FUNKCJA Γ EULERA

Niech $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Ta całka jest zbieżna dla każdej liczby $x>0$. Mamy bowiem $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt < \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}t^x\Big|_0^1 = \frac{1}{x}$, więc całka po przedziale $0,1]$ jest skończona nawet wtedy, gdy funkcja podcałkowa nie jest ograniczona. Mamy też $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt < \infty$, bo dla każdej liczby naturalnej $n>x-1$ zachodzi nierówność $t^{x-1}e^{-t} \le \frac{(n+2)!t^{x-1}}{t^{n+2}} \le \frac{(n+2)!}{t^2}$, zatem $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \le \le (n+2)!\int_0^1 t^{-2}\,dt = (n+2)!$. Wobec tego dla $x>0$ $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \in (0,\infty)$.

Mamy $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}} \frac{1}{x}t^xe^{-t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty t^xe^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$. Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi równość $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Wziąwszy pod uwagę oczywistą równość $\Gamma(1)=1$ otrzymujemy kolejno $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2$, $\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2, \ldots, \Gamma(n)=(n-1)!$ dla każdej liczby naturalnej $n>0$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję, której wartości w punktach naturalnych są równe $(n-1)!$, ale która jest zdefiniowana dla wszystkich liczb dodatnich. Takich funkcji można zdefiniować nieskończenie wiele różnymi wzorami. Zachęcam Państwa do zrobienia tego tak, by otrzymać funkcję klasy C^∞ na $(0,\infty)$, każdy powinien przynajmniej ze dwie takie funkcje zdefiniować dla własnej **satysfakcji**.

Wykażemy, że naturalne warunki nałożone na funkcję Γ możliwości wyboru wykluczą.

Twierdzenie 12.1 (H.Bohra*)
Istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\Gamma\colon(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$, że $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ dla każdego $x>0$, $\ln\Gamma$ jest funkcją wypukłą.

Dowód poprzedzimy kilkoma lematami. Będziemy mówić *funkcja logarytmicznie wypukła* zamiast *logarytm funkcji jest funkcją wypukłą*.

Lemat 12.2 (o sumie funkcji logarytmicznie wypukłych)
Suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest funkcją logarytmicznie wypukłą. Zakładamy dodatkowo, że jeśli któryś koniec dziedziny jest jej elementem, to funkcja jest w nim ciągła, ciągłość wewnątrz dziedziny wynika z wypukłości.

Dowód. Załóżmy, że funkcje f i g są logarytmicznie wypukłe na przedziale I. Oznacza to, że dla dowolnych $x,y\in I$ zachodzą nierówności $\ln f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}[\ln f(x)+\ln f(y)]$ i $\ln g(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}[\ln g(x)+\ln g(y)]$, czyli $f(\frac{x+y}{2}) \le \sqrt{f(x)f(y)}$ i $g(\frac{x+y}{2}) \le \sqrt{g(x)g(y)}$. Udowodnimy, że

$$f(\tfrac{x+y}{2})+g(\tfrac{x+y}{2}) \le \sqrt{\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(y)+g(y)\big)}\,.$$

Z logarytmicznej wypukłości funkcji f,g i z nierówności Schwarza wynika, że
$f(\frac{x+y}{2})+g(\frac{x+y}{2}) \le \sqrt{f(x)f(y)}+\sqrt{g(x)g(y)} = \sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)}+\sqrt{g(x)}\sqrt{g(y)} \le$

$$\le \sqrt{\big[\sqrt{f(x)}\,\big]^2+\big[\sqrt{g(x)}\,\big]^2}\cdot\sqrt{\big[\sqrt{f(y)}\,\big]^2+\big[\sqrt{g(y)}\,\big]^2} = \sqrt{\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(y)+g(y)\big)}\,.$$

Ponieważ funkcja $\ln(f+g)$ jest ciągła, więc aby stwierdzić, że jest wypukła wystarcza sprawdzić warunek Jensena wyłącznie, gdy wagi są równe $\frac{1}{2}$, a to właśnie uczyniliśmy. ■

* Młodszy brat Nielsa Bohra, jedyny znany matematyk, który zdobył medal olimpijski, srebrny w 1908 r, piłka nożna, reprezentacja Danii.

