel{\substack{\text{całkujemy} \\ \text{przez części}}}{=} x e^x - \int (x)' e^x \, dx =$
 $= x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C. \blacksquare$

Przykład 9.38 $\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 (e^x)' \, dx \stackrel{\substack{\text{całkujemy} \\ \text{przez części}}}{=} x^2 e^x - \int (x^2)' e^x \, dx =$
 $= x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \stackrel{\substack{\text{poprzedni} \\ \text{przykład}}}{=} x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C =$
 $= e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$ W tym przykładzie skorzystaliśmy z wyniku uzyskanego w poprzednim. Widać, że postępując analogicznie można obliczać całki z funkcji $x^3 e^x$, $x^4 e^x$ itd. – jednokrotne całkowanie przez części obniża stopień wielomianu, przez który mnożymy funkcję wykładniczą o 1, więc wielokrotne pozwala na pozbycie się go, czyli sprowadzenie problemu do obliczenia całki $\int e^x \, dx$, a z tym już sobie poradzimy. $\blacksquare$

Przykład 9.39 $\int x e^{3x} \, dx = \int x \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right)' \, dx \stackrel{\substack{\text{całkujemy} \\ \text{przez części}}}{=} \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int (x)' e^{3x} \, dx =$
 $= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$ – ostatnie całkowanie przez podstawienie ($y = 3x$) potraktowaliśmy już jako na tyle oczywiste, że nawet tego specjalnie nie zaznaczyliśmy. $\blacksquare$

Przykład 9.40 $\int x \cos(5x) \, dx = \int x \left(\frac{1}{5} \sin(5x) \right)' \, dx \stackrel{\substack{\text{całkujemy} \\ \text{przez części}}}{=} \frac{1}{5} x \sin(5x) - \frac{1}{5} \int (x)' \sin(5x) \, dx =$
 $= \frac{1}{5} x \sin(5x) - \frac{1}{5} \int \sin(5x) \, dx = \frac{1}{5} x \sin(5x) - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{5} \cos(5x) \right) + C =$
 $= \frac{1}{5} x \sin(5x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + C. \blacksquare$

Przykład 9.41 $\int \ln x \, dx \stackrel{\text{całkujemy}}{\text{przez części}} x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x} \right) dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$
 $= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \blacksquare$

Przykład 9.42 $\int \arcsin x \, dx \stackrel{\text{całkujemy}}{\text{przez części}} x \arcsin x - \int x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$
 $= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{y=1-x^2}{dy=-2x dx} x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy =$
 $= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int y^{-1/2} dy = x \arcsin x + \frac{1}{2(1+(-1/2))} y^{1+(-1/2)} + C =$
 $= x \arcsin x + (1-x^2)^{1/2} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \blacksquare$

Przykład 9.43 $\int \frac{dx}{2x-3} \stackrel{y=2x-3}{dy=2 dx} \int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \ln |y| + C = \frac{1}{2} \ln |2x-3| + C. \blacksquare$

Przykład 9.44 $\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx.$

Można spodziewać się, że wyrażenie $\frac{x}{x^2+3x+2}$ jest sumą ułamków postaci $\frac{A}{x+1}$ oraz $\frac{B}{x+2}$. Aby równość $\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ miała miejsce musi być $x = A(x+2) + B(x+1)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -1, -2$.³ Wobec tego musi być $A+B=1$ i $2A+B=0$, więc $A=-1$ i $B=2$. Mamy więc

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = -\ln |x+1| + 2 \ln |x+2| + C = \ln \frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C. \blacksquare$$

W ostatnim przykładzie skorzystaliśmy z tego, że funkcja wymierna jest sumą ułamków prostych. Pokażemy na kilku przykładach jak ta metoda działa.

Przykład 9.45 $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{(x^2+2x+2)(x-2)+2x+4}{x^2+2x+2} dx =$
 $= \int (x-2 + \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2} dx =$
 $= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} \frac{1}{2} + \int \frac{2}{(x+1)^2+1} (x+1) \stackrel{\text{całkujemy}}{\text{przez podstawienia}} =$
 $= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C.$

To wygląda trochę na stosowanie jakichś sztuczek. Tak jednak nie jest. Można było przewidzieć jak będą wyglądać ułamki proste, których sumą będzie dana funkcja wymierna. Stopień licznika jest o jeden większy niż stopień mianownika, więc powinien wystąpić wielomian stopnia pierwszego oraz ułamek, którego licznik jest wielomianem stopnia nie większego niż 1, a mianownik równy jest x^2+2x+2 . Można więc było spróbować napisać $\frac{x^3}{x^2+2x+2} = ax+b + \frac{px+q}{x^2+2x+2}$. Po pomnożeniu przez mianownik otrzymujemy równość $x^3 = (ax+b)(x^2+2x+2) + px+q =$
 $= ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+2b+p)x + (2b+q)$. Z równości wielomianów wynika równość ich współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x . Muszą więc być spełnione równości $1=a$, $0=2a+b$, $0=2a+2b+p$ oraz $0=2b+q$. Otrzymaliśmy układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Teraz trzeba go rozwiązać, co w tym przypadku nie stanowi żadnego problemu: $a=1$, $b=-2a=-2$, $p=-2a-2b=2$

