

Analiza 1, część trzecia – szeregi o wyrazach dodatnich

Ostatnia aktualizacja 7 lipca 2025

Twierdzenie 3.1 (łątność sumowania nieskończonego)

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny a ciąg (k_n) jest ściśle rosnący,

$$b_n = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \cdots + a_{k_{n+1}-1}, \quad k_0 = 0,$$

to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest podciągiem ciągu sum czę-

ściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: $b_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{k_1-1}$, $b_0 + b_1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{k_2-1}$, itd.

Jeśli ciąg jest zbieżny, to wszystkie jego podciągi są zbieżne do granicy tego ciągu. ■

Twierdzenie to nie mówi nic o usuwaniu nawiasów. Ogólnie rzecz biorąc nawiasów usuwać nie wolno: szereg $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots$ jest zbieżny, natomiast po otwarciu nawiasów otrzymujemy szereg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, którego wyraz $(-1)^n$ w ogóle nie ma granicy, w szczególności nie dąży do 0, więc szereg ten jest rozbieżny. Czasem jednak nawiasy można usunąć. Otworzyć nawiasy można np. wtedy, gdy wszystkie wyrazy szeregu są tego samego znaku, np. wszystkie

są nieujemne. Wtedy bowiem ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest *monotoniczny*,

więc ma granicę i jest ona równa granicy każdego podciągu.

Z twierdzenie o granicy iloczynu ciągów wynika od razu, że po pomnożeniu wszystkich wyrazów szeregu zbieżnego przez liczbę rzeczywistą otrzymujemy szereg zbieżny.

Twierdzenie 3.2 (o mnożeniu szeregu przez liczbę)

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i c jest liczbą rzeczywistą, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n)$ też jest

zbieżny i zachodzi równość $\sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. ■

Szeregi zbieżne można też dodawać.

Twierdzenie 3.3 (o dodawaniu szeregów)

Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Dowód. Wynika to natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów i tego, że suma częściowa szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest równa sumie sum częściowych szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ nazywamy sumą szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Na razie twierdzenia o mnożeniu szeregów nie przedstawimy – odkładamy to na później, bo jest ono trudniejsze od teraz omawianych.

Wypada jeszcze stwierdzić, że natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia o szacowaniu z poprzedniego rozdziału jest następujące

Twierdzenie 3.4 (o porównywaniu sum szeregów)

Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mają sumy i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, przy czym jeżeli sumy są skończone (czyli szeregi są zbieżne) i choćby dla jednej liczby naturalnej n zachodzi nierówność (ostra!) $a_n < b_n$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Przykład 3.5 Zbadamy teraz zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Podobnie jak w przypadku szeregu harmonicznego wyraz ma granicę 0: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, wobec czego szereg ma szansę być zbieżny, w przeciwieństwie do harmonicznego. Wykażemy, że jest zbieżny i że jego suma nie jest większa niż 2.

Mamy $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ dla $n > 1$. Wobec tego możemy napisać:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}) \leq 2$. Wykazaliśmy więc zbieżność szeregu (ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry i rosnący). ■

Podamy teraz kilka twierdzeń umożliwiających w najbardziej podstawowych przypadkach badanie zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych. W tym przypadku ciąg sum częściowych jest niemalejący, więc ma granicę. Jedynym problemem jest to, czy ta granica, czyli suma szeregu jest skończona.

Podaliśmy wcześniej dowód rozbieżności szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Rozumowanie tam przeprowadzone można zastosować w wielu przypadkach. Sformułujemy teraz twierdzenie podane przez Cauchy'ego. Stosowanie tego twierdzenia umożliwia często zastąpienie badanego szeregu innym, w przypadku którego badanie zbieżności jest łatwiejsze: nowy szereg albo jest „szybciej” zbieżny, albo też szybciej rozbieżny.

