

Szeregi o wyrazach dowolnych znaków, dwumian Newtona

Twierdzenie 5.1 kryterium Abela – Dirichleta

Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb dodatnich.

D. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

A. Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ też jest zbieżny.

W obu przypadkach zakładamy, że $b_n \in \mathbb{C}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$.

Dowód. Niech $s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Zachodzi równość

$$\begin{aligned} a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+k}b_{n+k} &= \\ &= (s_{n+1} - s_n)a_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})a_{n+2} + \dots + (s_{n+k} - s_{n+k-1})a_{n+k} = \\ &= (s_{n+1} - s_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) + (s_{n+2} - s_n)(a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots + \\ &\quad + (s_{n+k-1} - s_n)(a_{n+k-1} - a_{n+k}) + a_{n+k}(s_{n+k} - s_n). \end{aligned}$$

Jeśli $|s_j| \leq M$ dla każdej liczby $j \in \mathbb{N}$ i $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, to

$$\begin{aligned} |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+k}b_{n+k}| &\leq 2M(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \dots + \\ &\quad + |a_{n+k-1} - a_{n+k}|) + 2Ma_{n+k} = 2Ma_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

zatem spełniony jest warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu $\sum a_n b_n$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku Abela.

Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny a ε jest liczbą dodatnią, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n nierówność $|s_{n+j} - s_n| < \varepsilon$ zachodzi dla $j = 1, 2, \dots$ (warunek Cauchy'ego). Wobec tego

$$\begin{aligned} |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+k}b_{n+k}| &\leq \\ &\leq \varepsilon(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \dots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}|) + \varepsilon a_{n+k} = \varepsilon a_{n+1}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że szereg $\sum a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny. ■

Uwaga 5.2 Kryterium Dirichleta to rozszerzenie poznanego już wcześniej kryterium Leibniza. By przekonać się o tym wystarczy przyjąć $b_n = (-1)^n$. ■

Przykład 5.3 Dla każdej liczby $z \neq -1$ takiej, że $|z| = 1$ szereg $\sum \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ jest zbieżny. Wynika to z kryterium Dirichleta, bowiem ciąg $(z - z^2 + \dots + (-1)^{n-1} z^n)$, czyli ciąg $(\frac{z - (-1)^{n-1} z^n}{1+z})$ jest ograniczony przez $\frac{2}{|1+z|}$ a ciąg $(\frac{1}{n})$ jest malejący i zbieżny do 0.

Dodać wypada, że jeśli $|z| < 1$, to szereg $\sum \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie, wynika to natychmiast z kryterium porównawczego: $|\frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}| \leq |z|^n$ i zbieżności szeregu geometrycznego o ilorazie mniejszym niż 1. ■

Definicja 5.4 (symbolu Newtona)

Dla każdej liczby zespolonej a przyjmujemy $\binom{a}{0} = 1$ i $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$. ■

Stwierdzenie 5.5

Dla każdej liczby zespolonej a i każdej liczby naturalnej $n > 0$ zachodzą równości $\binom{a}{n-1} + \binom{a}{n} = \binom{a+1}{n}$ i $\binom{a+1}{n} = \frac{a+1}{n} \cdot \binom{a}{n-1}$. ■

Dowód tego stwierdzenia to banalne sprawdzenie z definicji (dla osób, które potrafią dodawać ułamki), więc pomijamy ten rachunek.

Przykład 5.6 Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby $a \in \mathbb{C}$,

jeśli $|z| < 1$. Zachodzi bowiem wzór $\left| \frac{\binom{a}{n+1} z^{n+1}}{\binom{a}{n} z^n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \cdot z \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z| < 1$. Niech

$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$, z jest teraz ustaloną liczbą zespoloną, której wartość bezwzględna jest *mniejsza* niż 1. Z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów wynika, że prawdziwy jest wzór

$$f(a)f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \binom{a}{j} \binom{b}{n-j} \right) z^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+b}{n} z^n = f(a+b),$$

bowiem $\sum_{j=0}^n \binom{a}{j} \binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$.

Wykażemy, że ta równość jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych a, b . Gdy a i b są liczbami naturalnymi większymi od n , to ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ (dla zespolonych też, ale z tego nie skorzystamy), zatem współczynniki po obu stronach przy x^n otrzymane po podniesieniu do potęg i wymnożeniu są równe.

