

# Granice funkcji, definicja ciągłości

Tekst poprawiony 8 lipca 2025

Jednym z najważniejszych pojęć w matematyce jest pojęcie funkcji. Przypomnimy definicję.

## Definicja 6.1 (funkcji, wartości, obrazu, dziedziny i przeciwdziedziny)

Przyporządkowanie  $f$  elementom zbioru  $A$  elementów zbioru  $B$  w taki sposób, że każdemu elementowi zbioru  $A$  przypisany jest dokładnie jeden element zbioru  $B$  nazywamy funkcją ze zbioru  $A$  w zbiór  $B$ . Jeśli  $a$  jest elementem zbioru  $A$ , czyli argumentem funkcji  $f$ , to przypisany mu element zbioru  $B$  oznaczamy symbolem  $f(a)$  i nazywamy wartością funkcji  $f$  w punkcie  $a$  lub obrazem punktu  $a$ <sup>1</sup>. Zbiór  $A$  nazywamy dziedziną funkcji  $f$ , zbiór  $B$  – przeciwdziedziną, zbiór  $f(A)$  złożony ze wszystkich wartości funkcji  $f$ , czyli elementów zbioru  $B$  postaci  $f(a)$ , gdzie  $a \in A$  nazywamy obrazem zbioru  $A$  (przez funkcję  $f$ ) lub zbiorem wartości funkcji  $f$ . Jeśli  $f$  przekształca zbiór  $A$  w zbiór  $B$ , to piszemy  $f: A \rightarrow B$ . Jeśli zbiór  $f(A)$  wartości funkcji  $f$  pokrywa się z przeciwdziedziną  $B$  funkcji  $f$ , to mówimy, że  $f$  przekształca zbiór  $A$  na zbiór  $B$  i piszemy czasem  $f: A \xrightarrow{na} B$ . ■

Przykładem funkcji jest ciąg: jest to funkcja określona np. na zbiorze liczb naturalnych  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Inną dobrze znaną funkcją jest liniowa:  $f(x) = ax + b$ , gdzie  $a, b$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi,  $x$  jest elementem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , na którym funkcja  $f$  jest określona,  $f(x)$  jest elementem przeciwdziedziny  $\mathbb{R}$ ; jeśli  $a \neq 0$ , to funkcja  $f$  przekształca zbiór  $\mathbb{R}$  na siebie; jeśli  $a = 0$ , to jedyną wartością funkcji  $f$  jest liczba  $b$ .

Jeszcze inny przykład to funkcja kwadratowa:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c$  są liczbami rzeczywistymi, przy czym  $a \neq 0$ . Funkcja ta jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , przeciwdziedziną jest również  $\mathbb{R}$ , zbiorem wartości jest półprosta  $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$  w przypadku  $a > 0$ , zaś w przypadku  $a < 0$  zbiorem wartości jest półprosta  $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ .

Przykłady można mnożyć, ale nie będziemy tego robić teraz. Na razie będziemy zajmować się funkcjami rzeczywistymi jednej zmiennej rzeczywistej, co oznacza, że wartościami funkcji będą liczby rzeczywiste i dziedziną funkcji będzie jakiś zbiór złożony z liczb rzeczywistych. Czasem zamiast liczb rzeczywistych występować będą liczby zespolone. W praktyce dziedzinami funkcji, które będziemy badać, będą albo przedziały, albo sumy skończenie wielu lub nieskończenie wielu przedziałów, np. dziedziną funkcji  $\operatorname{tg}$  jest zbiór złożony z tych wszystkich liczb rzeczywistych, które nie są postaci  $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ , czyli jest to suma przedziałów postaci  $\left(-(2n+1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ , gdzie  $n$  oznacza dowolną liczbę całkowitą. w przypadku funkcji zdefiniowanej wzorem  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$  można powiedzieć, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem  $-2$  i  $1$ , czyli zbiór  $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ .

<sup>1</sup> Czasem będziemy mówić: „ $f$ -obrazem”, choć to nie brzmi dobrze, ale czasem należy wyraźnie zaznaczyć o jaką funkcję chodzi.

Z punktu widzenia formalnego dopóki nie powiemy na jakim zbiorze funkcja ma być zdefiniowana, to nie została ona określona. W szczególności z formalnego punktu widzenia zadania: znaleźć dziedzinę funkcji określonej wzorem  $\dots$ , nie mają sensu. Pytanie o dziedzinę należy traktować jako pytanie o maksymalny zbiór, na którym można zdefiniować funkcję w sposób zaproponowany przez autora zadania. Nawet przy takiej interpretacji mogą powstawać wątpliwości: np. czy funkcja określona wzorem  $f(x) = \frac{x^2}{x}$  może tym wzorem być zdefiniowana na całej prostej, czy też w punkcie 0 tym akurat wzorem nie da się jej zdefiniować. Autorowi tego tekstu wydaje się, że specjaliści od tak formułowanych zadań w większości przypadków uznają, że ta definicja w punkcie 0 nie działa, ale nie wydaje mu się, by ten problem wart był dyskusji – można po prostu takich zadań nie dawać, a jeśli się je daje, to unikać wieloznaczności. Będziemy jednak mówić np. o funkcji  $\frac{4x^2-13x-167}{x^3-4x+3}$ , zakładając przy tym, że jej dziedziną jest zbiór wszystkich tych liczb rzeczywistych, dla których mianownik jest różny od 0. Funkcja  $\sqrt{1-e^x}$  będzie automatycznie zdefiniowana na zbiorze złożonym z liczb rzeczywistych niedodatnich. W przypadku jakichkolwiek wieloznaczności będziemy wyraźnie określać dziedzinę. Czasem też dziedzina z jakichś przyczyn będzie mniejsza niż maksymalna, np. zmienna będzie mieć jakieś pozamatematyczne znaczenie i wtedy interpretacja będzie źródłem ograniczeń dziedziny. Np. pytanie o maksymalne pole prostokąta o obwodzie 4 prowadzi do rozpatrywania funkcji  $x(2-x)$  na przedziale otwartym  $(0, 2)$ : liczba  $x$  oznacza tu jeden wymiar prostokąta, a  $2-x$  — drugi. Funkcję  $x(2-x)$  można rozpatrywać nie tylko na przedziale  $(0, 2)$ , ale z punktu widzenia zadanego pytania nie ma to sensu.

W dalszej części zajmiemy się również funkcjami określonymi na podzbiorach płaszczyzny (czyli zbioru wszystkich liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ ), przestrzeni trójwymiarowej i ogólnie  $n$ -wymiarowej. Wartościami tych funkcji będą zazwyczaj liczby rzeczywiste, ale wystąpią również funkcje przekształcające pewne podzbiory płaszczyzny w płaszczyznę. Takie funkcje będą nazywane na ogół przekształceniami lub odwzorowaniami. Nie oznacza to, że funkcji z  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = x+1$  nie można nazwać odwzorowaniem – często termin ten jest używany, zwłaszcza wtedy, gdy mówimy o geometrii związanej z tą funkcją – definiuje ona przesunięcie o 1 w prawo.

Ważną klasą funkcji są funkcje różnowartościowe, tj. takie które różnym punktom dziedziny przypisują różne wartości:  $(x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$ . Jeśli  $f$  jest funkcją różnowartościową przekształcającą zbiór  $A$  na zbiór  $B$ , to można określić funkcję  $f^{-1}$  odwrotną do danej funkcji  $f$ :  $f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$ . Jeśli  $f(x) = x^3$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , to funkcja  $f$  przekształca różnowartościowo zbiór  $\mathbb{R}$  na siebie, więc można określić funkcję odwrotną:  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ . Jeśli  $f(x) = e^x$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , to zbiorem wartości funkcji  $f$  jest zbiór wszystkich liczb dodatnich i wobec tego  $f^{-1}(x) = \ln x$  dla każdej dodatniej liczby  $x$ . Jeśli  $f(x) = x^2$  dla liczb  $x \geq 0$ , to  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  dla każdej liczby  $x \geq 0$ . Jeśli  $f(x) = x^2$  dla każdej liczby  $x \leq 0$ , to funkcja  $f$  przekształca zbiór wszystkich liczb niedodatnich na zbiór wszystkich liczb nieujemnych. Funkcja odwrotna do niej dana jest wzorem  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ . W ostatnich dwóch przykładach wzór definiujący był identyczny, ale

dziedziny były różne. W związku z tym wzory na funkcję odwrotne też były różne.