Twierdzenie 3.6 (kryterium o zagęszczaniu)

Założmy, że ciąg (a_n) jest nierosnący oraz że jego wyrazy są dodatnie. W tej sytuacji

szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Dowód. Założmy, że szereg $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny. Wykażemy zbieżność szeregu $a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$. Mamy $2a_4 \leq a_3 + a_4$ (bo $a_4 \leq a_3$), $4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ (bo a_8 jest najmniejszą z liczb a_5, a_6, a_7, a_8), $8a_{16} \leq a_9 + a_{10} + \dots + a_{15} + a_{16}$ itd. Stąd wynika, że

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \dots \leq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots < +\infty,$$

czyli szereg $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \dots$ ma skończoną sumę. Wobec tego po pomnożeniu go przez 2 otrzymamy szereg zbieżny, ale po pomnożeniu przez 2 otrzymujemy szereg

$2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \dots$, a to oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny, a wobec tego

również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny – zmiana *skończenie wielu* wyrazów na zbieżność

wpływu nie ma (może mieć jednak wpływ na wartość sumy szeregu zbieżnego).

Udowodnimy teraz wynikanie w drugą stronę. Zakładamy, że zbieżny jest szereg $a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$. Mamy $2a_2 \geq a_2 + a_3$, $4a_4 \geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7$, $8a_8 \geq a_8 + a_9 + \dots + a_{14} + a_{15}$, itd. Stąd wynika, że

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{14} + a_{15} + \dots \leq a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots < +\infty,$$

co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, czyli również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Dowód został zakończony. ■

W dowodzie kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu szacowaliśmy sumę jednego szeregu przez sumę drugiego, o którym powiedzieliśmy, że jest zbieżny. Bardzo proste twierdzenia, które podamy za chwilę, pokazują, jak można szacować w wielu sytuacjach szeregi o wyrazach dodatnich.

Twierdzenie 3.7 (kryterium porównawcze)

Założmy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $0 \leq a_n \leq b_n$. Wtedy

jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Dowód. Założmy, że nierówność $0 \leq a_n \leq b_n$ ma miejsce dla $n \geq k$. Wtedy dla każdego $m \geq k$ zachodzi nierówność $\sum_{n=k}^m a_n \leq \sum_{n=k}^m b_n$. Przechodząc do granicy

przy $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy $\sum_{n=k}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=k}^{\infty} b_n$. Z otrzymanej nierówności obie części

tezy wynikają od razu – to, że sumujemy od k zamiast od 0 , nie ma znaczenia, bo zmiana skończenie wielu wyrazów szeregów (np. zastąpienie w obu szeregach wyrazów o numerach mniejszych niż k zerami) nie ma wpływu na ich zbieżność, choć na ogół ma wpływ na wartości ich sum. Dowód został zakończony. ■

To twierdzenie można skomentować tak: szeregowi o mniejszych wyrazach jest łatwiej być zbieżnym niż szeregowi o większych wyrazach.

Twierdzenie 3.8 (asymptotyczne kryterium porównawcze)

Założmy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $0 < a_n$ i $0 < b_n$ oraz że istnieje skończona, dodatnia granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Przy tych

założeniach szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Założmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ oraz że $0 < g < +\infty$. Niech c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $0 < c < g < d$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzą nierówności $0 < b_n$ i $c < \frac{a_n}{b_n} < d$. Wobec tego dla dostatecznie dużych n mamy $c \cdot b_n < a_n < d \cdot b_n$. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum c \cdot b_n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Jeśli natomiast szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum d \cdot b_n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Dowód został zakończony. ■

Założenie istnienia granicy skończonej, dodatniej można interpretować tak: wyrazy szeregów dążą do 0 w tym samym tempie (o ile do 0 dążą), z tego założenia wynika, iż albo oba są zbieżne albo oba – rozbieżne. Zanim przejdziemy do przykładów podamy jeszcze jedną wersję twierdzenia pozwalającego porównywać szeregi o wyrazach dodatnich.

Twierdzenie 3.9 (drugie kryterium porównawcze)

Założmy, że od pewnego miejsca wyrazy szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są dodatnie oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. W tej sytuacji ze zbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n$, zaś z rozbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum b_n$.

Dowód. Nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ można przepisać w postaci $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$. Znaczący to, że ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest nierosnący i ma wyrazy dodatnie, więc jest też ograniczony z góry przez pewną liczbę rzeczywistą $M > 0$ (jeśli „od pewnego miejsca” znaczy „od początku”, to można przyjąć, że $M = \frac{a_0}{b_0}$). Wobec tego ma miejsce nierówność $0 \leq a_n \leq M \cdot b_n$. Z tej nierówności i z kryterium porównawczego teza wynika natychmiast. Dowód został zakończony. ■

Na ostatnią wersję kryterium porównawczego spojrzeć można tak: wyrazy szeregu $\sum a_n$ dążą do 0 szybciej niż wyrazy szeregu $\sum b_n$, więc jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, jeśli natomiast szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny – oczywiście myślimy tylko o szeregach, których wyrazy dążą do 0, bo inne są rozbieżne.