Obie strony równości $\sum_{j=0}^n \binom{a}{j} \binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$ można potraktować jako wielomiany zmiennej a , stopnia $\leq n$, ich wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach, zatem te wielomiany są równe. Wobec tego $\sum_{j=0}^n \binom{a}{j} \binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}$ dowolnej liczby $a \in \mathbb{C}$, o ile b jest liczbą naturalną $> n$. Teraz traktujemy obie strony jako wielomiany zmiennej b , liczbę a ustalamy. Znowu obie strony są wielomianami stopnia $\leq n$, których wartości pokrywają się w nieskończenie wielu punktach ($b > n$, naturalne) i wobec tego pokrywają się zawsze.

Teraz przedstawimy dowód indukcyjny tej równości, by uniknąć korzystania z twierdzenia o jednoznaczności współczynników funkcji wielomianowej, którego jeszcze nie wykazaliśmy. Mamy $\binom{a+b}{0} = 1 = 1 \cdot 1 = \binom{a}{0} \cdot \binom{b}{0}$. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla każdej liczby naturalnej $k \leq n$ dla dowolnych liczb zespolonych a, b . Wykażemy równość $\binom{a+b}{n+1} = \binom{a}{0} \binom{b}{n+1} + \binom{a}{1} \binom{b}{n} + \dots + \binom{a}{n-1} \binom{b}{1} + \binom{a}{n} \binom{b}{0}$. Skorzystamy w dowodzie z łatwej do udowodnienia równości $(j+1) \binom{c}{j+1} = c \binom{c-1}{j}$, która zachodzi dla każdej liczby naturalnej j i każdej liczby zespolonej c . Mamy więc

$$(n+1) \binom{a+b}{n+1} = (a+b) \binom{a+b-1}{n} = a \binom{a+b-1}{n} + b \binom{a+b-1}{n} \stackrel{\text{założenie}}{\stackrel{\text{indukcyjne}}{=}} \\ = a \sum_{j=0}^n \binom{a-1}{j} \binom{b}{n-j} + b \sum_{j=0}^n \binom{a}{j} \binom{b-1}{n-j} = \sum_{j=0}^n (j+1) \binom{a}{j+1} \binom{b}{n-j} + \sum_{j=0}^n (n-j+1) \binom{a}{j} \binom{b}{n-j+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n+1} j \binom{a}{j} \binom{b}{n+1-j} + \sum_{j=0}^n (n+1-j) \binom{a}{j} \binom{b}{n-j} = \\
&= (n+1) \binom{a}{n+1} \binom{b}{0} + \sum_{j=1}^n (n+1) \binom{a}{j} \binom{b}{n+1-j} + (n+1) \binom{a}{0} \binom{b}{n+1} = (n+1) \sum_{j=0}^{n+1} \binom{a}{j} \binom{b}{n+1-j}.
\end{aligned}$$

Dowód został zakończony. ■

Przykład 5.7 Obliczymy granicę $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)-1}{a}$.

Oznacza to, że wykażemy, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\forall_n a_n \neq 0$, to istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n)-1}{a_n}$ i ta granica nie zależy od wyboru ciągu (a_n) . Jeśli $a \neq 0$, to

$$\frac{f(a)-1}{a} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} (-1)^{n-1} z^n.$$

Na tzw. „chłopski rozum” powinna więc zachodzić równość

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} := L(z).^1$$

Udowodnimy tę hipotetyczną (na razie) równość. Jeśli $|a| < 1$ i $n > 1$, to

$$\left| \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} (-1)^{n-1} z^n \right| \leq \frac{(1+|a|)(2+|a|)\dots(n-1+|a|)}{n!} |z|^n \leq \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n!} |z|^n = |z|^n,$$

$$\text{zatem } \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} (-1)^{n-1} z^n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|}$$

Stąd wynika, że jeżeli $\varepsilon > 0$, to istnieje takie $k > 1$, że zachodzi nierówność (przypominamy: z nie zmienia się i $|z| < 1$):

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} (-1)^{n-1} z^n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |z|^{n+1} = \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd i z tego, że $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} = \frac{1}{n}$ dla $n = 2, 3, \dots, k$, wynikają kolejne nierówności

$$\begin{aligned}
\left| z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} (-1)^{n-1} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \right| &< \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \sum_{n=2}^k \left(\frac{(1-a)(2-a)\dots(n-1-a)}{n!} - \frac{1}{n} \right) (-1)^{n-1} z^n \right| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

jeśli tylko liczba $\delta > 0$ jest dostatecznie mała i $|a| < \delta$. Oznacza to, że

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} =: L(z).$$

Z twierdzenia o jednoznaczności zespolonej funkcji wykładniczej wynika, że równość $f(a) = e^{aL(z)}$ ma miejsce dla każdej liczby zespolonej a . Podstawiając $a = 1$ otrzymujemy $e^{L(z)} = f(1) = 1 + z$, zatem $L(z) = \ln(1 + z)$. Jeśli liczba z jest rzeczywista,

