Matematyka B, kolokwium, 28 listopada 2017, 17:30 – 20:00

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Punkty A, B, C, D, są wierzchołkami czworościanu, przy czym $A = (1,2,3)$, $B = (4,8,9)$, $C = (6, \frac{19}{2}, 18)$, $D = (2,6,11)$. Punkt B_1 leży na odcinku AB, przy czym $\frac{BB_1}{B_1A} = 2$. Punkt C_1 leży na odcinku AC, przy czym $\frac{CC_1}{C_1A} = \frac{3}{2}$

(1 p.) Znaleźć współrzędne punktów B_1 i C_1.

(1 p.) Obliczyć długości odcinków AB_1 i C_1C.

(2 p.) Obliczyć $\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC_1}$ oraz $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ i pole trójkąta AB_1C_1.

(1 p.) Obliczyć odległość punktu C_1 od prostej AB.

(1 p.) Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkty A, B, C.

(2 p.) Znaleźć objętość wielościanu o wierzchołkach B_1, B, C, C_1, D.

(2 p.) Obliczyć kosinusy kątów trójkąta ABC. Który z tych kątów jest najmniejszy?

---

2. **(3 p.)** Zdefiniować kosinus dowolnego kąta $\varphi > 0$.

(4 p.) Znaleźć zbiór A złożony z tych wszystkich $t \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi nierówność

$$32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 22\cos^2 t - 3 > 0.$$

(3 p.) Zaznaczyć na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zbiór złożony ze wszystkich punktów postaci $(\cos t, \sin t)$, $t \in A$.

---

3. **(3 p.)** Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2017n^{11}+2}{1805n^{12}+2}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2017n^{11}+2)}{\ln(1805n^{12}+2)}$.

(3 p.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1805n^{10}+2}{2017n^{10}+2}\right)^{n^2}$.

(4 p.) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1805}{2n^2+2017}\right)^{n^2}$.

---

4. **(3 p.)** Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach o c i d.

(4 p.) Rozwiązać równanie: $\log\frac{x+5}{5} + \log\frac{x-2}{2} + \log\frac{x-3}{3} = \log\sqrt[10]{1024}$.

(3 p.) Dowieść, że $\log_{10}(350-7) + \log_{10}\frac{1}{7} + \frac{\log_{10}1024}{5} + \frac{4\log_{10}27}{3} < 14\log_{10}2 < 2 + 2\log_{10}13$.

---

5. Niech $a_{n+1} = -a_n + a_n^3$ dla $n = 0,1,2,\ldots$ oraz $a_0 \in \mathbb{R}$.

(6 p.) Udowodnić, że jeśli $0 < |a_0|^2 < 2$, to $|a_{n+1}| < |a_n|$ i wywnioskować stąd, że wtedy ciąg $a_0, a_1, \ldots$ ma skończoną granicę i znaleźć ją. Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

(4 p.) Udowodnić, że jeśli $|a_0|^2 > 2$, to $|a_{n+1}| > |a_n|$ oraz że wtedy ciąg $a_0, a_1, \ldots$ ma granicę i wyznaczyć ją w zależności od a_0. Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?