Podamy teraz kilka przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych.

Przykład 3.10 Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

Dla dowodu zastosujemy kryterium Cauchy’ego o zagęszczaniu. W przypadku $p \leq 0$ wyraz szeregu nie dąży do 0, więc szereg jest rozbieżny. Natomiast w przypadku $p > 0$ wyrazy szeregu dążą do 0 i tworzą ciąg malejący, więc zamiast szeregu $\sum a_n$ można badać szereg $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum \frac{1}{(2^{p-1})^n}$. Otrzymaliśmy więc szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2^{p-1}}$. Ten iloraz jest zawsze dodatni. Jest mniejszy niż 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 3.11 Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

Dowód przebiegnie tak, jak w przykładzie poprzednim: dla $p > 0$ zastosujemy kryterium Cauchy’ego o zagęszczaniu. Jeśli $p \leq 0$, to dla $n \geq 3$ mamy $\frac{1}{\ln^p n} = \ln^{-p} n \geq 1$, zatem $\frac{1}{n \ln^p n} \geq \frac{1}{n}$. Wobec tego w tym przypadku rozbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ wynika

z rozbieżności znanego nam już szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. W przypadku $p > 0$ stosujemy kry-

terium Cauchy’ego o zagęszczaniu, więc badamy szereg $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln(2^n))^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^p 2}$.

Sprowadziliśmy zatem badanie szeregu do szeregu zbadanego w poprzednim przykładzie, więc zbieżnego wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$. Dowód został zakończony. ■

Te dwa przykłady wyjaśnić mają sens uwag wypowiedzianych tuż przed sformułowaniem kryterium Cauchy’ego o zagęszczaniu. Należy myśleć, że szereg geometryczny

jest szybciej zbieżny niż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, a ten z kolei – szybciej niż szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, bo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1/n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^p}{1/(n \ln^p n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^p = 0.$$

Przykład 3.12 Wyjaśnimy teraz, czy szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7+13n^3-121n^4+2n^6}{13-433n+12n^4-1331n^7}$ jest zbieżny, czy też rozbieżny.

W liczniku i w mianowniku ułamka występują wielomiany zmiennej n . W liczniku najwyższa potęga zmiennej to n^6 , w mianowniku – n^7 . Wobec tego dla dostatecznie dużych n wyraz szeregu powinien być w przybliżeniu równy $\frac{2n^6}{1331n^7} = \frac{2}{1331n}$.

Porównamy nasz szereg z szeregiem harmonicznym $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Iloraz wyrazów obu szere-

gów równy jest $\frac{7n+13n^4-121n^5+2n^7}{13-433n+12n^4-1331n^7}$, więc ma granicę $-\frac{2}{1331}$. Ponieważ wyrazy szeregu harmonicznego są dodatnie, więc od pewnego miejsca wyrazy badanego szeregu są ujemne. Wobec można zająć się najpierw szeregiem o wyrazie przeciwnym. Wtedy spełnione będą założenia asymptotycznego kryterium porównawczego. Wobec tego, że

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7+13n^3-121n^4+2n^6}{13-433n+12n^4-1331n^7}$ jest rozbieżny,

a to oznacza, że interesujący nas szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7+13n^3-121n^4+2n^6}{13-433n+12n^4-1331n^7}$ też jest rozbieżny. ■

Widzieliśmy w tym przykładzie, jak zazwyczaj stosowane jest kryterium porównawcze. Trzeba po prostu zorientować się, czym można przybliżyć wyraz szeregu i wykorzystać przybliżenie w sposób zgodny z twierdzeniami, które zostały udowodnione wcześniej – czasem wymaga to drobnych przekształceń: w przykładzie trzecim trzeba było przejść do szeregu o wyrazach dodatnich. Może zaistnieć konieczność przeprowadzenia innych modyfikacji. Badanie zbieżności pewnych szeregów jest trudne, bo nie zawsze od razu widać z jakim szeregiem można porównywać ten, który badamy, ale my takimi szeregami zajmować się nie będziemy.