W dalszym ciągu będziemy używać jeszcze dwu funkcji zdefiniowanych jako odwrotne do funkcji sinus i tangens. Oczywiście funkcje sinus i tangens jako okresowe nie są różnowartościowe, więc nie mają funkcji odwrotnych. Można więc postąpić tak, jak w przypadku pierwiastka kwadratowego, który jest zdefiniowany jako funkcja odwrotna do funkcji  $x^2$  rozpatrywanej nie na całej dziedzinie, lecz na zbiorze, na którym funkcja  $x^2$  jest różnowartościowa, i to możliwie najprostszym o tej własności.<sup>2</sup> Wybieramy możliwe najbardziej naturalne dziedziny. W przypadku sinus ograniczamy się do przedziału  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , a w przypadku tangensa – do przedziału  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Zbiory wartości to odpowiednio przedział domknięty  $[-1, 1]$  i cała prosta  $(-\infty, +\infty)$ . Tradycyjnie zamiast pisać  $\sin^{-1}$  piszemy  $\arcsin$ , a zamiast  $\operatorname{tg}^{-1}$  piszemy  $\operatorname{arctg}$ <sup>3</sup>, co zresztą pozwala na uniknięcie dwuznaczności związanej z oznaczeniami  $\sin^{-1}$  i  $\operatorname{tg}^{-1}$ . Podamy teraz definicje tych funkcji w jawny sposób.

### Definicja 6.2 (funkcji arcsin i arctg)

Jeśli  $x \in [-1, 1]$ , to  $\arcsin x$  jest jedyną liczbą z przedziału  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , dla której zachodzi równość  $\sin(\arcsin x) = x$ .

Jeśli  $x$  jest liczbą rzeczywistą, to  $\operatorname{arctg} x$  jest jedyną liczbą rzeczywistą z przedziału  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , dla której zachodzi równość  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ . ■

Poniżej kilka przykładów.

**Przykład 6.3**  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\operatorname{arctg} 0 = 0$ . ■

Wprowadzimy oznaczenie:  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych uzupełniony symbolami nieskończonymi  $-\infty$  i  $+\infty$ . Można myśleć, że  $\overline{\mathbb{R}}$  to prosta z końcami. Podkreślić wypada, że symboli nieskończonych nie oznaczają liczb, bo np. nie wszystkie działania z ich użyciem są wykonalne.

### Definicja 6.4 (punktu skupienia)

Punkt  $p \in \mathbb{R}$  jest punktem skupienia zbioru  $A \subset \mathbb{R}^n$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg  $(a_n)$  punktów zbioru  $A$ , o wyrazach różnych od  $p$ , zbieżny do  $p$ . Punkt  $a \in A$ , który nie jest jego punktem skupienia nazywamy punktem izolowanym zbioru  $A$ . ■

**Przykład 6.5**  $+\infty$  jest punktem skupienia zbioru wszystkich liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ . By się o tym przekonać wystarczy przyjąć  $a_n = n$ . Innych punktów skupienia zbiór  $\mathbb{N}$  nie ma. W grę mogłyby wchodzić jedynie liczby nieujemne, bo granica ciągu liczb naturalnych jest albo równa  $+\infty$ , albo też jest liczbą nieujemną. Jeśli ciąg liczb naturalnych ma skończoną granicę, to — ze względu na warunek Cauchy’ego — odległości między wyrazami tego ciągu, których numery są dostatecznie duże, są mniejsze niż 1,

<sup>2</sup> Zbiorów, na których funkcja  $tx^2$  jest różnowartościowa, jest bardzo dużo, np.  $[-1, 0] \cup (1, +\infty)$ ,  $(-\infty, -2)$ ,  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, +\infty)$ , zbiór złożony ze wszystkich liczb wymiernych dodatnich oraz ujemnych liczb niewymiernych i wiele innych.

<sup>3</sup> W niektórych krajach  $\arctan$ .

a ponieważ są to liczby całkowite, więc te odległości są równe 0. Wykazaliśmy, że ciąg liczb naturalnych, który ma skończoną granicę musi być od pewnego miejsca stały, a więc granica jest równa pewnym wyrazom ciągu. Jest niezgodne z definicją punktu skupienia. ■

**Przykład 6.6** Każda liczba z przedziału domkniętego  $[0, 1]$  jest punktem skupienia przedziału otwartego  $(0, 1)$ . Innych punktów skupienia przedział  $(0, 1)$  nie ma. To drugie zdanie jest prawdziwe w oczywisty sposób – granica ciągu liczb z przedziału  $(0, 1)$  musi się znajdować w przedziale  $[0, 1]$ . Jest też jasne, że dla każdej liczby  $p$  z przedziału  $[0, 1]$  istnieje ciąg  $(a_n)$  liczb z przedziału  $(0, 1)$ , taki że  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oraz  $a_n \neq p$  dla każdego  $n$ . ■

**Przykład 6.7** Każda liczba rzeczywista i oba symbole nieskończone są punktami skupienia dziedziny funkcji tangens, tj. zbioru tych liczb rzeczywistych, które nie są nieparzystymi wielokrotnościami liczby  $\frac{\pi}{2}$ . "Latwe uzasadnienie tego stwierdzenia pozostawiamy czytelnikom. ■

**Przykład 6.8** Niech  $C \subseteq [0, 1]$  będzie zbiorem złożonym ze wszystkich tych liczb, które można zapisać w układzie trójkowym za pomocą cyfr 0 i 2.<sup>4</sup> Łatwo można zauważyć, że  $\mathbb{R} \setminus C$  jest sumą następujących przedziałów otwartych:  $(-\infty, 0)$ ,  $(1, \infty)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ,  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ ,  $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$ ,  $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$ ,  $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$ ,  $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ , ... Jasne jest, że zbiór  $C$  nie zawiera żadnego przedziału. Każdy punkt zbioru Cantora jest jego punktem skupienia. By się o tym przekonać, wystarczy w rozwinięciu trójkowym liczby  $x \in C$  zmienić  $n$ -tą cyfrą: zamiast cyfry  $c_n$  otrzymamy cyfrę  $2 - c_n$ . Otrzymaną liczbę oznaczamy przez  $x_n$ . Oczywiście  $|x - x_n| = 2 \cdot 3^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Można łatwo zauważyć, że zapis trójkowy liczby  $x \in C$  bez użycia cyfry 1 jest jednoznaczny. Niech  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 3^{-n}$ ,  $c_n \in \{0, 2\}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Definiujemy funkcję  $f$  za pomocą wzoru  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} \cdot 2^{-n}$ . Wykazać, że funkcja  $f$  przekształca zbiór Cantora na cały przedział  $[0, 1]$ . Sprawdzić, czy  $f$  jest funkcją różnowartościową. Oczywiście funkcja  $f$  jest niemalejąca. Czy można ją dookreślić w punktach  $[0, 1] \setminus C$  tak, by stała się niemalejąca na przedziale  $[0, 1]$ ? ■

Teraz zdefiniujemy granicę funkcji.

