41. Które z następujących wzorów są prawdziwe, a które nie:
\[
\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},
\]
\[
(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}),
\]
\[
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},
\]
\[
(\vec{u} + \vec{v})^2 := (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2.
\]

42. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej \( n > 1 \) i dowolnych liczb \( a_1, a_2, \ldots, a_n \) oraz dowolnych liczb \( b_1, b_2, \ldots, b_n \) zachodzi nierówność:
\[
(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).
\]
Jaki warunek muszą spełniać liczby \( a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \), by nierówność stała się równością? Jaki jest sens geometryczny tego warunku w przypadku \( n = 2 \) i \( n = 3 \)?

43. Jaką liczbą (dodatnią, czy ujemną) jest:
- a) \( \sin 1 \), b) \( \sin 2 \), c) \( \sin 10 \), d) \( \cos 2 \),
- e) \( \cos 15 \), f) \( \cos(−8) \), g) \( \tan 1.5 \), h) \( \tan(−0.75) \),
- i) \( \tan 10 \), j) \( \cot 5 \), k) \( \cot 1.5 \), l) \( \cot 2.5 \)?

44. Która z liczb w każdej z podanych par jest większa:
- a) \( \sin 1 \), \( \tan 1 \), b) \( \cos 1 \), \( \cot 1 \), c) \( \sin 2 \), \( \cos 2 \), d) \( \sin \frac{\pi}{4} \), \( \sin \frac{\pi}{3} \),
- e) \( \cot \frac{3\pi}{4} \), \( \cot \frac{3\pi}{5} \), f) \( \sin 5\pi \), \( \cos 3\pi \), g) \( \tan \frac{11\pi}{12} \), \( \cot \frac{7\pi}{6} \), h) \( \sin 6 \), \( \cos 6 \).

45. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta \( \alpha \), jeżeli:
- a) \( \sin \alpha = \frac{15}{17} \) i \( 90^\circ < \alpha < 180^\circ \), b) \( \cos \alpha = \frac{5}{13} \) i \( 270^\circ < \alpha < 360^\circ \),
- c) \( \tan \alpha = \frac{7}{24} \) i \( 180^\circ < \alpha < 270^\circ \), d) \( \sin \alpha = −\sqrt{127} \) i \( 180^\circ < \alpha < 270^\circ \),
- e) \( \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \) i \( 0^\circ < \alpha < 90^\circ \), f) \( \tan \alpha = \cot \alpha \) i \( \sin \alpha > 0 \), \( \cos \alpha \).

46. Wykazać, że jeśli \( x = a \cos u \) i \( y = b \sin u \), to \( b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \).

47. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej \( n \geq 1 \) zachodzi równość
\[
\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cos \frac{6\pi}{2n+1} + \cdots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.
\]

48. Wykazać, że \( \sin 15^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \) i znaleźć \( \cos 15^\circ \).

49. Wykazać, że \( \tan 7.5^\circ = \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) \).

50. Wykazać, że \( \sin 7.5^\circ = \sqrt{\frac{1}{8}(4 - \sqrt{2} - \sqrt{6})} \).

51. W trójkącie \( ABC \) mamy \( AC = BC = 1 \) i \( \angle C = 36^\circ \). Znaleźć \( AB \) oraz \( \sin 18^\circ \), \( \cos 18^\circ \), \( \sin 36^\circ \), \( \sin 54^\circ \). Można posłużyć się twierdzeniem o dwusiecznej. Któżego kąta?

52. Wykazać, że \( \tan^2 \frac{\pi}{7} \cdot \tan^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \tan^2 \frac{3\pi}{7} = 7 \).

Zadania dla klasy 1\(^A\), część piąta