³ W rzeczywistości ponieważ funkcje x oraz $A(x+2)+B(x+1)$ są ciągłe we wszystkich punktach, w tym w punkcie $x=-1$ i w punkcie $x=-2$, równość musi mieć miejsce również dla $x=-1, -2$.

i wreszcie $q = -2b = 4$. Później po prostu obliczyliśmy pochodną mianownika i zapisaliśmy licznik w postaci *stała · pochodna mianownika + inna stała*, co ułatwiło ostateczne obliczenie całki. ■

Przykład 9.46 Obliczmy $\int \frac{1}{1+x^4} dx$. Zaczniemy od rozkładu na ułamki proste. W tym celu przedstawimy mianownik w postaci iloczynu wielomianów stopnia nie większego niż 2. Mamy

$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$. Teraz znajdziemy takie liczby rzeczywiste a, b, c i d , że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Mnożąc tę równość przez $1+x^4$, skracając co się tylko da i porządkując otrzymujemy:

$$1 = (ax+b)(x^2+x\sqrt{2}+1) + (cx+d)(x^2-x\sqrt{2}+1) = \\ = (b+d) + x(a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2}) + x^2(b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}) + x^3(a+c).$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x stwierdzamy, że

$$b+d=1, \quad a+c+(b-d)\sqrt{2}=0, \quad b+d+(a-c)\sqrt{2}=0, \quad a+c=0.$$

Mamy cztery równania i cztery niewiadome. Ponieważ $a+c=0$ (równanie czwarte), więc z drugiego równania możemy wywnioskować równość $b=d$, a z niej i z równania pierwszego wynika, że $b=d=\frac{1}{2}$. Z równania trzeciego i już uzyskanych wyników wynika, że $a=-c=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$. Wobec tego zachodzi równość

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Teraz wystarczy scałkować oba składniki. Scałkujemy drugi, bo ma lepszy wygląd zewnętrzny (mniej minusów). Mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx &= \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{(x^2+x\sqrt{2}+1)' + \sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \int \frac{(x^2+x\sqrt{2}+1)'}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{4} \int \frac{2}{(\frac{x\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})^2+1} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} (x\sqrt{2}+1) dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + C. \end{aligned}$$

Teraz można obliczyć drugą całkę w taki sam sposób, ale nie ma takiej potrzeby.

Wystarczy zauważyć, że $\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}dx+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx \stackrel{\substack{u=-x \\ du=-dx}}{=}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}u+\frac{1}{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1} (-du) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln(u^2+u\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(u\sqrt{2}+1) + C =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(-x\sqrt{2} + 1) + C = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) + C.
\end{aligned}$$

Dodając obliczone całki otrzymujemy

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) \right) + C.$$

W ten sposób zakończyliśmy obliczenia. ■

Pokażemy jak można to zrobić nieco krócej. Zauważmy, że

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{1+x^4} + \frac{1+x^2}{1+x^4} \right).$$

Wobec tego można obliczyć dwie całki: $\int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx$ oraz $\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$. Można je oczywiście obliczyć rozkładając funkcje podcałkowe na ułamki proste, ale nie jest to konieczne. Zachodzą równości

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx &= \int \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx = - \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} \stackrel{\substack{y=x+1/x \\ dy=1-1/x^2}}{=} - \int \frac{dy}{y^2 - 2} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{y + \sqrt{2}} - \frac{1}{y - \sqrt{2}} \right) dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\ln|y + \sqrt{2}| - \ln|y - \sqrt{2}| + C) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{y + \sqrt{2}}{y - \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza całka została znaleziona. Teraz zajmijmy się drugą.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx &= \int \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx = \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} \stackrel{\substack{y=x-1/x \\ dy=1+1/x^2}}{=} \int \frac{dy}{y^2 + 2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\frac{y}{\sqrt{2}})}{1 + (\frac{y}{\sqrt{2}})^2} \stackrel{\substack{z=y/(\sqrt{2}) \\ dz=dy/(\sqrt{2})}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} z = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right) + C.^4$$

Widzimy więc, że otrzymaliśmy wynik nieco inny niż poprzednio! Można jednak się przekonać, że jest to ten sam wynik. Wystarczy skorzystać ze łatwego do dowodu wzoru $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$ — by przekonać się o jego prawdziwości wystarczy obliczyć wartość tangensa obu stron tej podejrzanej równości korzystając z tego, że $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, a potem jeszcze trochę pomęczyć się z interpretacją równości

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) \right) + C = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

np. dla $x = 0$; wg drugiej wersji wzoru funkcja pierwotna w punkcie 0 określona

⁴ Powinna wystąpić suma dwu stałych, ale to i tak jest dowolna stała, a raczej funkcja stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie, więc nie ma potrzeby zmieniać oznaczeń.

nie jest, wg. pierwszej jest, z cytowanych twierdzeń ogólnych wynika, że powinna być określona na całej prostej. Pokazaliśmy więc dwie metody, otrzymaliśmy na tyle różne wyglądające wyniki, że niewielu studentów pierwszego roku stwierdziłoby, że to w istocie rzeczy ten sam wynik różniący się jedynie zapisem. To dosyć częste zjawisko przy całkowaniu, ale nie będziemy tych problemów omawiać, zasygnalizowaliśmy jedynie zjawisko. ■

Przykład 9.47 Obliczmy całkę $\int \frac{x^5}{1+x^4} dx$. Można jak w przykładach poprzednich przedstawić funkcję podcałkową w postaci ułamków prostych, ale w tym konkretnym przypadku widać od razu prostszą metodę. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{1+x^4} dx &\stackrel{y=x^2}{\underset{dy=2x dx}} \frac{1}{2} \int \frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2}(y - \arctg y) + C = \frac{1}{2}(x^2 - \arctg x^2) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Przykład 9.48 Obliczmy całkę $\int e^{2x} \sin 3x dx$. Będziemy całkować przez części dwukrotnie.