### Definicja 6.9 (granicy funkcji w punkcie)<sup>5</sup>

Niech  $p$  oznacza dowolny punkt skupienia dziedziny funkcji  $f$ . Mówimy, że  $g \in \mathbb{R}$  jest granicą funkcji  $f$  w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $(x_n)$  zbieżnego do  $p$ , którego wszystkie wyrazy są różne od  $p$ , ma miejsce równość  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$ . Granicę funkcji  $f$  w punkcie  $p$  oznaczamy symbolem  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ . ■

<sup>4</sup> tzw. zbiór Cantora

<sup>5</sup> Ta definicja jest nazywana ciągową lub definicją Heinego

Należy wrócić uwagę na to, że wśród wyrazów ciągu zbieżnego do  $p$ , występującego w definicji granicy, nie ma  $p$ . Oznacza to w szczególności, że nawet wtedy, gdy  $p$  jest argumentem funkcji  $f$ , to wartość w tym punkcie nie ma wpływu na istnienie granicy w punkcie  $p$ , ani na jej wartość — można dowolnie zmieniać wartość funkcji w punkcie  $p$  nie zmieniając granicy w tym punkcie. Jeśli funkcja ma granicę w punkcie  $p$ , to w dostatecznie bliskich punktach  $x$  wartość  $f(x)$  jest bliska granicy  $g$ , pod warunkiem jednak, że  $x \neq p$ . Ponieważ ciąg ma co najwyżej jedną granicę, więc również funkcja może mieć tylko jedną granicę w jednym punkcie. Pojęcie granicy funkcji jest — jak się przekonamy — bardzo ważne. Jest rozszerzeniem pojęcia granicy ciągu. Podamy kilka przykładów.

**Przykład 6.10**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Równość ta została udowodniona wcześniej. ■

**Przykład 6.11**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ . Również ta równość została udowodniona wcześniej. ■

**Przykład 6.12**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ . Tę równość wykazaliśmy poprzednio. ■

**Przykład 6.13**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Tę równość wykażemy teraz. Trzeba wykazać, że dla każdego ciągu  $(x_n)$ , którego granicą jest  $\infty$  zachodzi:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ . Wiemy, że jest tak w przypadku  $x_n = n$  — z definicji liczby  $e$ . Przypomnijmy też, że ciąg  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  jest rosnący. Stąd wynika, że jeśli  $k > n$  jest liczbą naturalną, to  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e$ . Stąd i z definicji granicy wynika, że jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$  — jeśli bowiem  $m$  jest jakąkolwiek liczbą naturalną, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych  $n$ , zachodzi nierówność  $k_n > m$ , zatem  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} < e$ . Teraz możemy przejść do właściwego dowodu.

Niech  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że dla każdego  $n$  zachodzi nierówność  $x_n \geq 1$ , bo jest tak dla dostatecznie dużych  $n$ . Niech  $k_n = \lfloor x_n \rfloor$  będzie taką liczbą całkowitą, tzn.  $k_n \leq x_n < k_n + 1$  dla dowolnego  $n$ . Ponieważ  $x_n - 1 < k_n$ , więc  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$ . Stąd i z tego, co wykazaliśmy poprzednio, wynika,

że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+k_n}\right)^{k_n} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{1+k_n}$ . Mamy również

$$\left(1 + \frac{1}{1+k_n}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{1+k_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{1+k_n}.$$

Z tej nierówności i twierdzenia o trzech ciągach wynika dowodzona przez nas teza. ■

**Przykład 6.14** Funkcja  $\frac{1}{x}$ , określona dla  $x \neq 0$ , nie ma granicy w punkcie 0, bowiem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/n} = +\infty$  i jednocześnie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-1/n} = -\infty$ , udało się nam więc wskazać dwa ciągi argumentów zbieżne do 0, takie że odpowiadające im ciągi wartości mają różne granice. ■

**Przykład 6.15** Funkcja  $\sin \frac{1}{x}$ , określona dla  $x \neq 0$ , nie ma granicy w punkcie 0, bowiem  $\sin \frac{1}{1/(2n\pi)} = 0$  oraz  $\sin \frac{1}{1/(2n\pi + \pi/2)} = 1$ . Wskazaliśmy więc takie dwa ciągi argumentów zbieżne do 0, że odpowiadające im ciągi wartości są zbieżne do różnych granic (są stałe i różne). ■

Oprócz granicy funkcji rozpatrywane są granice jednostronne funkcji w punkcie. Zdefiniujemy granicę lewostronną, definicja granicy prawostronnej jest analogiczna.

**Definicja 6.16 (granicy lewostronnej)**

$g$  jest granicą lewostronną funkcji  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  jest punktem skupienia zbioru  $X \cap (-\infty, p)$  czyli, gdy można znaleźć w dziedzinie ciąg  $(x_n)$  o wyrazach mniejszych (ściśle!) niż  $p$ , zbieżny do  $p$  i gdy dla każdego takiego ciągu odpowiadający mu ciąg wartości  $(f(x_n))$  ma granicę  $g$ . Stosujemy oznaczenie  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ . ■

”Latwo można udowodnić, że funkcja  $\frac{1}{x}$  ma jednostronne granice w punkcie 0: prawostronna jest równa  $+\infty$ , zaś lewostronną jest  $-\infty$ . Funkcja  $\sin \frac{1}{x}$  nie ma granicy prawostronnej w punkcie 0 — wykazaliśmy to wskazując dwa ciągi *dodatnich* argumentów tej funkcji zbieżne do 0, takie że odpowiadające im ciągi wartości mają różne granice.

Bez trudu można udowodnić „funkcyjną” wersję twierdzenia o scalaniu.

**Twierdzenie 6.17 (o scalaniu)**

Funkcja  $f$  określona na zbiorze  $X = X_1 \cup X_2$ , którego punktem skupienia jest punkt  $p$ , który jest jednocześnie punktem skupienia obu zbiorów  $X_1, X_2$  ma granicę w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje  $f_1 := f|_{X_1}$  i  $f_2 := f|_{X_2}$  mają granice i te granice są równe.

**Dowód.** Jest jasne, że z istnienia granicy  $\lim_{x \rightarrow p}$  wynika istnienie i równość obu granic  $\lim_{x \rightarrow p} f_1$  i  $\lim_{x \rightarrow p} f_2$  zamiast wszystkich ciągów zbieżnych do  $p$ , których wyrazy są różne od  $p$ , rozpatrujemy jedynie ich część. Jeśli natomiast wiemy, że istnieją granice funkcji  $f_1$  i  $f_2$ , to ciąg o wyrazach różnych od  $p$  możemy rozbić na podciągi o wyrazach należących do  $X_1$  i na podciąg złożony z pozostałych wyrazów, więc należących do  $X_2$ . Odpowiadające im ciągi wartości mają tę samą granicę, więc ciąg wartości odpowiadający naszemu ciągowi ma granicę i to równą wspólnej wartości obu granic. Oczywiście jeśli tylko skończenie wiele wyrazów ciągu argumentów znajduje się w zbiorze  $X_1$ , to nie możemy rozpatrywać granicy  $\lim_{x \rightarrow p} f_1$ , ale to niczemu nie przeszkadza. ■

Podobnie jak w przypadku twierdzenia o scalaniu, można przenieść inne twierdzenia dotyczące granic ciągów na ogólniejszy przypadek granicy funkcji.

**Twierdzenie 6.18 (o arytmetycznych własnościach granicy)**

**A1.** Jeśli istnieją granice  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$  i określona jest ich suma, to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x))$  i:  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ .

**A2.** Jeśli istnieją granice  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$  i określona jest ich różnica, to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x))$  i:  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) - \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ .

**A3.** Jeśli istnieją granice  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$  i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) \cdot g(x))$  i zachodzi wzór:  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} g(x)$ .

**A4.** Jeśli istnieją granice  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$  i określony jest ich iloraz, to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$  i zachodzi wzór  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)}$ .

**Dowód.** Twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. ■

Przed podaniem następnego twierdzenia przypomnijmy, że operujemy terminem *dla dostatecznie dużych  $n$* . Oznacza to, że interesują nas liczby naturalne większe od pewnej liczby. Właściwie chodzi o to, by były one bliskie  $+\infty$ . W przypadku funkcji argument, którym w przypadku ciągu jest numer wyrazu, czyli  $n$ , ma być bliski punktowi  $p$ , który może — lecz nie musi — być równy  $+\infty$ . Wymaga więc zmiany sposobu mówienia. Mówiąc  *$x$  jest dostatecznie bliski  $p$*  będziemy mieć na myśli, że:

$(+\infty)$   $x > M$  dla pewnej liczby rzeczywistej  $M$ , gdy  $p = +\infty$ ,

$(-\infty)$   $x < M$  dla pewnej liczby rzeczywistej  $M$ , gdy  $p = -\infty$ ,

$(\mathbb{R})$   $|x - p| < \delta$  dla pewnej **dodatniej** liczby  $\delta$ , gdy  $p \in \mathbb{R}$ .