Przykład 3.13 Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n}$ jest zbieżny.

Kłopot może sprawiać czynnik $e^{1/n} - 1$. Wykazaliśmy jednak wcześniej, że jeśli ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1$. Oznacza to, że dla dostatecznie dużych n zachodzi równość przybliżona $e^{x_n} \approx 1 + x_n$. Wobec tego interesujący nas szereg powinien zachowywać się tak, jak szereg o wyrazie $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Jest tak w rzeczywistości

bowiem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^{1/n} - 1)/n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, ma

wyrazy dodatnie, więc można zastosować asymptotyczne kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■

Przykład 3.14 Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{7^n}$ jest zbieżny.

Tym razem powinniśmy myśleć o porównaniu z szeregiem geometrycznym, bo czynnik $\frac{1}{7^n}$ powinien zdominować czynnik n^{13} . Tak jest rzeczywiście, ale iloraz $\frac{n^{13}/7^n}{1/7^n}$ ma granicę $+\infty$, co uniemożliwia porównanie z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$. Trzeba rozważyć szereg nieco wolniej zbieżny od tego szeregu, np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$. Wtedy iloraz wyrazów badanego szeregu i szeregu „próbego” jest równy $n^{13} \left(\frac{6}{7}\right)^n$, więc ma granicę 0, zatem dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{n^{13}}{7^n} < \frac{1}{6^n}$ i możemy zastosować kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 3.15 (o asymptotycznym kryterium porównawczym)

Asymptotyczne kryterium porównawcze można nieco rozszerzyć: jeśli zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ i wyrazy obu szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$ są dodatnie, to ze zbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n$ — tym razem jest wynikanie zamiast równoważności. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, to z rozbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum a_n$ — również w tym przypadku nie ma równoważności. ■

W taki sam sposób można udowodnić, że jeśli $0 < q < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$ jest zbieżny. Jednak w tym przypadku nie ograniczymy się do stwierdzenia zbieżności. Obliczymy sumę tego szeregu, bo ten rezultat jest przydatny w rachunku prawdopodobieństwa

Przykład 3.16 $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k (n+1)q^n &= (1 + q + q^2 + \dots + q^k) + (q + q^2 + \dots + q^k) + \\ &\quad + (q^2 + \dots + q^k) + \dots + (q^{k-1} + q^k) + q^k = \\ &= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + \frac{q-q^{k+1}}{1-q} + \frac{q^2-q^{k+1}}{1-q} + \dots + \frac{q^{k-1}-q^{k+1}}{1-q} + \frac{q^k-q^{k+1}}{1-q} = \\ &= \frac{1+q+q^2+\dots+q^{k-1}+q^k-(k+1)q^{k+1}}{1-q} = \frac{\frac{1-q^{k+1}}{1-q} - (k+1)q^{k+1}}{1-q} = \frac{1-q^{k+1}}{(1-q)^2} - \frac{(k+1)q^{k+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Ponieważ $q^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ i $(k+1)q^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, więc na mocy twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu mamy

$$\sum_{n=0}^k (n+1)q^n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Wypada dodać, że w tym rozumowaniu nie korzystaliśmy z tego, że $q > 0$ – wystarczy jednak założyć, że $|q| < 1$, ale rozumowanie trzeba nieco zmięknąć. ■

Pokazaliśmy na kilku prostych przykładach, w jaki sposób można stosować poznane kryteria. Kryteria te są bardzo proste. Wyprowadzić z nich można wiele kryteriów, których stosowanie ułatwia badanie szeregów w konkretnych sytuacjach, bez wskazywania w jawny sposób szeregu „próbego”. Pokażemy dwa najprostsze, które stosujemy, gdy chcemy porównać szereg z szeregiem geometrycznym, tj. takim w którym iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały. Pierwsze zostało podane przez d’Alemberta (1717-1783) francuskiego matematyka, fizyka i filozofa, autora wstępu do Encyklopedii.

Twierdzenie 3.17 (kryterium ilorazowe d'Alemberta)

Jeśli wyrazy szeregu $\sum a_n$ są dodatnie i istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to w przypadku $q > 1$ szereg jest rozbieżny, zaś w przypadku $q < 1$, szereg jest zbieżny.

