

Matematyka B, kolokwium, 9 kwietnia 2018 r., 18:30 – 20:30

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech  $z = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$ .

(2 p.) Obliczyć  $|z|$ .

(3 p.) Obliczyć  $z^2$  i  $z^4$ .

(5 p.) Znaleźć takie liczby  $x, y \in \mathbb{R}$ , że  $z^{2018} = x + yi$  oraz takie liczby  $u, v \in \mathbb{R}$ , że  $z^{2019} = u + vi$ .

---

2. Niech  $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \ln(1 + x^2)$  dla  $x \in [1, 3]$ .

(1 p.) Obliczyć pochodną funkcji  $f$ . Uprościć otrzymany wynik.

(6 p.) Obliczyć długość wykresu funkcji  $f$ .

(3 p.) Obliczyć pierwszą współrzędną środka ciężkości wykresu funkcji  $f$ .

---

3. Niech  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  dla  $x \in [0, \frac{4}{3}]$ .

(6 p.) Obliczyć pole powierzchni  $P$  powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji  $f$  wokół osi  $OY$  o  $2\pi$  radiana.

(4 p.) Obliczyć trzecią współrzędną środka ciężkości powierzchni  $P$ .

---

4. (10 p.) Znaleźć wszystkie liczby zespolone  $z$ , dla których spełniona jest równość

$$z^7 - 27z^4 + 16z^3 - 2^4 \cdot 3^3 = 0.$$

---

5. Znaleźć wszystkie takie funkcje ściśle malejące  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , że dla dowolnej liczby  $p > 0$  styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P = (p, f(p))$  przecina oś  $OX$  w punkcie  $A = (a(p), 0)$ , oś  $OY$  — w punkcie  $B = (0, b(p))$  i odcinek  $OP$ ,  $O = (0, 0)$ , dzieli trójkąt  $AOB$  na dwa trójkąty o równych polach.

---