**Twierdzenie 6.19 (o szacowaniu)**

**N1.** Jeśli  $C < \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ , to dla  $x \neq p$ , dostatecznie bliskich  $p$  zachodzi nierówność  $C < f(x)$ .

**N2.** Jeśli  $C > \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ , to dla  $x \neq p$ , dostatecznie bliskich  $p$  zachodzi nierówność  $C > f(x)$ .

**N3.** Jeśli  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) < \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ , to dla  $x \neq p$ , dostatecznie bliskich  $p$  zachodzi nierówność  $g(x) < f(x)$ .

**N4.** Jeśli  $g(x) \leq f(x)$  dla  $x$  dostatecznie bliskich  $p$ , to zachodzi nierówność  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ .

**Dowód.** Zakładamy cały czas, że  $p$  jest punktem skupienia dziedziny funkcji. Za-uważmy najpierw, że zaprzeczeniem zdania: *Dla wszystkich  $x \neq p$  dostatecznie bliskich  $p$  spełniony jest warunek  $W$*  jest zdanie: *Istnieje ciąg  $(x_n)$  zbieżny do  $p$ , taki że  $x_n \neq p$  dla każdego  $n$  i warunek  $W$  nie zachodzi dla żadnego wyrazu ciągu  $(x_n)$* .

Jeśli np.  $p = +\infty$  i nie jest prawdą, że warunek  $W$  spełniony jest dla wszystkich  $x$  dostatecznie bliskich  $p = +\infty$ , to dla każdej liczby rzeczywistej  $M$  istnieje liczba  $x > M$ , dla której warunek  $W$  nie zachodzi. By otrzymać ciąg  $(x_n)$ , którego granicą jest  $\infty$ , złożony z liczb, dla których warunek  $W$  nie zachodzi, wystarczy przyjąć, że  $M = n$ . Jeśli natomiast istnieje ciąg  $(x_n)$ , którego granicą jest  $+\infty$ , taki że warunek  $W$  nie jest spełniony dla żadnego  $(x_n)$ , to warunek  $W$  nie jest spełniony dla wszystkich dostatecznie dużych  $x$ , czyli nie jest spełniony dla wszystkich  $x$  dostatecznie bliskich  $+\infty$ . Analogicznie postępujemy w przypadku  $p = -\infty$ .

Jeśli  $p \in \mathbb{R}$ , to dla każdego  $\delta > 0$  istnieje  $x$ , takie że  $x \neq p$  i  $|x - p| < \delta$ , dla którego warunek  $W$  nie zachodzi. By zdefiniować  $x_n$  przyjmujemy, że  $\delta = \frac{1}{n}$ . Z istnienia ciągu  $(x_n)$  złożonego z liczb, dla których warunek  $W$  nie zachodzi, wynika od razu, że nie jest możliwe, by warunek  $W$  był spełniony dla wszystkich  $x$  dostatecznie bliskich  $p$ .

Teraz możemy zająć się właściwym dowodem. Załóżmy, że  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) < C$  oraz że nie jest prawdą, że dla  $x$  dostatecznie bliskich  $p$  zachodzi nierówność  $f(x) < C$ . Wynika stąd, że istnieje ciąg  $(x_n)$ , taki że dla każdego  $n$  zachodzi nierówność  $f(x_n) \geq C$ . Stąd jednak wynika, że  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \geq C$ , wbrew założeniu. Dowód w tym przypadku został zakończony. Stwierdzenie N2 dowodzimy analogicznie lub wnioskujemy z N1 zastępując funkcję  $f$  funkcją przeciwną  $-f$ . Stwierdzenie N3 wynika ze stwierdzeń poprzednich: wystarczy użyć liczby  $C$  leżącej między  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  oraz  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ . Ostatni fragment twierdzenia to prosta konsekwencja tego, że ciąg o mniejszych wyrazach ma mniejszą granicę. Dowód został zakończony. ■

Podamy teraz inną definicję granicy funkcji. Z poprzednią można wiązać takie stwierdzenie (nieściśle, ale ważne): *niezależnie od tego w jaki sposób argument dąży do  $p$ , to wartość funkcji zbliża się do  $g$ . Z tą która pojawi się niebawem wiążemy stwierdzenie jeśli argument funkcji jest dostatecznie bliski  $p$ , ale różny od  $p$ , to wartość funkcji jest bliska  $g$* . Sformułujemy zapowiedzianą definicję bardzo dokładnie, bez żadnych skrótów. Ma ona dziewięć części, ale na ogół po przeczytaniu dwóch – trzech pierwszych nie ma potrzeby czytać dalej, bo można to samodzielnie napisać.

**Definicja 6.20 (granicy funkcji)**<sup>6</sup>

1.  $g, p \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \left( 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right).$$

2.  $g \in \mathbb{R}, p = +\infty$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X \left( x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right).$$

3.  $g \in \mathbb{R}, p = -\infty$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in X \left( x < M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right).$$

4.  $g = +\infty, p \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists \delta > 0 \forall x \in X \left( 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > M \right).$$

5.  $g = +\infty, p = +\infty$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists K \forall x \in X \left( x > K \Rightarrow f(x) > M \right).$$

6.  $g = +\infty, p = -\infty$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists K \forall x \in X \left( x < K \Rightarrow f(x) > M \right).$$

7.  $g = -\infty, p \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists \delta > 0 \forall x \in X \left( 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) < M \right).$$

8.  $g = -\infty, p = +\infty$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists K \forall x \in X \left( x > K \Rightarrow f(x) < M \right).$$

9.  $g = -\infty, p = -\infty$ . Wtedy  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists K \forall x \in X \left( x < K \Rightarrow f(x) < M \right).$$

**Dowód.** Dowód podamy w dwóch wybranych przypadkach: pierwszym i ósmym. Resztę czytelnik powinien uzupełnić samodzielnie, być może nie wszystko — tyle tylko, by w miarę swobodnie przeprowadzić dowód w którymś przypadku.

Założymy najpierw, że  $g, p$  są liczbami rzeczywistymi oraz że  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  w sensie definicji ciągowej. Jeśli istnieje taka liczba  $\varepsilon > 0$ , że dla każdej liczby  $\delta > 0$  istnieje  $x$ , takie że  $0 < |x - p| < \delta$  i jednocześnie  $|f(x) - g| \geq \varepsilon$ , to przyjmując, że  $x_n$  jest dobrane do  $\frac{1}{n}$ , tzn.  $0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$  i  $|f(x_n) - g| \geq \varepsilon$ , otrzymujemy ciąg  $(x_n)$  zbieżny do  $p$ , o wyrazach różnych od  $p$  i taki że odpowiadający mu ciąg wartości funkcji nie jest zbieżny do liczby  $g$ , bowiem wszystkie wyrazy tego ciągu wartości pozostają w odległości nie mniejszej niż  $\varepsilon$  od  $g$ . Twierdzenie zostało udowodnione w jedną stronę.

Teraz założymy, że  $g = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  w sensie definicji otoczeniowej. Niech  $(x_n)$  będzie dowolnym ciągiem argumentów funkcji  $f$  zbieżnym do  $p$ , o wyrazach różnych od  $p$  i niech  $\varepsilon$  oznacza dowolną liczbę dodatnią. Z definicji otoczeniowej granicy funkcji

<sup>6</sup> Ta definicja nazywana jest definicją Cauchy'ego lub definicją otoczeniową, czasem, to już belkot matematyczny, – epsilonowo-deltową.

wynika, że istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że jeśli  $0 < |x - p| < \delta$ , to  $|f(x) - g| < \varepsilon$ . Z definicji granicy ciągu wnioskujemy, że dla dostatecznie dużych  $n$  zachodzi nierówność  $|x_n - p| < \delta$  i oczywiście  $x_n \neq p$ , zatem  $0 < |x_n - p| < \delta$ , a stąd wynika, że  $|f(x_n) - g| < \varepsilon$ . Stąd i z definicji granicy ciągu wynika, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$ , a wobec tego, że  $(x_n)$  jest dowolnym ciągiem, możemy stwierdzić, że  $g$  jest granicą w sensie definicji ciągowej.