Dowód. Jeśli $q > 1$, to od pewnego momentu zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to znaczy $a_{n+1} > a_n$. Wobec tego od pewnego momentu ciąg liczb dodatnich (a_n) jest rosnący, więc jeśli jest zbieżny, to z pewnością nie do 0 — nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Załóżmy teraz, że $q < 1$. Niech r oznacza dowolną liczbę większą niż q i jednocześnie mniejszą niż 1, np. $r = \frac{1+q}{2}$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$. Szereg geometryczny $\sum r^n$ jest zbieżny, więc również szereg $\sum a_n$ jest zbieżny — stosujemy drugie kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■

Obliczanie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ma na celu ustalenie z jakim szeregiem geometrycznym mamy porównywać szereg $\sum a_n$: dla ustalenia zbieżności wybieramy szereg o ilorazie r nieco większym niż q , dla ustalenia rozbieżności — o ilorazie r nieco mniejszym niż q (*nieco* oznacza, że liczby r i q znajdują się po tej samej stronie liczby 1). Oczywiście można założyć w sformułowaniu kryterium ilorazowego, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n , z dowodu wynika że to wystarczy. W przypadku drugim wystarczy stwierdzić, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, bo wtedy oczywiście niemożliwe jest, by $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Gdy $q = 1$ szereg może być rozbieżny, np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lub zbieżny, np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

W wielu przypadkach granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ nie istnieje. A. Cauchy podał inne kryterium zbieżności szeregów związane z szeregami geometrycznymi.

Twierdzenie 3.18 (kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego)

Jeśli szereg $\sum a_n$ ma wyrazy nieujemne i istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, to w przypadku $q > 1$ szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, zaś w przypadku $q < 1$ — zbieżny.

Dowód. Jeśli $q > 1$ to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} > 1$ i wobec tego $a_n > 1$. Wobec tego ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0. Jeśli $q < 1$ i r jest liczbą mniejszą niż 1 i jednocześnie większą niż q , np. $r = \frac{1+q}{2}$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} < r$, czyli $a_n < r^n$. Stosując kryterium porównawcze stwierdzamy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, bo zbieżny jest szereg geometryczny $\sum r^n$. Dowód został zakończony. ■

Podobnie jak w poprzednim przypadku, jeśli granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ jest równa 1, to na temat zbieżności szeregu $\sum a_n$ powiedzieć nic nie można o czym świadczą przykłady przywołane po poprzednim twierdzeniu. Również w przypadku tego kryterium wystarczy założyć, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, by uzyskać zbieżność oraz że $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, by uzyskać rozbieżność.

Wyjaśnijmy jeszcze, dlaczego obliczać należy tę akurat granicę. Otóż chodzi o porównanie z szeregiem geometrycznym. Metoda d'Alemberta jest najprostsza i najbar-

dziej naturalna. Druga metoda znalezienia q , jeśli dany jest ciąg geometryczny (aq^n) to obliczenie pierwiastka stopnia n z wyrazu aq^n . Otrzymujemy $\sqrt[n]{aq^n} = q \sqrt[n]{a}$. Nie jest to dokładnie q , ale $\lim_{n \rightarrow \infty} q \sqrt[n]{a} = q$.

Nadmienić wypada, że kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego jest nieco ogólniejsze niż kryterium ilorazowe d'Alemberta. Prawdziwe jest mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.19 Jeśli (a_n) jest ciągiem liczb dodatnich, takim że istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to również ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ ma granicę i jest nią q .

Dowód. Stwierdzeniem równoważnym tezie jest: $\frac{\ln a_n}{n} = \ln \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln q$.¹ Ma to być wnioskiem z tego, że $\ln a_{n+1} - \ln a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln q$. Jest to jednak wniosek natychmiastowy z twierdzenia Stolza. Wystarczy przyjąć $b_n = \ln a_n - \ln a_1$ oraz $c_n = n$ i zastosować twierdzenie Stolza do ilorazu $\frac{b_n}{c_n}$, co zrobić wolno, bo ciąg (c_n) jest ściśle rosnący i nieograniczony z góry. Mamy zatem $b_{n+1} - b_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$ oraz $c_{n+1} - c_n = 1$, więc $\frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} = \ln a_{n+1} - \ln a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln q$. Dowód został zakończony. ■

Bez trudu można wskazać ciąg (a_n) liczb dodatnich, dla którego istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ i nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots$. Sprawdzenie szczegółów pozostawiamy czytelnikowi w charakterze prostego ćwiczenia.