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (e^{2x})' \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} (\sin 3x)' dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} \int (e^{2x})' \cos 3x dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} \int e^{2x} (\cos 3x)' dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx. \end{aligned}$$

W kilku przekształceniach sprowadziliśmy obliczanie całki $\int e^{2x} \sin 3x dx$ do obliczania tej samej całki! To nie jest bez sensu wbrew pozorom: *uzyskaliśmy równanie, w którym niewiadomą jest poszukiwana całka*. Starczy je teraz rozwiązać. Otrzymujemy równość

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{2}{13} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{13} e^{2x} \cos 3x + C$$

Stałej C w równaniu nie było, ale teraz musi się pojawić. Równość całek nieoznaczonych oznacza jedynie, że różnica między tymi funkcjami pierwotnymi jest funkcją lokalnie stałą, więc gdy wszystkie całki znajdują się po jednej stronie równości trzeba dopisać C po drugiej stronie tej równości. ■

$$\begin{aligned} \textbf{Przykład 9.49} \quad \int \sqrt{4+x^2} dx &\stackrel{x=2 \operatorname{tg} t}{\underset{dx=2(1+\operatorname{tg}^2 t) dt}} 2 \int \sqrt{4+4 \operatorname{tg}^2 t} (1+\operatorname{tg}^2 t) dt = \\ &= 4 \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right) dt = 4 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = 4 \int \frac{\cos t}{\cos^4 t} dt = 4 \int \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2} dt \stackrel{y=\sin t}{\underset{dy=\cos t dt}} \\ &= 4 \int \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)^2 dy = \int \left(\frac{1}{(1-y)^2} + 2\frac{1}{1-y} \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2}\right) dy = \\ &= \int \left(\frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2}\right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int ((1-y)^{-2} + (1-y)^{-1} + (1+y)^{-1} + (1+y)^{-2}) dy = \\
&= (1-y)^{-1} - \ln|1-y| + \ln|1+y| - (1+y)^{-1} + C = \frac{2y}{1-y^2} + \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + C.
\end{aligned}$$

Wypada powrócić do zmiennej x . Podstawialiśmy $x = 2 \operatorname{tg} t$. Możemy oczywiście zakładać, że $|t| < \frac{\pi}{2}$, bowiem każdą liczbę x można przedstawić w postaci $2 \operatorname{tg} t$ wybierając liczbę t z przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ten wybór liczby t gwarantuje, że $\cos t > 0$, z czego zresztą już raz skorzystaliśmy. Mamy więc

$$\frac{1}{\cos t} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + x^2}.$$

Stąd wnioskujemy, że zachodzą równości $\frac{2y}{1-y^2} = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} = 2 \operatorname{tg} t \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4 + x^2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Mamy też } \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| &= \ln \frac{1+y}{1-y} = \ln \frac{(1+y)^2}{1-y^2} = \ln \frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} = 2 \ln \frac{1+\sin t}{\cos t} = \\
&= 2 \ln \left(\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t \right) = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right).
\end{aligned}$$

Ostatecznie $\int \sqrt{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4+x^2} + 2 \ln \left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right) + C$.

Tę równość można uzyskać nieco szybciej stosując tzw. podstawienia Eulera. Podstawimy $y - x = \sqrt{x^2 + 4}$, czyli $y^2 - 2xy = 4$, tzn. $x = \frac{y^2-4}{2y}$. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}
dx &= d \left(\frac{y^2-4}{2y} \right) = d \left(\frac{y}{2} - \frac{2}{y} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{y^2} \right) dy. \text{ Wobec tego} \\
\int \sqrt{4+x^2} dx &= \int \left(y - \left[\frac{y^2-4}{2y} \right] \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{y^2} \right) dy = \int \frac{[y^2+4]^2}{4y^3} dy = \int \left[\frac{y}{4} + \frac{2}{y} + \frac{4}{y^3} \right] dy = \\
&= \frac{y^2}{8} + 2 \ln|y| - \frac{2}{y^2} + C = \frac{1}{8} (x + \sqrt{x^2+4})^2 + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) - \frac{2}{(x+\sqrt{x^2+4})^2} + C = \\
&= \frac{1}{8} (x + \sqrt{x^2+4})^2 + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) - \frac{1}{8} (\sqrt{4+x^2} - x)^2 + C = \\
&= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+4} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C.
\end{aligned}$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że ten wynik i poprzednie różnią się jedynie o stałą. ■

Ogólnie rzecz biorąc wyrażenia zawierające jeden pierwiastek kwadratowy z wielomianu pierwszego lub drugiego stopnia można scałkować stosując jakieś podstawienie trygonometryczne, jak w tym przykładzie, lub podstawienia Eulera lub też podstawienia hiperboliczne. To są zamienne metody. W niektórych sytuacjach jedne dają wynik szybciej niż inne, ale które to zależy od całkowanej funkcji. Opowiemy o tym nieco dokładniej niebawem.