Teraz, zgodnie z obietnicą, zajmiemy się przypadkiem ósmym, tj. założymy, że  $g = -\infty$  oraz że  $p = +\infty$ . Zakładamy, że dla każdego ciągu  $(x_n)$  argumentów funkcji  $f$ , którego granicą jest  $+\infty$  zachodzi równość  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$ . Mamy wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej  $M$  istnieje liczba rzeczywista  $K$ , taka że jeśli  $x > K$ , to  $f(x) < M$ . Załóżmy, że tak nie jest. Istnieje więc liczba  $M$  taka, że dla każdej liczby  $K$  istnieje taki argument  $x$  funkcji  $f$ , że  $x > K$  i jednocześnie  $f(x) \geq M$ . Przyjmując  $K = n$  otrzymujemy argument  $x_n$ , taki że  $x_n > n$  i  $f(x_n) \geq M$ . Stąd jednak wynika, że  $-\infty$  nie jest granicą ciągu  $(f(x_n))$ , wbrew założeniu. Dowód w jedną stronę został zakończony.

Teraz założymy, że dla każdej liczby rzeczywistej  $M$  istnieje taka liczba rzeczywista  $K$ , że jeśli  $x > K$ , to  $f(x) < M$ . Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , to dla dostatecznie dużych  $n$  zachodzi nierówność  $x_n > K$  i wobec tego  $f(x_n) < M$ . Wobec dowolności  $M$ , oznacza to, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$ . Dowód został zakończony. ■

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika analogiczne twierdzenie dla granic funkcji.

### Twierdzenie 6.21 (o trzech funkcjach)

Jeśli dla wszystkich argumentów  $x$  dostatecznie bliskich punktowi  $p$  zachodzi nierówność podwójna  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  i istnieją granice  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} h(x)$  przy czym  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$ , to również funkcja  $g$  ma granicę w punkcie  $p$  i zachodzi równość  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$ . ■

Z następnego twierdzenia w zasadzie nie będziemy korzystać, podajemy je tylko po to, by pokazać, pełną analogię pojęcia granicy ciągu i granicy funkcji, więc łatwy dowód pozostawiamy czytelnikom w charakterze zadania.

### Twierdzenie 6.22 (Cauchy'ego o istnieniu granicy skończonej)

Funkcja  $f$  ma granicę skończoną w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego:

dla każdego  $\varepsilon > 0$ , dla wszystkich  $x, y \neq p$  dostatecznie bliskich  $p$   
zachodzi nierówność  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . (w.C.) ■

Twierdzenie, które znajduje się poniżej ma bardzo prosty dowód, ale jest bardzo często stosowane.

**Twierdzenie 6.23 (o granicy złożenia dwu funkcji)**

Założmy, że dziedzina funkcji  $f$  zawiera zbiór wartości funkcji  $g$ , że funkcja  $g$  ma granicę  $G$  w punkcie  $p$ , że granica  $G$  jest punktem skupienia dziedziny funkcji  $f$  i funkcja  $f$  ma granicę  $H$  w punkcie  $G$  oraz że wartości funkcji  $g$  w punktach dostatecznie bliskich  $p$  są różne od  $G$ . Przy tych założeniach funkcja  $f \circ g$  określona wzorem  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  ma w punkcie  $p$  granicę, ta granica jest równa  $H$ .

**Dowód.** Założenia tego twierdzenia są tak dobrane, że dowód wynika od razu z definicji ciągowej granicy funkcji w punkcie. ■

**Definicja 6.24 (kresów funkcji)**

1. Kresem górnym  $M$  funkcji  $f$  nazywamy kres górny zbioru jej wartości, tj. najmniejszą taką liczbę  $M$  (lub  $+\infty$ , jeśli funkcja nie jest ograniczona z góry) że nierówność  $f(x) \leq M$  zachodzi dla każdego argumentu  $x$  funkcji  $f$ . Kres górny funkcji  $f$  oznaczamy symbolem  $\sup f$ .

2. Kresem dolnym  $M$  funkcji  $f$  nazywamy kres dolny zbioru jej wartości, tj. największą taką liczbę  $M$  (lub  $-\infty$ , jeśli funkcja nie jest ograniczona z dołu), że  $f(x) \geq M$  dla każdego argumentu  $x$  funkcji  $f$ . Kres dolny funkcji  $f$  oznaczamy symbolem  $\inf f$ .

**Definicja 6.25 (granicy górnej)**

$M \in [-\infty, +\infty]$  jest granicą górną funkcji  $f$  przy  $x \rightarrow p$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są oba warunki

- (i) dla każdego ciągu  $(x_n)$  o granicy  $p$ , wyrazach *różnych* od  $p$ , dla którego istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  zachodzi nierówność  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq M$  oraz
- (ii)  $M$  jest najmniejszym elementem zbioru  $[-\infty, +\infty]$ , dla którego spełniony jest warunek (i).

Piszemy wtedy  $M = \limsup_{x \rightarrow p} f(x)$ . ■

Analogicznie definiujemy granicę dolną funkcji, którą oznaczamy za pomocą symbolu  $M = \liminf_{x \rightarrow p} f(x)$ . Warunek (ii) tej definicji można zastąpić stwierdzeniem: istnieje ciąg  $(x_n)$  o granicy  $p$  i wyrazach różnych od  $p$ , dla którego  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ . Oznacza to, że granica górna jest kresem górnym granic postaci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ , gdzie  $(x_n)$  oznacza ciąg o wyrazach różnych od  $p$ , którego granicą jest  $p$ . Definicja granicy dolnej jest analogiczna. Można bez trudu wykazać, że jeśli  $p$  jest liczbą rzeczywistą,  $D$  dziedziną funkcji  $f$ , to

$$\left[ \liminf_{x \rightarrow p} f(x), \limsup_{x \rightarrow p} f(x) \right] = \bigcap_{\delta > 0} \left[ \inf f \left( D \cap (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\} \right), \sup f \left( D \cap (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\} \right) \right].$$

Oznacza to, że rozpatrujemy otoczenie punktu  $p$ , znajdujemy najmniejszy przedział domknięty (być może nieskończony) zawierający obraz tej części dziedziny, która znalazła się w rozpatrywanym otoczeniu punktu  $p$ , z wyjątkiem punktu samego  $p$ . Następnie zmniejszamy to otoczenie (czyli mówiąc nieformalnie  $\delta \rightarrow 0$ ), lewy koniec otrzymanego

przedziału, być może zdegenerowanego do jednego punktu, to  $\liminf_{x \rightarrow p} f(x)$ , a prawy koniec to  $\limsup_{x \rightarrow p} f(x)$ . Zachęcam studentów do wykazania równoważności tych określeń oraz do samodzielnego ich sformułowania, gdy  $p = \pm\infty$ .

Podamy teraz kilka przykładów kresów funkcji.

**Przykład 6.26** Niech  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . Jest jasne, że  $-1 < f(x) < 1$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Czytelnik bez trudu sprawdzi, że jeśli  $0 \leq a < 1$  i  $x > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ , to  $a < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$ . Wykazaliśmy więc, że 1 jest ograniczeniem górnym funkcji  $f$  oraz że żadna liczba  $a$  mniejsza niż 1 nie jest ograniczeniem górnym funkcji  $f$ . Stąd wynika, że  $\sup f = 1$ . Ponieważ funkcja  $f$  jest nieparzysta ( $f(-x) = -f(x)$  dla każdego  $x$ ), więc  $\inf f = -1$ . ■

**Przykład 6.27** Kresem górnym funkcji  $\sin$  jest liczba 1, a kresem dolnym funkcji  $\sin$  – liczba  $-1$ . ■

**Przykład 6.28** Kresem górnym funkcji wykładniczej o podstawie  $e$  jest  $+\infty$ , a dolnym – liczba 0. ■

**Przykład 6.29** Kresem górnym logarytmu naturalnego jest  $+\infty$ , a kresem dolnym jest  $-\infty$ . ■

**Przykład 6.30** Kresem górnym niestałej funkcji liniowej jest  $+\infty$ , a kresem dolnym tej funkcji jest  $-\infty$ . ■

**Przykład 6.31** Kresem górnym funkcji  $f$ , danej wzorem  $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$ , jest  $+\infty$ , a kresem dolnym tej funkcji jest liczba  $-3$ . ■

**Przykład 6.32** Kresem górnym funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \sin \frac{1}{x}$  na przedziale otwarto-domkniętym  $(0, 1]$  jest liczba 1, a dolnym – liczba  $-1$ . Wynika to z tego, że dla  $x \in (0, 1]$  zachodzi nierówność  $\left| \frac{1}{1+x^2} \sin \frac{1}{x} \right| < 1$  oraz z równości  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+1)^2 \pi^2}{(4n+1)^2 \pi^2 + 1} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{(4n+3)\pi}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(4n+3)^2 \pi^2}{(4n+3)^2 \pi^2 + 1} = -1$ . Wiadąc więc, że w tym przypadku żaden z kresów nie jest wartością funkcji ograniczonej  $f$ . Można też zauważyć, że z przedstawionego rozumowania wynikają równości  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  i  $\liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ . ■

Zajmiemy się teraz funkcjami monotonicznymi i ściśle monotonicznymi.

