Matematyka B, kolokwium, 16 stycznia 2018 r., 17:30 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach. Każdą kartkę należy podpisać w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Niech $p, q \in \mathbb{R}$ i $f(x) = x^3 - 3px + 2q$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(1 p.) Udowodnić, że funkcja f jest ściśle monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $p \leqslant 0$, a jeśli $p > 0$, to ma dwa lokalne ekstrema.

(5 p.) Udowodnić, że istnieją dokładnie trzy różne liczby rzeczywiste x, dla których $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-p^3 + q^2 < 0$.

(2 p.) Udowodnić, że istnieją dokładnie dwie różne liczby rzeczywiste x, dla których $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-p^3 + q^2 = 0$.

(2 p.) Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x, dla której $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-p^3 + q^2 > 0$.

---

2. **(3 p.)** Udowodnić, że dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$.

(4 p.) Rozstrzygnąć czy istnieją takie liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x < a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

---

3. **(10 p.)** W Grodzie Kaczym, na rogu prostopadłych ulic Kaczora Wielkiego i Kaczora Wspaniałego stoi budynek w kształcie prostopadłościanu. Ściana budynku równoległa do ulicy Kaczora Wielkiego ma 64 m długości a ściana równoległa do ulicy Kaczora Wspaniałego ma 27 m długości. Pozostałe ściany graniczą z ogromnym, betonowym placem. Kaczka Dziwaczka idzie nad rzeczkę najpierw trawnikiem ulicą Kaczora Wielkiego, a potem ma skręcić w ulicę Kaczora Wspaniałego. Musi jednak przejść obok tego wielkiego budynku, by uiścić opłatę klimatyczną w kasie, która jest ulokowana we wzmiankowym budynku, w jego rogu od strony betonowego placu tj. tym, który nie sąsiaduje z żadną z ulic. Jest już zmęczona, więc chce skrócić drogę idąc przez plac. W jakiej odległości od skrzyżowania powinna wejść Kaczka Dziwaczka na betonowy plac, by idąc **prosto**, przez betonowy plac przejść po nim jak najkrótszy odcinek nie omijając kasy ?

Należy zakładać, że trawniki na obu ulicach są prostoliniowe i sąsiadują ze ścianami narożnego domu oraz że obie ulice są bardzo długie.

Może warto coś narysować.

---

4. **(10 p.)** Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x)) + 2\sin^2 x}{\ln(1 + \operatorname{tg} x) \cdot (\sqrt{1+2x} - \sin x - \cos x)}$.

---

5. Niech $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

(3 p.) Obliczyć $f'(x)$ i uprościć wynik.

(7 p.) Znaleźć taki ciąg (a_n), że $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla każdego $x \in (-1, 1)$.