Lemat 12.3 (o logarytmicznej wypukłości granicy)
Jeśli $f_n \longrightarrow f$ i wszystkie funkcje $f_1, f_2, \ldots$ są logarytmicznie wypukłe, to funkcja f też jest logarytmicznie wypukła.

Dowód. Jeśli $0 \leq \alpha \leq 1$, to dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych $x, y \in I$ zachodzi nierówność $\ln f_n\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha \ln f_n(x) + (1-\alpha)\ln f_n(y)$. Stąd i z ciągłości logarytmu wynika nierówność $\ln f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha \ln f(x) + (1-\alpha)\ln f(y)$, a to oznacza, że funkcja graniczna f jest logarytmicznie wypukła. ■

Lemat 12.4 (o logarytmicznej wypukłości całki)
Jeśli $0 < a < A$, to funkcja, która przypisuje liczbie x liczbę $\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,dt$ jest logarytmicznie wypukła

Dowód. Niech $f_n(x) = \frac{A-a}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\big(a + \frac{j}{n}(A-a)\big)^{x-1}e^{-a-j(A-a)/n}$. Ponieważ $f_n(x)$ to suma Riemanna całki $\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,dt$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A-a}{n} = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Wystarczy więc udowodnić, że funkcja f_n jest logarytmicznie wypukła. Dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funkcja $x \to \big(a + \frac{j}{n}(A-a)\big)^{x-1}e^{-a-j(A-a)/n}$ jest logarytmicznie wypukła, bo jej logarytm jest funkcją zwaną dawniej liniową, a dziś afiniczną. Ponieważ suma funkcji logarytmicznie wypukłych jest logarytmicznie wypukła, więc f_n jest logarytmicznie wypukła. ■

Lemat 12.5 (o logarytmicznej wypukłości całki niewłaściwej)
Funkcja przypisująca liczbie $x > 0$ liczbę $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ jest logarytmicznie wypukła.

Dowód. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do 0, zaś (A_n) ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do ∞ i niech $a_n < A_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Mamy więc $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{a_n}^{A_n} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, zatem teza lematu wynika z lematu o logarytmicznej wypukłości granicy. ■

Z udowodnionych lematów wynika od razu, że funkcja $x \longrightarrow \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ spełnia warunki wymienione w twierdzeniu H.Bohra.

Dowód twierdzenia H.Bohra

Niech $\Gamma\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ będzie funkcją taką, że $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$, $\ln\Gamma$ jest funkcją wypukłą i niech $g(x) = \ln\Gamma(x)$. Spełnione są więc warunki

(i) $g(1) = 0$,
(ii) $g(x+1) - g(x) = \ln x$,
(iii) g jest funkcją wypukłą.

Niech $x \in (0,1]$ i niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Ponieważ iloraz różnicowy funkcji wypukłej jest funkcją niemalejąca każdego swego argumentu z osobna, więc zachodzi nierówność:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{g(n-1) - g(n)}{n-1-n} \leq \frac{g(n+x) - g(n)}{n+x-n} \leq \frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} = g(n+1) - g(n),$$

zatem

$$x\ln(n-1) = x[g(n) - g(n-1)] \leq g(n+x) - g(n) \leq x[g(n+1) - g(n)] = x\ln n.$$

Mamy też

$$g(n+x)-g(x)=g(n+x)-g(n-1+x)+g(n-1+x)-g(n-2+x)+\cdots+g(x+1)-g(x)=$$
$$=\ln(n-1+x)+\ln(n-2+x)+\cdots+\ln(1+x)+\ln x\,.$$

Analogicznie

$$g(n)=g(n)-g(n-1)+g(n-1)-g(n-2)+\cdots+g(2)-g(1)=\ln(n-1)+\ln(n-2)+\cdots+\ln 1\,.$$