Szereg geometryczny nie jest jedynym szeregiem „wzorcowym”. Wzorcem może być też np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Twierdzenie pozwalające na obliczanie „właściwego” wykładnika p znajduje się poniżej.

Twierdzenie 3.20 kryterium Raabego

Jeśli szereg $\sum a_n$ ma wyrazy dodatnie i istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$, to jeśli $p > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a w przypadku $p < 1$ – rozbieżny. ■

Dowód. Mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1/n^q}{1/(n+1)^q} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^q - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^q - 1}{\frac{1}{n}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{q \ln(1+\frac{1}{n})} - 1}{q \ln(1+\frac{1}{n})} \cdot \frac{q \ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \cdot q$. Niech q będzie liczbą leżącą między 1 i p ; jeżeli $p < \infty$, można przyjąć $q = \frac{1+p}{2}$. Jeśli $p > 1$, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n mamy $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > n \left(\frac{1/n^q}{1/(n+1)^q} - 1 \right)$, więc $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1/(n+1)^q}{1/n^q}$. Teza wynika natychmiast z drugiego kryterium porównawczego i zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Rozumowanie w przypadku $p < 1$ jest w pełni analogiczne. ■

Pokażemy teraz jeszcze jedno twierdzenie, które w zasadzie można uznać za narzędzie do tworzenia kryteriów.²

¹ W tym rozumowaniu przyjmujemy, że $\ln 0 = -\infty$ i $\ln \infty = \infty$, wtedy $\ln: [0, \infty] \rightarrow [-\infty, \infty]$ jest funkcją ciągłą (definicja Heinego).

² to jeden z tych licznych przypadków, w których dowód jest bardzo prosty, a przynajmniej krótki, ale twierdzenie jest użyteczne i wcale nie jest łatwo je wymyślić.

Twierdzenie 3.21 (kryterium Kummera)

Jeśli wyrazy szeregu $\sum a_n$ są liczbami dodatnimi, to jest on zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ i taki ciąg (b_n) liczb dodatnich, że nierówność $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta$ jest spełniona dla każdej liczby naturalnej n .

Jeśli wyrazy szeregu $\sum a_n$ są liczbami dodatnimi, to jest on rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg (b_n) liczb dodatnich, że nierówność $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0$ jest spełniona dla każdej liczby naturalnej n , a szereg $\sum \frac{1}{b_n}$ jest rozbieżny.

Dowód. Zaczniemy od dowodu zbieżności szeregu $\sum a_n$. Mamy kolejno

$a_1 b_1 \geq a_2 b_2 + \delta a_2 \geq a_3 b_3 + \delta(a_2 + a_3) \geq a_4 b_4 + \delta(a_2 + a_3 + a_4)$, itd. Stąd wynika, że $a_1 b_1 \geq a_n b_n + \delta(a_2 + a_3 + \dots + a_n) > \delta(a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, więc $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < a_1 + \frac{a_1 b_1}{\delta}$, co dowodzi zbieżności szeregu $\sum a_n$.

Teraz założymy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Definiujemy $b_n = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots}{a_n}$. Wtedy $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+2} + a_{n+3} + \dots}{a_{n+1}} = 1$. Przyjmujemy $\delta = 1$. Udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia.

Założmy, że $\sum \frac{1}{b_n} = \infty$ oraz, że $a_n b_n \leq a_{n+1} b_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n . Wtedy $a_n b_n \geq a_{n-1} b_{n-1} \geq \dots \geq a_1 b_1$, zatem $a_n \geq \frac{a_1 b_1}{b_n}$, więc

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq a_1 b_1 \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right),$$

zatem $\sum a_n = \infty$.