### Definicja 6.33 (funkcji monotonicznych i ściśle monotonicznych)

Funkcja  $f$  określona na zbiorze  $X \subset \mathbb{R}$  jest

1. ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x, y$  konsekwencją nierówności  $x < y$  jest nierówność  $f(x) < f(y)$ ;
2. ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x, y$  konsekwencją nierówności  $x < y$  jest nierówność  $f(x) > f(y)$ ;

3. nierosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x, y$  konsekwencją nierówności  $x < y$  jest nierówność  $f(x) \geq f(y)$ ;

4. niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x, y$  konsekwencją nierówności  $x < y$  jest nierówność  $f(x) \leq f(y)$ . ■

Znów mamy do czynienia z rozszerzeniem pojęcia z ciągów na funkcje. Podamy tylko jeden przykład, bo licznych przykładów dostarczyliśmy już wcześniej w postaci ciągów monotonicznych, a i w przyszłości ich nie zabraknie. Niech  $f(x) = \frac{1}{x}$  dla  $x \neq 0$ . Zauważmy, że w całej dziedzinie funkcja nie jest monotoniczna:  $-1 < 1$  i jednocześnie  $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ , więc funkcja  $f$  nie może być nierosnąca, w szczególności nie może być malejąca;  $1 < 2$  i jednocześnie  $f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2)$ , zatem  $f$  nie może być funkcją niemalejącą, tym bardziej rosnącą. Natomiast czytelnik stwierdzi bez trudu, że  $f$  jest funkcją ściśle malejącą na każdej z dwu półprostych  $(-\infty, 0)$  i  $(0, +\infty)$ .

### Twierdzenie 6.34 (o istnieniu granic funkcji monotonicznej)

Jeśli  $f$  jest funkcją monotoniczną,  $p$  jest punktem skupienia jej dziedziny, to jeśli istnieje ciąg  $(x_n)$  argumentów funkcji  $f$  mniejszych niż  $p$ , zbieżny do  $p$ , to  $f$  ma granicę lewostronną w punkcie  $p$ , jeśli istnieje ciąg argumentów funkcji  $f$  większych niż  $p$ , zbieżny do  $p$ , to  $f$  ma granicę prawostronną w punkcie  $p$ .

**Dowód.** Wystarczy oczywiście udowodnić to twierdzenie przy założeniu, że funkcja  $f$  jest niemalejąca. Jeśli bowiem  $f$  jest nierosnąca, to funkcja przeciwna  $-f$  jest niemalejąca. Niech  $g$  będzie kresem górnym zbioru złożonego z wartości funkcji  $f$  osiągniętych w punktach  $x < p$  ( $g = \sup\{f(x) : x < p\}$ ). Trzeba wykazać, że  $g = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ . Jeśli  $x < p$ , to  $f(x) \leq g$ . Jeśli  $m < g$  jest liczbą rzeczywistą, to ponieważ  $m$  nie jest ograniczeniem górnym zbioru tych wartości funkcji  $f$ , które są osiągnięte w punktach  $x < p$ , więc istnieje argument  $x' < p$ , taki że  $f(x') > m$ . Stąd wynika, że jeśli  $x' < x < p$  to  $m < f(x') \leq f(x) \leq g$ , zatem: jeśli  $x < p$  jest dostatecznie bliskie  $p$ , to  $f(x)$  jest dostatecznie bliskie  $g$ , co dowodzi tego, że  $g = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ . Analogicznie dowodzimy, że jeśli istnieje ciąg argumentów większych niż  $p$ , zbieżny do  $p$ , to kres dolny tych wartości funkcji, które są przyjmowane w punktach większych niż  $p$  jest prawostronną granicą funkcji  $f$  w punkcie  $p$ . Dowód został zakończony. ■

Przechodzimy teraz do jednego z najważniejszych pojęć — do ciągłości. Rozpoczniemy od definicji.

### Definicja 6.35 (funkcji ciągłej)

Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  jest argumentem funkcji i zachodzi jedna z dwu możliwości:

- (i)  $p$  nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji  $f$ ;
- (ii)  $p$  jest punktem skupienia dziedziny funkcji  $f$ , która ma granicę w punkcie  $p$  i ta granica jest równa wartości funkcji w punkcie  $p$ :  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ . ■

**Twierdzenie 6.36 (charakteryzujące ciągłość)**

Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje liczba  $\delta > 0$ , taka że jeśli  $|x - p| < \delta$ , to  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ .

**Dowód.** Jeżeli  $p$  nie jest punktem skupienia dziedziny funkcji  $f$ , to istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że jedynym punktem  $x$  dziedziny funkcji  $f$ , dla którego  $|x - p| < \delta$  jest punkt  $p$  – w tym przypadku  $|f(x) - f(p)| = |f(p) - f(p)| = 0 < \varepsilon$ , niezależnie od wyboru liczby dodatniej  $\varepsilon$ . Pozostała część twierdzenia może być otrzymana natychmiast z definicji otoczeniowej granicy funkcji. Dowód został zakończony. ■

Z poznanych twierdzeń o granicach funkcji wynika od razu następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.37 (o operacjach na funkcjach ciągłych)**

Założmy, że funkcje  $f$  i  $g$  określone na wspólnej dziedzinie są ciągłe w punkcie  $p$ . Wtedy następujące funkcje są ciągłe w punkcie  $p$ :  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  oraz  $\frac{f}{g}$  pod warunkiem  $g(p) \neq 0$ . ■

Ważną operacją jest składanie (superponowanie) funkcji. Polega ono na „wykonaniu” po kolei dwu funkcji:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . Okazuje się, że składając funkcje ciągłe otrzymujemy w rezultacie funkcję ciągłą.

**Twierdzenie 6.38 (o ciągłości złożenia dwu funkcji)**

Jeżeli funkcja  $g$  jest ciągła w punkcie  $p$ , funkcja  $f$  określona na zbiorze zawierającym zbiór wartości funkcji  $g$  jest ciągła w punkcie  $g(p)$ , to złożenie  $f \circ g$  jest funkcją ciągłą w punkcie  $p$ .

**Dowód.** Wynika to od razu z otoczeniowej definicji ciągłości: jeśli  $\varepsilon > 0$ , to istnieje  $\delta > 0$ , takie że jeśli  $|y - g(p)| < \delta$ , to  $|f(y) - f(g(p))| < \varepsilon$ , istnieje też  $\eta > 0$ , takie że jeśli  $|x - p| < \eta$ , to  $|g(x) - g(p)| < \delta$ , a wobec tego  $|f(g(x)) - f(g(p))| < \varepsilon$ . Dowód został zakończony. ■

Nie jest natomiast prawdą, że funkcja odwrotna do funkcji  $f$  ciągłej w punkcie  $p$  musi być ciągła w punkcie  $f(p)$ . Zachęcamy czytelników do samodzielnego skonstruowania przykładu. Musi on być nieco dziwaczny, bowiem jeśli założymy, że funkcja  $f$  jest ciągła w całej dziedzinie, która jest przedziałem, to wtedy funkcja odwrotna musi być ciągła, mówimy o funkcji, której wartościami są liczby rzeczywiste. Tego twierdzenia jednak nie udowodnimy teraz, bowiem jego dowód stanie się łatwiejszy później.