Definicja 9.50 (wielomianu i funkcji wymiernej dwu zmiennych)

Jeśli $w_0, w_1, \dots, w_n$ są wielomianami zmiennej x i

$$P(x, y) = w_0(x) + w_1(x)y + \dots + w_n(x)y^n,$$

to funkcję P nazywamy wielomianem zmiennych x, y . Jeśli funkcje P, Q są wielomianami zmiennych x, y i $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, to funkcja R nazywana jest funkcją wymierną zmiennych x, y . ■

Jeśli R jest funkcją wymierną dwu zmiennych i $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, to całkę postaci $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej podstawiając

$w = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Wtedy $x = \frac{dw^2-b}{-cw^2+a}$, zatem $dx = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} \frac{2w}{(-cw^2+a)^2} dw$ i wobec tego

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dw^2-b}{-cw^2+a}, w\right) \cdot \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} \cdot \frac{2w}{(-cw^2+a)^2} dw.$$

Jeśli R jest funkcją wymierną dwu zmiennych to całkę $\int R(\cos x, \sin x) dx$ można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej podstawiając $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. To tzw. podstawienie uniwersalne. Korzystamy z wzoru $\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ — w ostatnim kroku podzieliśmy licznik i mianownik przez $\cos^2 \frac{x}{2}$. Podobnie otrzymujemy wzór $\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$. Wreszcie z wzoru $x = 2 \operatorname{arctg} t$ wynika, że $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, zatem

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Znów R jest funkcją wymierną dwu zmiennych. Teraz zajmiemy się całką

$$\int R\left(x, \sqrt{(ax^2+bx+c)}\right) dx.$$

Dobierając odpowiednio liczby p, q i podstawiając $x = py + q$ możemy sprowadzić całkę do jednej z trzech postaci

$$\int \tilde{R}(y, \sqrt{y^2+1}) dy, \quad \int \tilde{R}(y, \sqrt{y^2-1}) dy, \quad \int \tilde{R}(y, \sqrt{1-y^2}) dy,$$

gdzie $\tilde{R}$ oznacza odpowiednio dobraną funkcję wymierną dwu zmiennych. W pierwszym przypadku możemy podstawić $y = \operatorname{tg} \alpha$, w drugim — $y = \frac{1}{\cos \alpha}$, w trzecim — $y = \sin \alpha$. We wszystkich trzech przypadkach problem zostaje sprowadzony do znalezienia całki z wyrażenia wymiernego zmiennych $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$. To jedna z możliwości, ale są inne. Korzystaliśmy tu z równości $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ lub jej wariantu $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ i dzięki temu można uwolnić się od pierwiastka. Można też użyć tzw. funkcji hiperbolicznych.

Definiowane one są tak: $\cosh x = \cos(ix) = \frac{1}{2}(e^{i \cdot ix} + e^{-i \cdot (ix)}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ oraz $\sinh x = -i \sin(ix) = -i \frac{1}{2i}(e^{i \cdot ix} + e^{-i \cdot (ix)}) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Z tego określenia wynika natychmiast, że

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \cos^2(ix) - (-i)^2 \sin^2(ix) = \cos^2(ix) + \sin^2(ix) = 1.$$

Mamy też $(\cosh x)' = (\cos(ix))' = -i \sin(ix) = \sinh x$, $(\sinh x)' = (-i \sin(ix))' = -i \cdot i \cos(ix) = \cosh x$. Wynika stąd, że w całce $\int \tilde{R}(y, \sqrt{y^2+1}) dy$ podstawienie $y = \sinh t$ doprowadzi do zlikwidowania pierwiastka:

$$\int \tilde{R}(y, \sqrt{y^2+1}) dy = \int \tilde{R}(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt,$$

a w całce $\int \tilde{R}(y, \sqrt{y^2-1}) dy$ pierwiastek zlikwiduje podstawienie $y = \cosh t$:

$$\int \tilde{R}(y, \sqrt{y^2-1}) dy = \int \tilde{R}(\cosh t, \sinh t) \sinh t dt.$$

Oczywiście należy przy pierwiastkowaniu zwracać uwagę na znaki, czego teraz nie robimy w ogóle.

Teraz kilka słów o **podstawieniach Eulera**, które są jeszcze innym narzędziem pozwalającym na pozbycie się pierwiastków kwadratowych z wielomianów kwadratowych. Zajmuje się jak poprzednio całką $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Rozważymy trzy przypadki, które nie wykluczają się wzajemnie.