Założmy teraz, że szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny. Niech $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n}$. Wtedy

$$\begin{aligned} b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} &= -1 < 0. \text{ Zauważmy jeszcze, że} \\ \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}} + \dots + \frac{1}{b_{n+k}} &= \\ &= \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+k}} \geq \\ &\geq \frac{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots + a_{n+k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1,^3 \text{ bowiem} \end{aligned}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}) = \infty$, gdyż $\sum_{j=n}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j = \infty$ dla każ-

dej liczby $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}} + \dots + \frac{1}{b_{n+k}} > \frac{1}{2}$. Szereg $\sum \frac{1}{b_n}$ nie spełnia zatem warunku Cauchy'ego, więc jest rozbieżny. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 3.22

Przyjmując w pierwszej części kryterium Kummera $b_n = 1$ dla każdego n otrzymujemy warunek $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \delta > 0$, czyli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+\delta}$, tzn. kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu. Druga część, z tymi samymi $b_1, b_2, \dots$ daje nam kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregu, a nawet trochę silniejsze stwierdzenie.

Przyjmując $b_n = n$ w kryterium Kummera otrzymujemy kryterium Raabego: $n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \geq \delta > 0$, czyli $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 + \delta$. Podobnie dla rozbieżności.

³ n jest chwilowo ustalone!

Definicja 3.23 (szeregu bezwzględnie zbieżnego i szeregu zbieżnego warunkowo)

Szereg $\sum a_n$ nazywany jest bezwzględnie zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, tzn. gdy $\sum |a_n| < +\infty$. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie, to nazywany jest szeregiem zbieżnym warunkowo. ■

Najprostszymi szeregami bezwzględnie zbieżnymi są oczywiście szeregi o wyrazach dodatnich, ale jest też wiele innych. Szereg $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ jest zbieżny warunkowo. Szereg $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Twierdzenie 3.24 (o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego).

Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód. Trzeba wykazać, że szereg $\sum a_n$ spełnia warunek Cauchy'ego wiedząc, że szereg $\sum |a_n|$ spełnia ten warunek. To jednak wynika od razu z nierówności trójkąta:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Jedną z podstawowych własności szeregów bezwzględnie zbieżnych jest niezależność ich sumy od kolejności wyrazów szeregu. Udowodnimy teraz to twierdzenie.

Twierdzenie 3.25 (o niezależności sumy szeregu bezwzględnie zbieżnego od kolejności jego wyrazów)

Niech p będzie dowolną permutacją zbioru wszystkich liczb naturalnych, tzn. w ciągu $(p(n))$, czyli w ciągu $p(0), p(1), p(2), \dots$ występują wszystkie liczby naturalne, każda dokładnie jeden raz. Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Wtedy szereg $\sum a_{p(n)}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)}.$$

Dowód. Niech $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $s_n^p = a_{p(0)} + a_{p(1)} + \dots + a_{p(n)}$ i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje wtedy taka liczba naturalna m , że

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Istnieje liczba naturalna $n_\varepsilon \geq m$, taka że wśród liczb $p(0), p(1), \dots, p(n_\varepsilon)$ znajdują się wszystkie liczby $0, 1, 2, \dots, m$. Niech $k > n_\varepsilon$. Wtedy

$$|s_k - s_k^p| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots,$$

bo zarówno s_k jak i s_k^p są sumami pewnych liczb a_j , jeśli jakiś wyraz jest składnikiem obu sum, to nie występuje w różnicy $s_k - s_k^p$. Wyrazy $a_0, a_1, \dots, a_m$ występują zarówno w s_k jak i w s_k^p , i wobec tego nie występują one w $s_k - s_k^p$. Wynika stąd, że

$$|s_k - s_k^p| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Takie same rozważania dotyczą różnicy } \sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k,$$

więc również $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wobec tego

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k^p \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k \right| + |s_k - s_k^p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dla każdej liczby $k > n_\varepsilon$. Z definicji granicy ciągu wynika więc, że $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

a to właśnie oznacza, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dowód został zakończony. ■

Zajmiemy się teraz twierdzeniem o mnożeniu szeregów. Mnożąc dwie skończone sumy liczb

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

otrzymujemy sumę wszystkich iloczynów postaci $a_i b_j$, np. dla $n = 2$ mamy:

$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2.$$

Oczywiście otrzymaną sumę dziewięciu składników można porządkować na wiele sposobów ($9! = 362880$). W przypadku skończonej liczby składników kolejność dodawania nie ma żadnego wpływu na ich sumę. To samo dotyczy nieskończonej liczby składników pod warunkiem rozważania wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego. W przypadku szeregu, który nie jest bezwzględnie zbieżny należy jednak być ostrożnym. Jest jasne, że mnożąc dwa szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ powinniśmy otrzymać szereg, wśród wyrazów którego są wszystkie iloczyny postaci $a_i b_j$ uporządkowane w jakiś sensowny sposób. Okazuje się, że sugerowany rezultat wygodnie jest sformułować tak:

Twierdzenie 3.26 (Mertensa o mnożeniu szeregów)

Załóżmy, że szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie. Niech

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Wtedy szereg $\sum c_n$ jest zbieżny i zachodzi równość:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

jeśli oba szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to również szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Przyjmijmy, że: $s_n^a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s_n^b = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$,
 $s_n^c = c_0 + c_1 + \cdots + c_n = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j$. Zbieżność szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ oznacza istnienie skończonych granic $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^a = A$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^b = B$. Mamy wykazać, że granicą ciągu (s_n^c) jest AB . Oczywiście jest wszystko jedno, o którym szeregu założymy, że jest bezwzględnie zbieżny. Przyjmijmy, że jest to szereg $\sum a_n$, czyli $\sum |a_n| < +\infty$. Zauważmy, że:

$$s_n^c = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j = a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \\ + a_2(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-2}) + \cdots + a_n b_n = a_0 s_n^b + a_1 s_{n-1}^b + a_2 s_{n-2}^b + \cdots + a_n s_0^b.$$

Wobec tego

$$s_n^a s_n^b - s_n^c = a_0 s_n^b + a_1 s_n^b + a_2 s_n^b + \cdots + a_n s_n^b - s_n^c = a_1 (s_n^b - s_{n-1}^b) + \\ + a_2 (s_n^b - s_{n-2}^b) + \cdots + a_n (s_n^b - s_0^b).$$

Ponieważ szeregi $\sum |a_n|$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne, więc ich ciągi sum częściowych są ograniczone. Oznacza to, że istnieje liczba $M > 0$, taka że dla każdego m prawdziwe są nierówności:

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| \leq M, \quad |b_0 + b_1 + \cdots + b_m| \leq M.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ze zbieżności szeregu wynika, że spełnia on warunek Cauchy'ego, więc istnieje taka liczba naturalna n_ε , że jeśli $k > m > n_\varepsilon$, to zachodzą nierówności: $|s_k^b - s_m^b| < \frac{\varepsilon}{4M}$,

$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| = |a_{n_\varepsilon+1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{8M}$, $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^a \cdot s_m^b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wobec tego dla $m > 2n_\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^c \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^a \cdot s_m^b \right| + \left| s_m^a s_m^b - s_m^c \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |a_1| \cdot |s_m^b - s_{m-1}^b| + |a_2| \cdot |s_m^b - s_{m-2}^b| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}| \cdot |s_m^b - s_{m-n_\varepsilon}^b| + \\ &\quad + |a_{n_\varepsilon+1}| \cdot |s_m - s_{m-n_\varepsilon-1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| \cdot |s_m - s_{m-n_\varepsilon-2}| + \cdots + |a_m| \cdot |s_m - s_0| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}|) \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + (|a_{n_\varepsilon+1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| + \cdots + |a_m|) \cdot 2M \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{8M} \cdot 2M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m^c = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że jeśli oba szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to również szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wynika to od razu z już udowodnionej części twierdzenia i warunku Cauchy'ego. Dowód został zakończony. ■

Czytelnik może się przekonać, że istnieją szeregi zbieżne $\sum a_n$ i $\sum b_n$, dla których szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny. Wystarczy przyjąć $a_n = b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ i przekonać się, że w tym przypadku ciąg (c_n) nie jest zbieżny do 0, więc szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny. Z drugiej strony jeśli szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ i $\sum c_n$ są zbieżne, to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ – nie podamy dowodu tego twierdzenia, bo nie będziemy z niego korzystać. Opisane twierdzenia wskazują na to, że zaproponowana przez Cauchy'ego kolejność sumowania iloczynów $a_i b_j$, jest właściwa.

Definicja 3.27 (iloczynu szeregów)

Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, którego wyrazy definiujemy za pomocą wzoru $c_m = \sum_{i+j=m} a_i b_j = \sum_{i=0}^m a_i b_{m-i}$. ■