Wobec tego

$$g(x+n)-g(n)=g(x)+\ln(n-1+x)+\ln(n-2+x)+\cdots+\ln(1+x)+\ln x-$$
$$-\left[\ln(n-1)+\ln(n-2)+\cdots+\ln 1\right]=g(x)+\ln x+\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}\ln(1+\frac{x}{j})\,.$$

Możemy też napisać $\ln n=\ln(1+\frac{1}{n-1})+\ln(1+\frac{1}{n-2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{1})=\sum_{j=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{j})$ oraz $\ln(n-1)=\sum_{j=1}^{n-2}\ln(1+\frac{1}{j})$. To pozwala napisać podwójną nierówność, w której funkcja g wystąpi już tylko jeden raz:

$$-\ln x-\sum_{j=1}^{n-2}\ln\Big(1+\frac{x}{j}\Big)+x\sum_{j=1}^{n-2}\ln\Big(1+\frac{1}{j}\Big)\le g(x)\le-\ln x-\sum_{j=1}^{n-1}\ln\Big(1+\frac{x}{j}\Big)+x\sum_{j=1}^{n-1}\ln\Big(1+\frac{1}{j}\Big)\,.$$

Jeśli $0<y\le 1$, to $\ln(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}4y^3-\frac{1}{4}y^4+\cdots$. Z tej równości wynika, że dla każdego $j\ge 2$ zachodzi nierówność

$$-\tfrac{x}{2j^2}=\left[\tfrac{x}{j}-\tfrac{x}{2j^2}\right]-\tfrac{x}{j}\le x\ln(1+\tfrac{1}{j})-\ln(1+\tfrac{x}{j})\le\tfrac{x}{j}-\left[\tfrac{x}{j}-\tfrac{x^2}{2j^2}\right]=\tfrac{x^2}{2j^2}\,.\ ^*$$

Z tej nierówności wynika, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty}\left[x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})\right]$ jest bezwzględnie zbieżny. Na przedziale $[0,1]$ zbieżność jest jednostajna. Wobec tego zachodzi równość

$$g(x)=-\ln x+\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}\left[x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})\right]\,.$$

Okazało się, że funkcja g **musi** być zdefiniowana konkretnym wzorem. Ta uwaga kończy dowód twierdzenia Bohra. ■

Twierdzenie 12.6 (Wzór Gaussa)

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,.$$

Dowód. Wzór ten wynika od razu z oszacowań funkcji g i z równości

$$\exp\left[-\ln x-\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{j}\right)+x\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{j}\right)\right]=\frac{1}{x}\cdot\Pi_{j=1}^{n-1}(1+\frac{1}{j})^x\cdot\Pi_{j=1}^{n-1}\frac{j}{j+x}=$$
$$=\tfrac{1}{x}\cdot n^x\cdot\tfrac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)}\,.\ ■$$

Twierdzenie 12.7 (Wzór Weierstrassa)

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}e^{x/n}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-1},$$

gdzie γ oznacza stałą Eulera, tzn. $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\ln(1+1)+\tfrac{1}{2}-\ln(1+\tfrac{1}{2})+\cdots+\tfrac{1}{n}-\ln(1+\tfrac{1}{n})\right]=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]\,.$$

* W rzeczywistości możemy wyrażenie $x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})$ nieco lepiej oszacować z góry: ta funkcja zmiennej x jest ściśle wypukła jako różnica funkcji liniowej i ściśle wklęsłej, przyjmuje w punktach 0 i 1 wartość 0, zatem na przedziale $(0,1)$ jest ujemna. Mamy więc $-\frac{x}{2j^2}\le x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})\le 0$.