Pierwszy przypadek to $a > 0$. Definiujemy nową zmienną następującym wzorem $t - x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Mamy więc $t^2 - 2xt\sqrt{a} + ax^2 = ax^2 + bx + c$, czyli $x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}$, zatem $dx = \frac{2t(2t\sqrt{a} + b) - 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(2t\sqrt{a} + b)^2} dt = \frac{2t^2\sqrt{a} + 2tb + 2c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a} + b)^2} dt$. Możemy więc napisać

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}, t - \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}\right) \frac{2t^2\sqrt{a} + 2tb + 2c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a} + b)^2} dt.$$

Oczywiście taki sam sukces osiągniemy podstawiając w tym przypadku $t + x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Drugi przypadek to $c > 0$. Teraz podstawmy $tx - \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Z tej równości wynika, że $t^2x^2 - 2tx\sqrt{c} + c = ax^2 + bx + c$, czyli $x = \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}$, więc $dx = -2\frac{t^2\sqrt{c} + bt + a\sqrt{c}}{(t^2 - a)^2} dt$ i wobec tego

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = -2 \int R\left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}, t\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} - \sqrt{c}\right) \frac{t^2\sqrt{c} + bt + a\sqrt{c}}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Trzeci przypadek to sytuacja, w której wielomian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastki rzeczywiste α, β . Wtedy $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, więc (z dokładnością do znaków, co zależy na ogół od przedziału) otrzymujemy $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\sqrt{a\frac{x - \beta}{x - \alpha}}$, co jak wiemy, można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej za pomocą podstawienia $t = \sqrt{a\frac{x - \beta}{x - \alpha}}$.

Podamy teraz jeden przykład całkowania za pomocą podstawień Eulera. Szukać będziemy $\int x^2\sqrt{x^2 - 5x + 6} dx$. Zastosujemy najpierw pierwsze podstawienie Eulera. Przyjmujemy $t - x = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, czyli $t^2 - 2tx = -5x + 6$, tzn. $x = \frac{t^2 - 6}{2t - 5}$. Mamy więc $dx = 2\frac{t^2 - 5t + 6}{(2t - 5)^2} dt$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{x^2 - 5x + 6} dx &= 2 \int \left(\frac{t^2 - 6}{2t - 5}\right)^2 \left(t - \frac{t^2 - 6}{2t - 5}\right) \frac{t^2 - 5t + 6}{(2t - 5)^2} dt = 2 \int \left(\frac{t^2 - 6}{2t - 5}\right)^2 \frac{(t^2 - 5t + 6)^2}{(2t - 5)^3} dt = \\ &= 2 \int \frac{1}{(2t - 5)^5} \left[\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(t - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{4}\right]^2 \left[\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] dt = \\ &= \frac{1}{16} \int \left[\left(t - \frac{5}{2}\right)^3 + 10\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + 25\left(t - \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} - \frac{101}{8\left(t - \frac{5}{2}\right)} - \frac{5}{8\left(t - \frac{5}{2}\right)^2} + \frac{25}{16\left(t - \frac{5}{2}\right)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{32\left(t - \frac{5}{2}\right)^4} + \frac{1}{256\left(t - \frac{5}{2}\right)^5}\right] dt = \\ &= \frac{1}{64}\left(t - \frac{5}{2}\right)^4 + \frac{5}{24}\left(t - \frac{5}{2}\right)^3 + \frac{25}{32}\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(t - \frac{5}{2}\right) - \frac{101}{128} \ln \left|t - \frac{5}{2}\right| + \\ &\quad + \frac{5}{128}\left(t - \frac{5}{2}\right)^{-1} - \frac{25}{512}\left(t - \frac{5}{2}\right)^{-2} - \frac{5}{1536}\left(t - \frac{5}{2}\right)^{-3} - \frac{1}{16384}\left(t - \frac{5}{2}\right)^{-4} + C. \end{aligned}$$

Teraz to już właściwie koniec, wystarczy podstawić $t = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, nieco uprościć i już. Widzimy więc, że to wyrażenie jest dosyć długie i niekoniecznie musi to być najlepsza metoda na znalezienie tej całki. Spróbujemy nieco inaczej. Należy pamiętać, że warto sprowadzać trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej. Niech $u = 2x - 5$.

Wtedy

$$x^2 \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{u+5}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{u+5}{2} \cdot \frac{u-5}{2} + 6} = \frac{1}{8}(u+5)^2 \cdot \sqrt{u^2 - 1}.$$

Prowadzi to do wzoru $\int x^2 \sqrt{x^2 - 5x + 6} dx = \frac{1}{16} \int (u+5)^2 \cdot \sqrt{u^2 - 1} du$, co wygląda lepiej od poprzedniego wyrażenia, bo wyrażenie pod pierwiastkiem jest prostsze. Do znalezienia są całki

$$\int u^2 \cdot \sqrt{u^2 - 1} du, \quad \int u \cdot \sqrt{u^2 - 1} du \quad \text{ i } \quad \int \sqrt{u^2 - 1} du.$$

Zacniemy od środkowej, bo jest najłatwiejsza:

$$\int u \cdot \sqrt{u^2 - 1} du = \frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^{1/2} d(u^2 - 1) = \frac{1}{3} (u^2 - 1)^{3/2} + \text{const}.$$

Teraz zajmijmy się trzecią całką stosując podstawienie Eulera. Przyjmijmy

$$t - u = \sqrt{u^2 - 1}, \text{ czyli } t^2 + 1 = 2tu, \text{ zatem } u = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}), \quad du = \frac{1}{2}[1 - \frac{1}{t^2}] dt.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{u^2 - 1} du &= \int \left[t - \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})\right] \cdot \frac{1}{2}[1 - \frac{1}{t^2}] dt = \frac{1}{4} \int \frac{(t^2 - 1)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int [t - 2t^{-1} + t^{-3}] dt = \\ &= \frac{1}{8}[t^2 - 4 \ln t - t^{-2}] + \text{const} = \frac{t^4 - 1}{8t^2} - \frac{1}{2} \ln t + \text{const} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2tu(2tu - 2)}{t^2} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const} = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2t} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const} = \\ &= \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2}(u - \sqrt{u^2 - 1}) - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const} = \\ &= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const}. \end{aligned}$$

