Matematyka B — egzamin

27 czerwca 2017 r., godz. 10:00 — 14:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach,.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego i jego nr. indeksu.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(10 p.)** Rozwiązać równanie $z^9 + 8z^6 + z^3 + 8 = 0$, tzn. znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania tego równania.

---

2. **(10 p.)** Łódka porusza się w wodzie bez napędu (została rozpędzona wcześniej). Opór wody jest proporcjonalny do prędkości (chwilowej) łódki. W pewnej chwili prędkość łódki była równa 1,5 m/s, a po następnych 4 s już tylko 1 m/s.
Po jakim czasie prędkość łódki zmniejszy się do 4 cm/s?

---

3. **(10 p.)** Obliczyć całkę $\int_C \left(\frac{3x+2y}{\sqrt{x+y}}\mathrm{d}x + \frac{x}{\sqrt{x+y}}\mathrm{d}y\right)$ wzdłuż łuku okręgu

$$C = \{(x,y)\colon \quad x^2+y^2=1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

o początku $(1,0)$ i końcu $(0,1)$.

---

4. **(10 p.)** Znaleźć środek ciężkości zbioru, który powstał w wyniku obrotu wokół osi OX obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = x(e^x - 1)$ i prostymi o równaniach $x = 0$, $x = 3$ i $y = 0$ zakładając, że jest on jednorodny.

---

5. Niech $f(x,y) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + \left(e^{2y} - (x-1)^2\right)^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Zachodzą wtedy równości: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - 6x^2 + 5x) - 4(x-1)\left(e^{2y} - (x-1)^2\right)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4e^{2y}\left(e^{2y} - (x-1)^2\right)$.
(3 p.) Znaleźć wszystkie punkty, w których gradient funkcji f jest wektorem zerowym.
(4 p.) Znaleźć lokalne minima, maksima i siodła funkcji f.
(3 p.) Znaleźć punkty, w których funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje najmniejszą i największą wartość lub wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ którejś z nich lub obu nie ma.

---

6. **(10 p.)** Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} x' &= \ x - y - z, \\ y' &= \ x + y, \\ z' &= 3x + z. \end{aligned}$$

Znaleźć rozwiązanie tego układu spełniające warunki $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ i $z(0) = 0$.