¹ Autor przypuszcza, że w niektórych wsiach niektórzy chłopcy (rolnicy) mogą nie mieć poglądu w tej kwestii, np. z braku zainteresowania nią. Zauważmy jeszcze, że $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+k}) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{n+k})$. Pokazaliśmy, że kolejność przechodzenia do granicy może wpływać na wartość granicy, a właśnie z takim problemem mamy teraz do czynienia.

to mamy do czynienia z logarytmem dobrze znanym, rzeczywistym. Jeśli natomiast liczba z rzeczywista nie jest, to jest to jedna z nieskończenie wielu możliwych wartości logarytmu zespolonego. Otrzymaliśmy więc wzór

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n = f(a) = e^{aL(z)} = e^{a \ln(1+z)} = (1+z)^a.$$

Z tych równości wynika między innymi, że jeśli $|z| < 1$, to $e^{\ln(1+z)} = 1+z$. Dodać należy, że równość $e^{a \ln(1+z)} = (1+z)^a$ jest twierdzeniem w przypadku rzeczywistej liczby z , jeżeli liczba z nie jest rzeczywista, to należy tę równość potraktować jako definicję potęgi o podstawie $1+z$. Ogólnie przyjmujemy, że $z^w = e^{w \ln z}$, gdzie $\ln z$ oznacza dowolną liczbę zespoloną, dla której zachodzi wzór $z = e^{\ln z}$. Kwestiami tymi nie będziemy się zbyt dokładnie zajmować, bo na ogół używana jest potęga o podstawie e , inne bywają używane, ale nieporównanie rzadziej.

Udowodnimy jeszcze, zwykle niedowodzone na I roku studiów,

Twierdzenie 5.8 o wartościach sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$

Jeśli $|z| < 1$, to zachodzi nierówność

$$|\operatorname{Im}(L(z))| = \left| \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \right) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \right) \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taka liczba z_0 , że $|z_0| < 1$ oraz

$$\left| \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z_0^n}{n} \right) \right| \geq \frac{\pi}{2}.$$

Definiujemy: $g(s) = |\operatorname{Im}(L(sz_0))| = \left| \operatorname{Im} \left(sz_0 - \frac{1}{2}(sz_0)^2 + \frac{1}{3}(sz_0)^3 - \frac{1}{4}(sz_0)^4 + \dots \right) \right|$. Niech $t = \inf\{\tau > 0: g(\tau) \geq \frac{\pi}{2}\}$. Udowodnimy, że t jest najmniejszą liczbą dodatnią, dla której $g(t) = \frac{\pi}{2}$, co jest prawie oczywiste.²

Ponieważ $g(1) = |\operatorname{Im}(L(z_0))| \geq \frac{\pi}{2}$, więc $t \leq 1$.

Niech $r = |z_0| < 1$. Oczywiście $r = |z_0| > 0$. Jeśli $|z_1| \leq r$ i $|z_2| \leq r$, to $|L(z_1) - L(z_2)| = |z_1 - z_2| \cdot \left| 1 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{3}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) - \frac{1}{4}(z_1^3 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_2^3) + \dots \right| \leq |z_1 - z_2|(1 + r + r^2 + r^3 + \dots) = \frac{1}{1-r} |z_1 - z_2|$.

Wobec tego $|g(\tau_1) - g(\tau_2)| \leq \frac{|z_0|}{1-r} \cdot |\tau_1 - \tau_2|$. Udowodnimy, że $g(t) = \frac{\pi}{2}$. Jeżeli $g(t) > \frac{\pi}{2}$ i $0 < t - \tau < \frac{1-r}{|z_0|} (g(t) - \frac{\pi}{2})$, to

$$g(t) - g(\tau) \leq |g(t) - g(\tau)| \leq \frac{|z_0|}{1-r} \cdot |t - \tau| < \frac{|z_0|}{1-r} \cdot \frac{1-r}{|z_0|} (g(t) - \frac{\pi}{2}) = g(t) - \frac{\pi}{2},$$

zatem $g(\tau) > \frac{\pi}{2}$, wbrew temu, że $g(\tau) < \frac{\pi}{2}$ dla $\tau < t$. Wobec tego $g(t) \leq \frac{\pi}{2}$. Podobnie

² Dowód tylko dlatego jest konieczny, że nie pojawiło się jeszcze twierdzenie Bolzano–Cauchy’ego o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję ciągłą.

z nierówności $g(t) < \frac{\pi}{2}$ i nierówności $0 < \tau - t < \frac{1-r}{|z_0|} \left(\frac{\pi}{2} - g(t) \right)$ wynika, że $g(\tau) < \frac{\pi}{2}$, co też jest niemożliwe. Wobec tego $|\operatorname{Im}(L(tz_0))| = g(t) = \frac{\pi}{2}$.