Została jeszcze pierwsza z tych trzech całek. Możemy scałkować przez części:

$$\begin{aligned} \int u^2 \cdot \sqrt{u^2 - 1} du &= \frac{u}{3} (u^2 - 1)^{3/2} - \frac{1}{3} \int (u^2 - 1)^{3/2} du = \frac{u}{3} (u^2 - 1)^{3/2} - \\ &- \frac{1}{3} \int u^2 (u^2 - 1)^{1/2} du + \frac{1}{3} \int (u^2 - 1)^{1/2} du, \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int u^2 (u^2 - 1)^{1/2} du &= \frac{u}{3} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{1}{3} \int (u^2 - 1)^{1/2} du = \\ &= \frac{u}{3} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{1}{3} \left[\frac{u}{2} \sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) \right] + \text{const}. \end{aligned}$$

Z tego wzoru otrzymujemy równość

$$\int u^2 (u^2 - 1)^{1/2} du = \frac{u}{4} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{1}{8} u \sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{8} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const}.$$

Pozostaje powrócić do zmiennej x .

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^2 - 5x + 6} dx &= \frac{1}{16} \int (u+5)^2 \cdot \sqrt{u^2 - 1} du = \frac{u}{64} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{1}{128} u \sqrt{u^2 - 1} - \\ &- \frac{1}{128} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \frac{5}{24} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{25}{32} u (u^2 - 1)^{1/2} - \frac{25}{32} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const} = \\ &= \frac{u}{64} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{5}{24} (u^2 - 1)^{3/2} + \frac{101}{128} u (u^2 - 1)^{1/2} - \frac{101}{128} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + \text{const} = \\ &= \frac{2x-5}{8} (x^2 - 5x + 6)^{3/2} + \frac{5}{3} (x^2 - 5x + 6)^{3/2} + \frac{101}{64} (2x - 5) (x^2 - 5x + 6)^{1/2} - \\ &- \frac{101}{128} \ln(2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 6}) + \text{const}. \end{aligned}$$

No i w końcu otrzymaliśmy wynik.

Zastosujemy jeszcze podstawienie hiperboliczne. Niech $x = \frac{1}{2}(5 + \cosh s)$. Wtedy $x^2 - 5x + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\cosh^2 s - 1) = \frac{1}{4} \sinh^2 s$. Oczywiście $dx = \frac{1}{2} \sinh s ds$, zatem

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^2 - 5x + 6} dx &= \frac{1}{16} \int [5 + \cosh s]^2 \sinh^2 s ds = \\ &= \frac{1}{16} \int [25 + 10 \cosh s + \cosh^2 s] \sinh^2 s ds = \\ &= \frac{1}{16} \int \left[\frac{25}{2} (\cosh(2s) - 1) + 10 \cosh s \sinh^2 s + \frac{1}{4} \sinh^2(2s) \right] ds = \\ &= \frac{25}{64} \sinh(2s) - \frac{25}{32} s + \frac{5}{24} \sinh^3 s + \frac{1}{512} \sinh(4s) - \frac{s}{128} + \text{const} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{25}{32} \sinh s \cosh s - \frac{101}{128} s + \frac{5}{24} \sinh^3 s + \frac{1}{128} \sinh s \cosh^3 s + \frac{1}{128} \sinh^3 s \cosh s + \text{const} = \\
&= \frac{25}{16} (2x - 5) \sqrt{x^2 - 5x + 6} - \frac{101}{128} \ln(x - \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}) + \frac{5}{3} (x^2 - 5x + 6)^{3/2} + \\
&\quad + \frac{1}{16} (2x - 5) (x^2 - 5x + 6)^{3/2} + \frac{1}{64} (2x - 5)^3 \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \text{const}.
\end{aligned}$$

Nie twierdzimy, że któraś z tych metod jest akurat najkrótsza, ale chcieliśmy pokazać, jak może wyglądać stosowanie różnych podstawień na stosunkowo prostym przykładzie. Mamy nadzieję, że to przekona część studentów o konieczności nabycia pewnej wprawy rachunkowej. Nie chodzi o klasówki lub egzaminy, chodzi głównie o to, by być w stanie w razie potrzeby przeliczyć różne rzeczy, a pamiętać trzeba, że programy komputerowe pisują ludzie, którzy coś mają na myśli, niekoniecznie akurat problem, który nam przyjdzie rozwiązać ...

Dodać należy, że przedstawione przykłady nie wyczerpują tematu, nie omówiliśmy tu wszystkich popularnych sztuczek służących do znajdowania funkcji pierwotnych, ale mamy nadzieję, że przedstawione przykłady stanowią w miarę sensowną ilustrację najprostszych metod.

Teraz pokażemy kilka twierdzeń i nieco zastosowań całek.