Podamy jeszcze twierdzenie pozwalające w licznych przypadkach stwierdzać ciągłość popularnych funkcji.

**Twierdzenie 6.39 (o ciągłości funkcji monotonicznej)**

Jeśli funkcja monotoniczna  $f$  określona na zbiorze  $X \subset \mathbb{R}$  przekształca zbiór  $X$  na przedział, to jest ciągła w każdym punkcie zbioru  $X$ .

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi założymy, że funkcja  $f$  jest niemalejąca. Jeśli  $p \in A$  jest granicą ciągu  $(a_n)$  punktów zbioru  $A$  mniejszych niż  $p$ , to istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) \leq f(p)$ . Ponieważ dla  $x \geq p$  zachodzi nierówność  $f(x) \geq f(p)$ , a dla  $x < p$

zachodzi nierówność  $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ , więc z tego, że obrazem zbioru  $A$  jest przedział, wynika, że  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = f(p)$ : gdyby było  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) < f(p)$ , to punkty przedziału  $(\lim_{x \rightarrow p^-} f(x), f(p))$  byłyby poza zbiorem  $f(A)$ , więc nie byłyby on przedziałem. Podobnie: jeśli istnieje ciąg  $(a'_n)$  większych niż  $p$  zbieżny do  $p$ , to  $f(p) = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ . Stąd wynika, że  $f$  jest ciągła w punkcie  $p$ . Dowód został zakończony. ■

#### Wniosek 6.40

Jeśli  $f$  jest funkcją monotoniczną określoną na przedziale  $P$ , to  $f$  jest ciągła w każdym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  przekształca przedział  $P$  na pewien przedział (zdegenerowany do punktu w przypadku, gdy  $f$  jest funkcją stałą). ■

#### Wniosek 6.41 (o liczbie punktów nieciągłości funkcji monotonicznej)

Jeśli  $X \subseteq \mathbb{R}$  jest zbiorem niepustym,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją monotoniczną, to zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f$  jest co najwyżej przeliczalny.

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że funkcja  $f$  jest niemalejąca. Jeśli  $p \in X$  jest punktem, w którym funkcja  $f$  jest nieciągła, to zachodzi co najmniej jedna z nierówności  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) < f(p)$ ,  $f(p) < \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ . Niech  $w_p$  będzie taką liczbą wymierną, że  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) < w_p < f(p)$ , a jeśli  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = f(p)$ , to taką, że  $f(p) < w_p < \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ . Z tego określenia wynika, że jeśli  $p < q$  i  $f$  jest nieciągła w obydwóch punktach, to  $w_p < w_q$ . Wynika stąd, że różnym punktom nieciągłości odpowiadają różne liczby wymierne. Teza wynika z przeliczalności zbioru wszystkich liczb wymiernych. ■

**Przykład 6.42** Funkcja stała jest ciągła w każdym punkcie. ■

**Przykład 6.43** Funkcja *identyczność*, czyli funkcja, której wartością w punkcie  $x$  jest liczba  $x$  jest ciągła w każdym punkcie prostej — wynika to natychmiast z definicji ciągłości. Zamiast mówić funkcja *identyczność* będziemy mówić funkcja  $x$ , rozumiejąc, że jest ona określona na całej prostej. ■

**Przykład 6.44** Funkcje  $x^2$ ,  $x^3$ , ... są ciągłe w każdym punkcie prostej. Wynika to natychmiast z twierdzenia o ciągłości iloczynu funkcji ciągłych i poprzedniego przykładu. ■

**Przykład 6.45** Każdy wielomian, czyli funkcja postaci  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , gdzie  $a_0, a_1, \dots, a_n$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, jest ciągła w każdym punkcie prostej. Wynika to z poprzednich przykładów oraz twierdzenia o ciągłości iloczynu i sumy funkcji: funkcja postaci  $a_jx^j$  jest iloczynem funkcji stałej o wartości  $a_j$  oraz funkcji  $x^j$ , wielomian jest sumą takich funkcji. ■

**Przykład 6.46** Funkcja  $\frac{x-1}{x+3}$ , której dziedziną jest zbiór złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby  $-3$ , jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny, bo jest ilorazem funkcji ciągłych. ■

**Przykład 6.47** Funkcja wykładnicza  $e^x$  jest ciągła. Wykazaliśmy to wcześniej, zresztą wynika to od razu z tego, że  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ , bo z tej równości wynika łatwo wzór  $\lim_{h \rightarrow 0} e^{x+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \cdot h + e^x \right) = 1 \cdot 0 + e^x = e^x$ . Inne uzasadnienie uzyskujemy powołując się na monotoniczność funkcji wykładniczej i to, że zbiorem jej wartości jest **przedział**  $(0, \infty)$ . ■

**Przykład 6.48** Logarytm naturalny (o podstawie  $e$ ) jest funkcją ciągłą. Wynika to stąd, że zbiorem wartości logarytmu naturalnego jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. ■

**Przykład 6.49** Dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  funkcja potęgowa  $x^a$  o wykładniku  $a$  jest ciągła w każdym punkcie półprostej  $(0, +\infty)$ . Wynika to z ciągłości logarytmu naturalnego, ciągłości funkcji wykładniczej o podstawie  $e$  i ciągłości iloczynu oraz złożenia funkcji ciągłych:  $x^a = e^{a \ln x}$ . ■

**Przykład 6.50** Jeśli  $a > 0$ , to funkcja  $x^a$  jest ciągła w punkcie 0, jej wartość w punkcie 0 definiujemy w tym przypadku jako 0. Zakładamy oczywiście, że dziedziną funkcji  $x^a$  jest  $[0, \infty)$ . Musimy udowodnić, że jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , to również  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^a = 0$ . Jest tak dla  $a = \frac{1}{k}$ ,  $k$  — dowolna liczba całkowita większa niż 1, bo gdyby tak nie było, to istniałyby ciąg  $(x_n)$  i liczba  $g$  takie, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = g \neq 0$ , jednak wtedy zachodziłaby równość

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{x_n})^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} \right)^k = g^k \neq 0.$$

W przypadku dowolnego  $a$  znajdujemy najpierw dodatnią liczbę całkowitą  $k > \frac{1}{a}$ . Dla każdej liczby nieujemnej  $x < 1$  mamy wtedy  $0 \leq x^a \leq x^{1/k}$ . Teza wynika teraz z twierdzenia o trzech ciągach. ■

**Przykład 6.51** Jeśli  $a = \frac{p}{q}$ , gdzie  $q$  jest nieparzystą liczbą całkowitą dodatnią, zaś  $p$  liczbą całkowitą ujemną, to funkcja  $x^a = \sqrt[q]{x^p}$  jest ciągła w każdym punkcie półprostej  $(-\infty, 0)$ . Wynika to od razu z ciągłości funkcji pierwiastek  $q$ -tego stopnia, ciągłości wielomianu i ciągłości ilorazu funkcji ciągłych oraz twierdzenia o ciągłości złożenia. ■

W ostatnich trzech przykładach wykazaliśmy, że funkcja potęgowa jest ciągła wszędzie tam, gdzie jest określona.