Dowód. Mamy

$\Gamma(x)=\exp[g(x)]=\exp\{-\ln x+\sum_{j=1}^{\infty}[x\ln(1+\frac{1}{j})-\ln(1+\frac{x}{j})]\}=$

$$=\exp\{-\ln x+\sum_{j=1}^{\infty}x[\ln(1+\tfrac{1}{j})-\tfrac{1}{j}]+\sum_{j=1}^{\infty}[\tfrac{x}{j}-\ln(1+\tfrac{x}{j})]\}=$$

$$=\exp\{-\ln x-\gamma x+\sum_{j=1}^{\infty}[\tfrac{x}{j}-\ln(1+\tfrac{x}{j})]\}=\tfrac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\cdot\prod_{j=1}^{\infty}e^{x/j}(1+\tfrac{x}{j})^{-1}.$$

Dowód wzoru Weierstrassa został zakończony w przypadku $0<x\leq 1$. Otrzymany iloczyn nieskończony jest zbieżny jednostajnie w każdym zwartym podzbiorze K płaszczyzny, który nie zawiera ani jednej liczby całkowitej niedodatniej (dodatnie nam nie przeszkadzają, dla ujemnych nie wszystkie wyrazy iloczynu nieskończonego są zdefiniowane, więc o zbieżności w ogóle mówić się nie da). Jednostajna zbieżność iloczynu wynika z tego, że dla dostatecznie dużych n i wszystkich $x\in K$ zachodzi nierówność $\left|\frac{x}{n}\right|<\frac{1}{2}$, więc logarytm liczby $1+\frac{x}{n}$ jest dobrze określony i możemy korzystać z rozwinięcia $\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots$. Te same komentarze dotyczą wzoru Gaussa. Z obu wzorów Gaussa i Weierstrassa wynika, że $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ z wyjątkiem $z=0,-1,-2,\ldots$. Wobec tego oba wzory określają tę samą funkcję. Dla $x>0$ mamy więc

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e{-}t\,dt=\tfrac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\tfrac{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)}=\tfrac{1}{x}\cdot e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}e^{x/n}\big(1+\tfrac{x}{n}\big)^{-1}.\ \blacksquare$$

Wykażemy teraz, że zachodzi też wzór Stirlinga - nie będzie to jego najsilniejsza wersja, ale będzie to jeszcze jeden dowód na to, że uogólnienie silni na liczby rzeczywiste, a nawet zespolone zaproponowane przez Eulera jest właściwe.

Twierdzenie 12.8 (Wzór Stirlinga)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^x\cdot\sqrt{2\pi x}}=1\,.$$

Dowód. Wiemy, że zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+1)e^n}{n^n\cdot\sqrt{2\pi n}}=1$. Niech $0<x\leq 1$. Udowodnimy, że prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Gamma(x+1+n)e^{n+x}}{(n+x)^{n+x}\cdot\sqrt{2\pi(n+x)}}=1$. Mamy

$$\frac{\Gamma(x+1+n)e^{n+x}}{(n+x)^{n+x}\cdot\sqrt{2\pi(n+x)}}=$$

$$=\frac{(x+n)(x+n-1)\ldots(x+1)x\Gamma(x)}{n!\cdot n^x}\cdot\frac{n!\cdot e^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}\cdot\frac{e^x}{(1+\frac{x}{n})^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}\cdot(1+\frac{x}{n})^x}$$

— kolejne czynniki dążą do 1: pierwszy, bo prawdziwy jest wzór Gaussa, drugi z wzoru Stirlinga dla $n!$, trzeci i czwarty na mocy dobrze znanych twierdzeń.

Autor napisał ten tekst będąc pod silnym wpływem książki ,,Funkcje jedenj zmiennej rzeczywistej. Teorie elementarna" N.Bourbaki.

Zadania

1. Udowodnić, że jeśli $n\in\mathbb{Z}$ i $n\leq 0$, to $\lim\limits_{x\to n}|\Gamma(x)|=\infty$.

2. Udowodnić, że $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, tzw. wzór na dopełnienie. Może się tu przydać wzór $\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}[1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}]$, który był wyprowadzony na ćwiczeniach w grupie JSIM i który można znaleźć bez trudu w drugim tomie książki G.M.Fichtenholza.