Twierdzenie 9.51 (o porównywaniu całek)

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne na przedziale $[a, b]$ i dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność $f(x) \leq g(x)$, to również $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Dowód. Niech F i G oznaczają funkcje pierwotne funkcji f i g . Możemy napisać $G'(x) - F'(x) = g(x) - f(x) \geq 0$, zatem funkcja $G - F$ jest niemalejąca. Wobec tego $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) - (F(b) - F(a)) = (G(b) - F(b)) - (G(a) - F(a)) \geq 0$. ■

Twierdzenie 9.52 (o wartości średniej)

Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje liczba $c \in [a, b]$, taka że zachodzi równość

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Dowód. Wynika natychmiast z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji pierwotnej funkcji f . ■

Definicja 9.53 (wartości średniej funkcji)

Liczbę $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ nazywamy wartością średnią funkcji f . ■

Można myśleć, że jeśli funkcja f przyjmuje jedynie wartości dodatnie, to liczba $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ jest wysokością prostokąta o podstawie $b - a$, którego pole równe jest „polu pod wykresem” funkcji f . Jeśli $f(x)$ oznacza prędkość w chwili x , to wtedy $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ oznacza iloraz przebytej drogi $\int_a^b f(x) dx$ ⁵ przez czas $b - a$ zużyty na

⁵ Przypomnijmy, że jeśli $F(x)$ oznacza położenie poruszającego się punktu w momencie x , to $f(x) = F'(x)$ oznacza prędkość w tym momencie, mówiliśmy o tym przy okazji definicji pochodnej funkcji jednej zmiennej.

jej przebycie, czyli średnią prędkość w tym ruchu. Następne przykłady, które motywują tę definicję pojawiają się niebawem i czytelnik z pewnością je dostrzeże.

Następne twierdzenie jest bardzo łatwe i bardzo często stosowane.

Twierdzenie 9.54 (o addytywności całki względem przedziału)

Jeśli $a < c < b$ i funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale $[a, b]$, to zachodzi równość

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dowód. Niech F oznacza funkcję pierwotną funkcji f . Wtedy $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, $\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a)$ i $\int_c^b f(x) dx = F(b) - F(c)$. Z tych równości teza wynika natychmiast. ■

Punktem wyjścia do wielu zastosowań całki jest

Twierdzenie 9.55 (o sumach Riemanna)

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeżeli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})) \right| < \varepsilon.$$

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, więc na każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ przyjmuje kresy. Niech m_i oznacza kres dolny funkcji f na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, a M_i — górny. Wobec tego dla każdego $x \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi nierówność $m_i \leq f(x) \leq M_i$. Na mocy twierdzenia o porównywaniu całek zachodzą nierówności: $m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \leq M_i(x_i - x_{i-1})$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Dodając te nierówności stronami i korzystając z twierdzenia o addytywności całki względem przedziału otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Ponieważ f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, więc jest jednostajnie ciągła, czyli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $|t - s| < \delta$ wynika nierówność $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Wobec tego jeśli $x_i - x_{i-1} < \delta$, to $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla wszystkich i . Stąd od razu wynika, że

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Stąd teza wynika natychmiast: obydwie liczby $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ oraz $\int_a^b f(x) dx$ leżą między sumami $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, których różnica jest mniejsza od ε . Dowód został zakończony. ■

Sumy $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ nazywane są dolną i górną sumą Darboux, suma $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ — sumą Riemanna. Istnieją funkcje nieciągłe, które mają funkcje pierwotne, czyli są całkowne w sensie Newtona, dla których teza twierdzenia o sumach Riemanna nie zachodzi. Przykładów podawać nie będziemy, zainteresowany czytelnik może je znaleźć w pozycjach obszerniejszych, np. we wspomnianym już drugim tomie książki G.M.Fichtenholza, „Rachunek różniczkowy i całkowy”. Podamy jednak definicję całkowności w sensie Riemanna.

Definicja 9.56 (funkcji całkownej w sensie Riemanna)

Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista I , że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to zachodzi nierówność

$$\left| I - \left(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \right) \right| < \varepsilon.$$

Liczba I nazywana jest wtedy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczana symbolem $\int_a^b f(x) dx$. ■

Z twierdzenia o sumach Riemanna wynika, że funkcje ciągłe są całkowne w sensie Riemanna i że ich całki Riemanna oraz Newtona to te same liczby. Stosowanie tego samego symbolu jest więc w pełni uzasadnione tym bardziej, że można udowodnić, że jeśli funkcja (nieciągła) jest całkowna zarówno w sensie Riemanna jak i w sensie Newtona, to obie całki się pokrywają.

Prosty dowód niewymierności liczby π

Michał Krych, artykuł z „Deltę”

W 1761 roku niemieckiemu matematykowi, J.H.Lambertowi udało się udowodnić, że liczba π jest niewymierna. Jego dowód wykorzystywał tzw. ułamki łańcuchowe. Podobny dowód znalazł nieco później Francuz A.Legendre. Około dziewięćdziesięciu lat później J.Liouville sformułował i udowodnił twierdzenie, które pozwoliło wskazać konkretne liczby przestępne, tj. takie, które nie są pierwiastkami żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Po upływie niewielu lat C.Hermite udowodnił, że jedna z najważniejszych liczb w matematyce, liczba e jest przestępna, a

wkrótce (ok. 10 lat później) F.Lindemann wykazał, że znana od starożytności liczba π również jest przestępna. Tym samym, okazało się, że kwadratura koła nie jest wykonalna. O ile mi wiadomo, około 1948 roku I.Niven wzorując się na wspomnianym wyżej dowodzie Hermite'a, podał dowód niewymierności π wykorzystujący jedynie najprostsze własności całek, znane jeszcze niedawno uczniom szkół średnich. Jego rozumowanie przytoczymy poniżej.

