

Matematyka B, kolokwium, 21 maja 2018 r., 15:15 – 17:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (7 p.) Rozwiązać równanie różniczkowe $x'(t) = t - 2x(t) \operatorname{ctg}(2t)$ (r).

(3 p.) Znaleźć rozwiązanie równania (r) spełniające warunek $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

2. (4 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) + 24x'(t) + 169x(t) = 0$ i opisać wszystkie jego rzeczywiste rozwiązania.

(6 p.) Rozwiązać równanie $x''(t) + 24x'(t) + 169x(t) =$
 $= 202e^{-12t} \sin(5t) + 25te^{-12t} - 10t \cos(5t) - \sin(5t) - 12t \sin(5t)$.

3. (10 p.) Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$x' = 5x + 4y - z,$$

$$y' = -6x - 6y + 2z,$$

$$z' = -7x - 4y - z.$$

4. (10 p.) Rozwiązać równanie: $x''(t) + 10x'(t) + 25x(t) = 100 + 60te^{-5t} + 6te^{5t} + 60t^2e^{5t} + 100t^3e^{5t}$.

5. Niech $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 169)(x^2 + (y + 10)^2)$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(x^2 + (y + 10)^2 - 169) + x^2 + y^2 - 169$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2 + (y + 10)^2 - 169) + 2(y + 10)(x^2 + y^2 - 169)$.

(3 p.) Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji f , czyli takie punkty (x, y) , dla których $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$.

(4 p.) Rozstrzygnąć, w których punktach krytycznych funkcja f ma lokalne maksima, w których ma lokalne minima, a w których siodła.

(3 p.) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f w kole $\{(x, y) \mid x^2 + (y + 5)^2 \leq 18^2\}$.
