Matematyka B, egzamin, 8 lutego 2017, 15:05 – 19:05

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(2 p.)** Zdefiniować $\log_c a$ pamiętając o założeniach o a i c.
(2 p.) Podać definicję kosinusa, sinusa i tangensa dowolnego kąta dodatniego.
(6 p.) Dla jakich liczb rzeczywistych t zachodzi nierówność

$$\log_{10}(1+\cos^2 t)+\log_{10}(2\sin^2 t+\tfrac{7}{3})<\log_2 3\cdot\log_3 2+\tfrac{1}{4}\log_{10}\tfrac{1}{16}.$$

---

2. **(10 p.)** Obliczyć objętość zbioru A, który jest częścią wspólną kuli $\{(x,y,z):\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$ i nieskończonego walca $\{(x,y,z):\quad x^2+y^2\leqslant 1\}$.

---

3. **(10 p.)** Niech A będzie zbiorem złożonym z tych wszystkich punktów (x,y), dla których $xy=8$. Znaleźć w zbiorze A punkt, który leży najbliżej punktu $\big(13,\frac{19}{2}\big)$.

---

4. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^3-12x}$ dla $x\in\mathbb{R}$. Wiadomo, że jeżeli $x\neq 0$ oraz $x\neq\pm\sqrt{12}$, to prawdziwe są wzory $f'(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{(x^3-12x)^2}}$ i $f''(x)=\frac{-8x^2-32}{3(\sqrt[3]{x^3-12x})^5}$.
(4 p.) Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca, na których jest ściśle wypukła, na których jest ściśle wklęsła.
(1 p.) Znaleźć takie liczby $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, że zachodzą równości $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-cx-d)=0$.
(1 p.) Znaleźć $\lim\limits_{x\to\sqrt{12}}f'(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to-\sqrt{12}}f'(x)$ lub wykazać, że jedna granica lub obie nie istnieją.
(4 p.) Korzystając z uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

5. **(5 p.)** Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)\cos x-\sqrt{1-x^2}-\sin x+\cos x^{1683}}{x(x-\operatorname{arctg}x)}$.
(5 p.) Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$.

---

6. Niech $O=(1,0,1)$, $A=(2,2,3)$, $B=(4,2,7)$, $C=(2,4,9)$.
(2 pt.) Znaleźć wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OB}$ oraz ich długości.
(1 pt.) Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABO.
(2 pt.) Znaleźć $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.
(1 pt.) Znaleźć pole trójkąta ABO.
(2 pt.) Znaleźć objętość czworościanu $ABCO$.
(2 pt.) Znaleźć odległość punktu C od płaszczyzny OAB.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $(1+x)^a=1+ax+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\big(\cos x\big)'=-\sin x$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots$ $\ln(1-x)=-\big(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots\big)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.