Założmy, że $\pi = \frac{p}{q}$, gdzie p oraz q oznaczają liczby naturalne. Zdefiniujemy ciąg (c_n) wzorem $c_n = \frac{q^n}{n!} \int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \, dx$. Wykażemy, że

$$1^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0;$$

$$2^\circ \quad c_n > 0 \text{ dla każdej liczby naturalnej } n;$$

$$3^\circ \quad c_n \text{ jest liczbą całkowitą dla każdej liczby naturalnej } n.$$

Oznaczać to będzie, że przyjęte założenie, że $\pi = \frac{p}{q}$ prowadzi do sprzeczności, bo ciąg dodatnich liczb całkowitych nie może być zbieżny do liczby 0.

Udowodnimy własności 1° , 2° i 3° ciągu (c_n) .

Jeśli $0 \leq x \leq \pi$, to $x(\pi - x) \leq \frac{\pi^2}{4}$ i $\sin x \geq 0$, zatem zachodzi nierówność:

$$\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \geq \int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \, dx \geq 0. \text{ Stąd mamy } 0 \leq c_n \leq \frac{\pi}{n!} \left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n. \text{ Ponieważ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \text{ dla każdej liczby rzeczywistej } a, \text{ np. dla } a = \frac{q\pi^2}{n!}, \text{ więc } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0,$$

co kończy dowód własności 1° .

Całkowana funkcja jest dodatnia wewnątrz przedziału $[0, \pi]$, więc całka z niej na tym przedziale jest dodatnia, zatem $c_n > 0$, co dowodzi, że własność 2° również ma miejsce.

Wykażemy, że własność 3° również przysługuje ciągowi (c_n) . Ten fragment rozumowania jest najdłuższy. Niech w oznacza wielomian stopnia k . Pochodne funkcji w są więc równe 0 począwszy od $k+1$ -ej, czyli $w^{(j)}(x) = 0$ dla $j \geq k+1$ i dowolnej liczby x . Zaczniemy od obliczenia całki nieoznaczonej $\int w(x) \sin x \, dx$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy:

$$\int w(x) \sin x \, dx = -w(x) \cos x + \int w'(x) \cos x \, dx =$$

$$= -w(x) \cos x + w'(x) \sin x - \int w''(x) \sin x \, dx. \text{ Sprowadziliśmy zatem}$$

problem do obliczenia całki $\int w''(x) \sin x \, dx$, a więc do tego samego zadania z tym jednak, że udało się nam zmniejszyć o 2 stopień wielomianu, przez który wymnażamy sinus. Powtarzając to rozumowanie wielokrotnie i biorąc pod uwagę to, że pochodne wielomianu w począwszy od pochodnej $k+1$ -ego rzędu zerują się otrzymujemy wzór:

$$\int w(x) \sin x \, dx = \cos x [-w(x) + w''(x) - w^{(4)}(x) + \dots] + \sin x [w'(x) - w^{(3)}(x) + \dots],$$

przy czym sumy w nawiasach kwadratowych są skończone, bo od pewnego momentu ich wszystkie składniki są zerami. Niech $w(x) = [x(\pi - x)]^n$. Oczywiście $w(x) = w(\pi - x)$. Wobec tego $w^{(j)}(x) = (-1)^j w^{(j)}(\pi - x)$ dla $j = 0, 1, 2, \dots$. Zachodzą również wzory $\sin 0 = \sin \pi = 0$ oraz $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$. Do stwierdzenia całkowitości liczb c_n wystarczy więc, by liczby $\frac{q^n}{n!} w(0)$, $\frac{q^n}{n!} w''(0)$, $\frac{q^n}{n!} w^{(4)}(0), \dots$ były całkowite. Zachodzi równość:

$$w^{(j)}(x) = (\pi^n x^n \binom{n}{1} \pi^{n-1} x^{n+1} + \binom{n}{2} \pi^{n-2} x^{n+2} - \binom{n}{3} \pi^{n-3} x^{n+3} + \dots + (-1)^n x^{2n})^{(j)}.$$

Jeżeli $j < n$, to każdy składnik sumy $w^{(j)}(x)$ zawiera zmienną x z dodatnim wykładnikiem, więc $w^{(j)}(0) = 0$. Dalej mamy

$$w^{(n)}(0) = n!\pi^n, \quad w^{(n+1)}(0) = -(n+1)!\binom{n}{1}\pi^{n-1},$$

$$w^{(n+2)}(0) = (n+2)!\binom{n}{2}\pi^{n-2}, \dots, w^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!.$$

Jeśli więc $\pi = \frac{p}{q}$, to liczby $\frac{q^n}{n!}w^{(j)}(0)$ są całkowite dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j . To stwierdzenie kończy dowód. W podobny sposób można udowodnić, że jeśli $\cos r$ jest liczbą wymierną, to r jest liczbą niewymierną. ■