Wynika stąd, że

$$1 + tz_0 = e^{L(tz_0)} = e^{\pm i\pi/2} \cdot e^{\operatorname{Re}(L(tz_0))} = \pm ie^{\operatorname{Re}(L(tz_0))},$$

więc $\operatorname{Re}(1 + tz_0) = 0$, a to nieprawda, bo z nierówności $|tz_0| < 1$, wynika, że $\operatorname{Re}(1 + tz_0) > 0$. Dowód został zakończony. ■

Zakończymy opowieść o szeregach liczbowych twierdzeniem, które mówi, że jeśli nawet iloczyn Cauchy'ego szeregów zbieżnych nie jest zbieżny, to i tak należy o nim myśleć jako o ich iloczynie.

Twierdzenie 5.9 (Cesàro)

Niech $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą szeregami zbieżnymi. Niech $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $B_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$, $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$, $C_n = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$. Zachodzi wtedy równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (C_0 + C_1 + \dots + C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0) = \\ &= a_0(b_0 + b_1 + \dots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_{n-1}(b_0 + b_1 + \dots + b_1) + a_nb_0 = \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \dots + a_{n-1}B_1 + a_nB_0 \end{aligned}$$

i wobec tego $C_0 + C_1 + \dots + C_n =$

$$\begin{aligned} &= a_0B_0 + (a_0B_1 + a_1B_0) + (a_0B_2 + a_1B_1 + a_2B_0) + \\ &\quad + \dots + (a_0B_n + a_1B_{n-1} + \dots + a_{n-1}B_1 + a_nB_0) = \\ &= B_0(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) + B_1(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \dots + B_na_0 = \\ &= B_0A_n + B_1A_{n-1} + B_2A_{n-2} + \dots + B_nA_0. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Niech $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ i niech $M > 0$ będzie taką liczbą,

że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $|a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq M$, $|b_0 + b_1 + \dots + b_n| \leq M$. Niech n_ε będzie taką liczbą naturalną, że dla $n \geq n_\varepsilon$ zachodzą nierówności $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{4M}$ i $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Niech wreszcie $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ będzie liczbą naturalną tak dużą, że nierówność $\frac{8M^2n_\varepsilon}{\varepsilon} - 1 < n$, czyli $\frac{2M^2n_\varepsilon}{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$, zachodzi dla $n \geq m_\varepsilon$. Wtedy dla dowolnych numerów i, j zachodzą nierówności $|A_iB_j - AB| \leq |A_i| \cdot |B_j| + |A| \cdot |B| \leq 2M^2$. Jeśli zaś $i \geq m_\varepsilon$ oraz $j \geq m_\varepsilon$, to $|A_iB_j - AB| \leq |A_i - A| \cdot |B_j| + |A| \cdot |B_j - B| < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd zaś wynika, że

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n+1} (A_0B_n + A_1B_{n-1} + \dots + A_{n-1}B_1 + A_nB_0) - AB \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n+1} (|A_0B_n - AB| + |A_1B_{n-1} - AB| + \dots + |A_{n-1}B_1 - AB| + |A_nB_0 - AB|) \leq \\ & \leq \frac{1}{n+1} (|A_0B_n - AB| + |A_1B_{n-1} - AB| + \dots + |A_{n_\varepsilon-1}B_{n-n_\varepsilon+1} - AB|) + \\ & \quad + \frac{1}{n+1} (|A_{n_\varepsilon}B_{n-n_\varepsilon} - AB| + |A_{n_\varepsilon+1}B_{n-n_\varepsilon-1} - AB| + \dots + |A_{n-n_\varepsilon}B_{n_\varepsilon} - AB|) + \\ & \quad + \frac{1}{n+1} (|A_{n-n_\varepsilon+1}B_{n_\varepsilon-1} - AB| + \dots + |A_{n-1}B_1 - AB| + |A_nB_0 - AB|) < \end{aligned}$$

$$< \frac{n_\varepsilon}{n+1} \cdot 2 \cdot M^2 + \frac{n+1-2n_\varepsilon}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n_\varepsilon}{n+1} \cdot 2 \cdot M^2 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli n jest dostatecznie duże ($n > m_\varepsilon$), to

$$\left| \frac{1}{n+1} (C_0 + C_1 + \dots + C_{n-1} + C_n) - AB \right| < \varepsilon,$$

a to oznacza, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (C_0 + C_1 + \dots + C_{n-1} + C_n) = AB$. ■