**Przykład 6.52** Funkcje sinus i kosinus są ciągłe w każdym punkcie prostej. Jest to konsekwencja nierówności  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$  oraz  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ . ■

**Przykład 6.53** Funkcja  $\arcsin$  jest ciągła na przedziale  $[-1, 1]$ , bo zbiorem jej wartości jest **przedział**  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . ■

**Przykład 6.54** Funkcja  $\arctg$  jest ciągła na całej prostej, bo zbiorem jej wartości jest **przedział**  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . ■

**Przykład 6.55** Dla każdej liczby rzeczywistej  $a > 0$  funkcja wykładnicza  $a^x$  jest ciągła w każdym punkcie prostej rzeczywistej. Wynika to z tego, że  $a^x = e^{x \ln a}$ , twierdzeń o ciągłości iloczynu i złożenia oraz ciągłości funkcji wykładniczej o podstawie  $e$  i ciągłości identyczności oraz funkcji stałej. ■

Z tych przykładów wynika, że każda funkcja, którą można zdefiniować „wzorem” używając standardowych funkcji, jest ciągła w całej swojej dziedzinie, na przykład funkcja  $\exp\left(\frac{\sin(x^2 - 12x + 2)}{\operatorname{tg}(\cos x + \ln x)}\right) - \sin \sqrt{x^4 - 113}$ . Wynika to z wielokrotnego stosowania twierdzeń o ciągłości złożenia, sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu. Mogłoby więc powstać wrażenie, że wszystkie funkcje są ciągłe. Tak jednak nie jest. Podamy poniżej kilka przykładów.

**Przykład 6.56**  $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$  dla  $x \neq 0$  oraz  $f(0) = 0$ , ta funkcja jest ciągła w każdym punkcie  $p \neq 0$ , bo wtedy jest stała w pewnym przedziale otwartym zawierającym  $p$ , w punkcie 0 ta funkcja jest nieciągła, bowiem jej granica prawostronna jest w tym punkcie równa 1, lewostronna jest równa  $-1$ , więc funkcja  $\operatorname{sgn}$  (znak liczby) nie ma granicy w punkcie 0. ■

**Przykład 6.57** Niech  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  dla  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Funkcja tak zdefiniowana nie ma granicy w punkcie 0, więc nie jest w tym punkcie ciągła. We wszystkich innych punktach jest ciągła jako złożenie funkcji ciągłej sinus z funkcją ciągłą  $\frac{1}{x}$ . ■

**Przykład 6.58** Niech  $f(x) = 1$  dla  $x \neq 0$  i  $f(0) = 0$ . Funkcja ta jest nieciągła w punkcie 0, choć ma w tym punkcie granicę, jednak ta granica nie jest równa wartości funkcji w punkcie 0. W innych punktach  $p$  funkcja jest ciągła, bo jest stała na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt  $p$ . Oczywiście można uznać ten przykład za sztuczny. ■

**Przykład 6.59** Niech  $V(t)$  oznacza objętość jednego kilograma wody w temperaturze  $t$ , ciśnienie jest stałe, tzw. normalne i niezależne od temperatury. Ze szkolnych lekcji fizyki wiadomo, że funkcja  $V$  ma nieciągłość w punkcie 0 tj. w temperaturze, w której następuje przejście ze stanu ciekłego w stały lub odwrotnie, zresztą w punkcie 0 funkcja jest z punktu widzenia fizyki niezdefiniowana, ze względu na zmianę stanu skupienia. Granice jednostronne istnieją: prawostronna jest mniejsza niż lewostronna (dlatego lód pływa w wodzie wystając z niej). Przykład ten podajemy po to, by czytelnicy tego tekstu zdawali sobie sprawę, że w niektórych sytuacjach pojawiają się funkcje nieciągłe w naturalny sposób. ■

**Przykład 6.60** Niech  $f(x) = 1$ , jeśli liczba  $x$  jest wymierna, tj.  $x$  jest ilorazem dwu liczb całkowitych i niech  $f(x) = 0$ , jeśli  $x$  jest liczbą niewymierną, np. jeśli  $x = \frac{m}{n}\sqrt{2}$ , gdzie  $m, n$  są liczbami całkowitymi różnymi od 0. Funkcja ta nie ma granicy w żadnym punkcie, bo każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych, np. swoich przybliżeń dziesiętnych oraz granicą ciągu liczb niewymiernych. W pierwszym przypadku ciąg wartości funkcji dąży do 1, a w drugim do 0. Wobec

tego funkcja ta jest nieciągła w każdym punkcie! Można udowodnić, to jest łatwe!, że  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(k! \pi x))^{2n} \right)$ , więc ta dziwna funkcja może być otrzymana w wyniku podwójnego przejścia granicznego z funkcji uważanych za podstawowe. ■

Potrzebne nam będą jeszcze dwie definicje. Chodzi o to, że w wielu przypadkach pojawiać się będą funkcje ciągłe, które będą mieć jeszcze dodatkowe własności. Zrozumienie trzech definicji jest — wbrew pozorom — łatwiejsze niż zrozumienie tylko jednej z nich.

### Definicja 6.61 (jednostajnej ciągłości)

Funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła na zbiorze  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \blacksquare$$

### Definicja 6.62 (warunku Lipschitza)

Funkcja  $f$  spełnia warunek Lipschitza na zbiorze  $A$  ze stałą dodatnią  $L < +\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych  $x, y \in A$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \blacksquare$$

Jest jasne, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest jednostajnie ciągła: wystarczy przyjąć, że  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ . Jest też jasne, że funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła. Istnieją funkcje ciągłe, które nie są jednostajnie ciągłe.

**Przykład 6.63** Funkcja  $x^2$  rozpatrywana na całej prostej nie jest ciągła jednostajnie. Załóżmy bowiem, że  $\varepsilon = 1$  oraz że istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że jeżeli  $|x - y| < \delta$ , to  $|x^2 - y^2| < 1 = \varepsilon$ . Niech  $x = \frac{1}{\delta}$  i niech  $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ . Wtedy jednak zachodzi nierówność  $|x^2 - y^2| = 1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 > 1 = \varepsilon$ , więc wbrew przypuszczeniu nie istnieje liczba  $\delta$  spełniająca żądany warunek. ■

Można wykazać, że funkcje  $e^x$  na całej prostej,  $\ln x$  na półprostej  $(0, +\infty)$  itp. nie są jednostajnie ciągłe, choć zmniejszenie dziedziny może zmienić sytuację.

**Przykład 6.64** Funkcja  $e^x$  spełnia warunek Lipschitza na półprostej postaci  $(-\infty, a]$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ . Jeśli bowiem  $y < x \leq a$ , to

$$|e^x - e^y| = e^x(1 - e^{y-x}) \leq e^x(1 - (1 + (y - x))) = e^x(x - y) \leq e^a|x - y|. \blacksquare$$

**Przykład 6.65** Funkcja liniowa  $ax + b$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $|a|$ , co wynika od razu z równości  $|(ax + b) - (ay + b)| = |a| \cdot |x - y|$ .

**Przykład 6.66** Funkcja  $x^2$  rozpatrywana nie na całej prostej, lecz na przedziale  $[-M, M]$ , gdzie  $M > 0$ , spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $2M$ , bowiem

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq |x - y|(|x| + |y|) \leq 2M|x - y|.$$

**Przykład 6.67** Funkcja  $\sqrt{x}$  rozpatrywana na całej prostej jest jednostajnie ciągła ale nie spełnia warunku Lipschitza: jeśli  $x > y$ , to  $0 < \sqrt{x} - \sqrt{y} < \sqrt{x - y}$ , co można wykazać przenosząc  $\sqrt{y}$  na prawą stronę nierówności, a następnie podnosząc obie strony nierówności do kwadratu — z tej nierówności wynika jednostajna ciągłość,

starczy przyjąć, że  $\delta = \varepsilon^2$ . Z warunku Lipschitza wynikałoby, że

$$L \geq \frac{\sqrt{1/n} - \sqrt{0}}{1/n - 0} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

co oczywiście przeczy temu, że  $L < +\infty$ . ■

Wykazaliśmy więc, że

$$\text{warunek Lipschitza} \implies \text{jednostajna ciągłość} \implies \text{ciągłość}$$

oraz że żadna z tych implikacji nie może być zastąpiona równoważnością.

Warto jeszcze dodać, że w definicji (otoczeniowej) ciągłości funkcji w punkcie żąda się istnienia liczby  $\delta > 0$  i że takie samo żądanie występuje w definicji ciągłości jednostajnej. Różnica polega na tym, że w definicji ciągłości liczba  $\delta > 0$  jest dopasowywana do punktu, w którym badana jest ciągłość i do liczby  $\varepsilon > 0$ , natomiast w definicji ciągłości jednostajnej  $\delta > 0$  zależy **wyłącznie** od  $\varepsilon$ .